Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

1. aprill 2006 Lõppvoor **9. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a, b), mille korral

$$ab = \text{SÜT}(a, b) + \text{VÜK}(a, b).$$

2. Tõesta, et ringi raadiusega 2 saab täielikult katta 7 ühikringiga.

3. Antud on $n \geqslant 2$ reaalarvu. On teada, et ükski neist arvudest pole suurem kui ülejäänud arvude aritmeetiline keskmine. Tõesta, et kõik antud arvud on võrdsed.

4. Võrdhaarse kolmnurga ABC tipunurga C suurus on 120°. Kolmnurga alusel AB valitakse punktid D ja E nii, et $|AD| = |DE| = |EB|$. Leia kolmnurga CDE nurkade suurused.

5. Antud on ruudustik mõõtmetega 10×10. Nimetame laevaks ühikruutude komplekti, mille saab koostada mingist ruudust lähtudes nii, et igal sammul lisatakse juurde üks ruut, millel on mõne juba komplekti valitud ruuduga ühine külg. Nimetame laevastikuks sellist laevade hulka, milles ükski kaks laeva ei sisalda ühise tipuga ruute. Leia vähim võimalik ruutude arv laevastikus, mida ei saa täiendada ühegi uue laevaga.

Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

1. aprill 2006 Lõppvoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvuta summa

$$\frac{1}{1+2^{-2006}}+\ldots+\frac{1}{1+2^{-1}}+\frac{1}{1+2^{0}}+\frac{1}{1+2^{1}}+\ldots+\frac{1}{1+2^{2006}}.$$

2. Olgu a, b ja c sellised positiivsed täisarvud, et $ab+1$, $bc+1$ ja $ca+1$ on kõik täisarvude ruudud.

a) Too näide sellistest arvudest a, b ja c.

b) Tõesta, et vähemalt üks arvudest a, b ja c jagub 4-ga.

3. Kolmnurga ABC tipust B tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge AC punktis G ning tipust C tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge AB punktis H. On teada, et kolmnurkade ABG ja ACH ümberringjoonte üks lõikepunktidest asub küljel BC. Tõesta, et nurga BAC suurus on 60°.

4. Leia võrrandi

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{2x}{3}\right]=x$$

kõik reaalarvulised lahendid. (Siin tähistab $[z]$ reaalarvu z täisosa, st suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu z.)

5. Antud on ruudustik mõõtmetega 10×10. Nimetame laevaks ühikruutude komplekti, mille saab koostada mingist ruudust lähtudes nii, et igal sammul lisatakse juurde üks ruut, millel on mõne juba komplekti valitud ruuduga ühine külg. Nimetame laevastikuks sellist laevade hulka, milles üksi kaks laeva ei sisalda ühise tipuga ruute. Leia suurim naturaalarv, mida suvalisel viisil positiivsete täisarvude summana esitades leidub laevastik, mille laevade ruutude arvud on parajasti summa liidetavad.

Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

1. aprill 2006 | Lõppvoor | **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia avaldise $\sin(\cos x) + \cos(\sin x)$ suurim väärtus ning kõik arvud x, mille korral see suurim väärtus realiseerub.

2. Täisnurkse kolmnurga ühe kaateti pikkus on algarv ning ülejäänud külgede pikkused on mingid täisarvud. Kolmnurga ümbermõõdu ja siseringjoone diameetri suhe on samuti täisarv. Leia kõik võimalused, millised saavad olla selle kolmnurga külgede pikkused.

3. Fibonacci arvude jada (F_n) rahuldab tingimusi $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ja iga $n \geqslant 3$ korral $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (m, n), mille korral $F_m \cdot F_n = mn$.

4. Kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt on O ja mediaanide lõikepunkt M, kusjuures sirge OM on risti sirgega AM. Olgu A' sirge AM teine lõikepunkt kolmnurga ABC ümberringjoonega. Sirged BA' ja AC lõikuvad punktis D ning sirged CA' ja AB lõikuvad punktis E. Tõesta, et kolmnurga ADE ümberringjoone keskpunkt asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.

5. Antud on ruuduline mängulaud mõõtmetega $n \times n$. Mängulaua mingile ruudule asetatakse nupp, millega on lubatud teha kahte tüüpi käike: nupu võib nihutada kas suvalisele sellisele naaberruudule, millel on senise ruuduga ühine külg, või suvalisele sellisele naaberruudule, millel on senise ruuduga ühine tipp, kuid mitte ühist külge. Kaks järjestikust käiku peavad alati olema erinevat tüüpi. Leia kõik naturaalarvud $n \geqslant 2$, mille korral on võimalik valida lähteruut ja järgnevad käigud nii, et nupp viibiks mängulaua igal ruudul täpselt üks kord (lõpetades lähteruudust erineval ruudul).

Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

1. aprill 2006 Lõppvoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Antud on ruudustik mõõtmetega 10×10. Nimetame laevaks ühikruutude komplekti, mille saab koostada mingist ruudust lähtudes nii, et igal sammul lisatakse juurde üks ruut, millel on mõne juba komplekti valitud ruuduga ühine külg. Tõesta, et kui kõikvõimalikke n ühikruudust koosnevaid laevu on paaritu arv, siis n jagub 4-ga.

2. Leia vähim võimalik tasandipunktide P ja Q vaheline kaugus, kui P asub funktsiooni $y = x$ graafikul ja Q funktsiooni $y = 2^x$ graafikul.

3. Tõesta või lükka ümber järgmised väited.

a) Iga täisarvu $n \geqslant 3$ korral leidub n paarikaupa erinevat positiivset täisarvu, millest suvalise kahe arvu korrutis jagub ülejäänud $n - 2$ arvu summaga.

b) Mingi täisarvu $n \geqslant 3$ korral leidub n paarikaupa erinevat positiivset täisarvu, millest suvalise $n - 2$ arvu summa jagub ülejäänud kahe arvu korrutisega.

4. Olgu O teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ning A', B' ja C' vastavalt kolmnurkade BCO, CAO ja ABO ümberringjoonte keskpunktid. Tõesta, et kolmnurga $A'B'C'$ pindala on vähemalt niisama suur kui kolmnurga ABC pindala.

5. Aafrikas kõneldava ababi keele tähestik koosneb tähtedest A ja B ning selle keele sõnad on parajasti need, mida saab moodustada järgmise kahe reegliga.

1) A on sõna.

2) Kui s on sõna, siis $s \oplus s$ ja $s \oplus \bar{s}$ on sõnad, kus $\bar{s}$ tähistab sõna, mis saadakse sõnast s, asendades seal kõik tähed A tähtedega B ja vastupidi, ning $x \oplus y$ tähistab sõnade x ja y järjestkirjutamist.

Austraalias kõneldava ululu keele tähestik koosneb samuti tähtedest A ja B ning keele sõnad on parajasti need, mida saab moodustada järgmise kahe reegli abil.

1) A on sõna.

2) Kui s on sõna, siis $s \otimes s$ ja $s \otimes \bar{s}$ on sõnad, kus $\bar{s}$ tähistab sama nagu eelnevas ning $x \otimes y$ tähistab ühepikkuste sõnade x ja y korral sõna, mille saame, kui kirjutame sõnade x ja y tähed vaheldumisi üksteise järele, alustades sõna x esimesest tähest.

Tõesta, et ababi ja ululu keel koosnevad samadest sõnadest.

LIII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

1 апреля 2006 г. Заключительный тур **9 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все пары положительных целых чисел (a, b), при которых

$$ab = \text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b).$$

2. Доказать, что круг радиусом 2 можно полностью накрыть 7 единичными кругами.

3. Даны $n \geqslant 2$ действительных чисел. Известно, что ни одно из этих чисел не больше, чем среднее арифметическое остальных чисел. Доказать, что все данные числа равны.

4. Величина угла при вершине C равнобедренного треугольника ABC составляет 120°. На основании треугольника AB берут точки D и E так, что $|AD| = |DE| = |EB|$. Найти величины углов треугольника CDE.

5. Дано клетчатое поле размерами 10×10. Назовём кораблём комплект единичных клеток, который можно составить начиная с какой-то клетки так, что каждым шагом добавляют одну клетку, имеющую общую сторону с какой-то уже выбранной в комплект клеткой. Назовём эскадрой такое множество кораблей, в котором никакие два корабля не содержат клеток с общей вершиной. Найти наименьшее возможное количество клеток в эскадре, которую невозможно дополнить ни одним новым кораблём.

LIII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

1 апреля 2006 г. Заключительный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Вычислить сумму

$$\frac{1}{1+2^{-2006}}+\ldots+\frac{1}{1+2^{-1}}+\frac{1}{1+2^{0}}+\frac{1}{1+2^{1}}+\ldots+\frac{1}{1+2^{2006}}.$$

2. Пусть a, b и c — такие положительные целые числа, что $ab+1$, $bc+1$ и $ca+1$ являются все квадратами целых чисел.

а) Привести пример таких чисел a, b и c.

б) Доказать, что по крайней мере одно из чисел a, b и c делится на 4.

3. Биссектриса, проведенная из вершины B треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке G, а биссектриса, проведенная из вершины C, пересекает сторону AB в точке H. Известно, что одна из точек пересечения описанных окружностей треугольников ABG и ACH находится на стороне BC. Доказать, что величина угла BAC равна 60°.

4. Найти в действительных числах все решения уравнения

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{2x}{3}\right]=x.$$

(Здесь $[z]$ обозначает целую часть числа z, т.е. наибольшее целое число, которое не превосходит число z.)

5. Дано клетчатое поле размерами 10×10. Назовём кораблём комплект единичных клеток, который можно составить начиная с какой-то клетки так, что каждым шагом добавляют одну клетку, имеющую общую сторону с какой-то уже выбранной в комплект клеткой. Назовём эскадрой такое множество кораблей, в котором никакие два корабля не содержат клеток с общей вершиной. Найти наибольшее натуральное число, при любом представлении которого в виде суммы положительных целых чисел найдётся эскадра, количества клеток кораблей которой являются в точности слагаемыми суммы.

LIII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

1 апреля 2006 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти наибольшее значение выражения $\sin(\cos x) + \cos(\sin x)$ и все числа x, при которых это наибольшее значение реализуется.

2. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника — простое число, а длины остальных сторон — какие-то целые числа. Отношение периметра треугольника к диаметру вписанной окружности также является целым числом. Найти все возможности, чему могут быть равны длины сторон этого треугольника.

3. Последовательность (F_n) чисел Фибоначчи удовлетворяет условиям $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ и $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ для каждого $n \geqslant 3$. Найти все пары целых чисел (m, n), при которых $F_m \cdot F_n = mn$.

4. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, а M — точка пересечения медиан, при этом прямая OM перпендикулярна прямой AM. Пусть A' — вторая точка пересечения прямой AM с описанной окружностью треугольника ABC. Прямые BA' и AC пересекаются в точке D, а прямые CA' и AB пересекаются в точке E. Доказать, что центр описанной окружности треугольника ADE расположен на описанной окружности треугольника ABC.

5. Дано клетчатое игровое поле размерами $n \times n$. На какую-то клетку игрового поля ставят фишку, которой можно совершать ходы двух типов: фишку можно передвинуть на такую произвольную соседнюю клетку, которая имеет общую сторону с текущей клеткой, или же на такую соседнюю клетку, которая имеет с текущей клеткой общую вершину, но не общую сторону. Два последовательных хода должны всегда быть различных типов. Найти все натуральные числа $n \geqslant 2$, при которых возможно выбрать исходную клетку и последующие ходы так, чтобы фишка побывала на каждой клетке игрового поля ровно один раз (заканчивая на клетке, отличной от исходной).

LIII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

1 апреля 2006 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Дано клетчатое поле размерами 10×10. Назовём кораблём комплект единичных клеток, который можно составить начиная с какой-то клетки так, что каждым шагом добавляют одну клетку, имеющую общую сторону с какой-то уже выбранной в комплект клеткой. Доказать, что если количество всех возможных состоящих из n клеток кораблей — нечётное число, то n делится на 4.

2. Найти наименьшее возможное расстояние между точками плоскости P и Q, если P расположена на графике функции $y = x$, а Q — на графике функции $y = 2^x$.

3. Доказать или опровергнуть следующие утверждения.

а) Для каждого целого $n \geqslant 3$ найдутся n попарно различных положительных целых чисел, произведение любых двух из которых делится на сумму остальных $n - 2$ чисел.

б) Для какого-то целого $n \geqslant 3$ найдутся n попарно различных положительных целых чисел, сумма любых $n - 2$ из которых делится на произведение остальных двух чисел.

4. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, а A', B' и C' — центры описанных окружностей соответственно треугольников BCO, CAO и ABO. Доказать, что площадь треугольника $A'B'C'$ не меньше площади треугольника ABC.

5. Алфавит употребляемого в Африке языка абаби состоит из букв A и B, а словами этого языка являются все слова, которые можно составить при помощи следующих двух правил.

1) A — слово.
2) Если s — слово, то $s \oplus s$ и $s \oplus \bar{s}$ — слова, где $\bar{s}$ обозначает слово, которое получают из слова s, заменяя в нём все буквы A буквами B и наоборот, а $x \oplus y$ обозначает написание подряд слов x и y.

Алфавит употребляемого в Австралии языка улулу состоит из букв A и B, а в этом языке словами являются все слова, которые можно составить при помощи следующих двух правил.

1) A — слово.
2) Если s — слово, то $s \otimes s$ и $s \otimes \bar{s}$ — слова, где $\bar{s}$ обозначает то же, что и раньше, а $x \otimes y$ в случае слов x и y одинаковой длины обозначает слово, которое получим, если будем одну за другой писать буквы поочерёдно слов x и y, начиная с первой буквы слова x.

Доказать, что языки абаби и улулу состоят из одних и тех же слов.

Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

1. aprill 2006 Lõppvoor **Lahendused ja vastused**

9. klass

1. *Vastus:* $(2, 2)$.

Lahendus 1. Et antud võrduses jaguvad vasak pool ja parema poole liidetav VÜK(a, b) arvuga a, siis peab ka SÜT(a, b) jaguma a-ga. Samas positiivsete täisarvude korral SÜT$(a, b) \leqslant a$, järelikult SÜT$(a, b) = a$. Analoogiliselt SÜT$(a, b) = b$ ehk $a = b$. Ülesande võrdus omandab seega kuju $a^2 = a + a$ ehk $a(a - 2) = 0$. Selle võrrandi ainuke positiivne lahend on $a = 2$, siis ka $b = 2$.

Lahendus 2. On teada, et $ab =$ SÜT(a, b) VÜK(a, b). Seega on meil tegemist võrdusega

$$\text{SÜT}(a, b)\,\text{VÜK}(a, b) = \text{SÜT}(a, b) + \text{VÜK}(a, b).$$

Toome liikmed ühele poole ning liidame kummalegi poolele arvu 1, saame

$$\text{SÜT}(a, b)\,\text{VÜK}(a, b) - \text{SÜT}(a, b) - \text{VÜK}(a, b) + 1 = 1$$

ehk

$$\big(\text{SÜT}(a, b) - 1\big)\big(\text{VÜK}(a, b) - 1\big) = 1.$$

Viimane võrdus esitab arvu 1 kahe mittenegatiivse täisarvu korrutisena; see on võimalik ainult juhul, kui mõlemad tegurid on võrdsed 1-ga. Seega SÜT$(a, b) - 1 = 1$ ja VÜK$(a, b) - 1 = 1$ ehk SÜT$(a, b) = 2$ ja VÜK$(a, b) = 2$. Siit $a = b = 2$.

Lahendus 3. Olgu SÜT$(a, b) = d$. Esitame arvud a ja b kujul $a = da'$, $b = db'$, kus a' ja b' on ühistegurita. Siis ilmselt VÜK$(a, b) = da'b'$. Ülesande võrdus omandab kuju

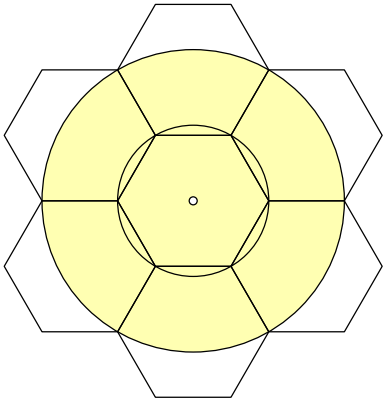
$$d^2 a'b' = d + da'b',$$

millest

$$a'b' = \frac{1}{d - 1}.$$

Et $a'b'$ on täisarv, siis ainukese võimalusena $d - 1 = 1$ ja $a'b' = 1$. Siit $d = 2$ ja $a' = b' = 1$. Otsitavad arvud on seega $a = da' = 2$ ja $b = db' = 2$.

2. Vaatleme korrapärastest kuusnurkadest koostatud kujundit joonisel 1, kus iga kuusnurga küljepikkus on 1. Iga sellise kuusnurga saab parajasti katta ühikringiga, samas katab 7 kuusnurgast koostatud kujund ringi raadiusega 2, sest nii suur on vähim kaugus kujundi keskpunktist kujundi ääreni.



Joonis 1

3. *Lahendus 1.* Olgu a suurim arv vaadeldavate arvude hulgas. Oletame väitevastaselt, et kõik antud arvud ei ole võrdsed. Siis leidub nende hulgas arvust a väiksemaid arve. Kui arv a kõrvale jätta, siis ülejäänud arvude aritmeetiline keskmine on väiksem kui arv a. See on aga vastuolus ülesande tingimustega. Järelikult peavad kõik arvud olema võrdsed.

Lahendus 2. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vaadeldavad arvud ning s nende summa. Vastavalt ülesande tingimustele kehtivad võrratused

$$a_1 \leqslant \frac{s-a_1}{n-1}, \qquad a_2 \leqslant \frac{s-a_2}{n-1}, \qquad \ldots, \qquad a_n \leqslant \frac{s-a_n}{n-1}.$$

Kui vähemalt üks võrratustest oleks range, siis saaksime võrratusi liites

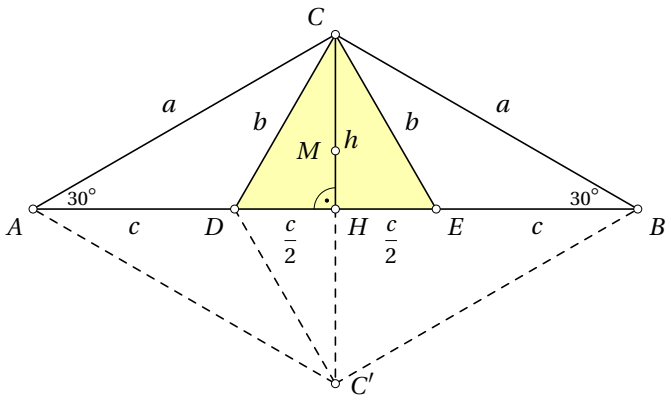
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < \frac{s-a_1}{n-1} + \frac{s-a_2}{n-1} + \ldots + \frac{s-a_n}{n-1}.$$

Seose $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s$ tõttu on viimane võrratus samaväärne võrratusega $s < \dfrac{ns-s}{n-1}$ ehk $s < s$, vastuolu. Järelikult peab kõigis esialgsetes võrratustes kehtima võrdus, teiste sõnadega

$$a_1 = \frac{s-a_1}{n-1}, \qquad a_2 = \frac{s-a_2}{n-1}, \qquad \ldots, \qquad a_n = \frac{s-a_n}{n-1}.$$

Esimesest võrdusest saame nüüd $a_1(n-1) = s - a_1$ ehk $a_1 = \dfrac{s}{n}$, teisest võrdusest analoogiliselt $a_2 = \dfrac{s}{n}$ jne kuni viimasest võrdusest $a_n = \dfrac{s}{n}$. Seega on kõik arvud $a_1, a_2, \ldots, a_n$ võrdsed.

4. *Vastus:* kõik nurgad on 60°.



Joonis 2

Lahendus 1. Kolmnurga ABC alusnurk on $(180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$. Olgu H kolmnurga tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt (joonis 2). Peegeldame kolmnurka ABC külje AB suhtes, millega punkt C teiseneb punktiks C'. Et $\angle CAC' = 60^\circ$ ja $|AC| = |AC'|$, siis on kolmnurk ACC' võrdkülgne ning lõik AH on tema mediaan. Seejuures jaotab punkt D selle lõigu suhtes $2 : 1$, järelikult on D kolmnurga ACC' mediaanide lõikepunkt. Siis on sirge CD samuti mediaan ja ühtlasi nurgapoolitaja, seega $\angle DCH = 30^\circ$ ning $\angle DCE = 60^\circ$. Et kolmnurk CDE on võrdhaarne, siis ka $\angle CDE = \angle CED = 60^\circ$.

Lahendus 2. Tähistame lühiduse mõttes $|CA| = |CB| = a$, $|CD| = |CE| = b$ ja $|AD| = |DE| = |EB| = c$. Lisaks olgu h tipust C küljele AB tõmmatud kõrguse pikkus. Kolmnurgast CHA saame $h : \dfrac{3c}{2} = \tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, mistõttu $h = \dfrac{\sqrt{3}\,c}{2}$. Kolmnurgast CHD saame nüüd Pythagorase teoreemi abil $b^2 = h^2 + \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 = \dfrac{3c^2}{4} + \dfrac{c^2}{4} = c^2$. Järelikult $b = c$. Seega on kolmnurk CDE võrdkülgne ning tema nurgad on 60°.

Lahendus 3. Et täisnurkses kolmnurgas CHA on $\dfrac{|CH|}{|CA|} = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ ning samuti $\dfrac{|DH|}{|DA|} = \dfrac{1}{2}$, siis rahuldab lõik CD nurgapoolitaja omadust. Järelikult poolitab lõik CD nurga ACH, mille suurus on 60°, ehk $\angle DCH = 30^\circ$. Siis aga on võrdhaarse kolmnurga CDE tipunurga suurus 60°, alusnurkade suurused on seega samuti 60°.

Lahendus 4. Olgu M kolmnurga CDE mediaanide lõikepunkt. Siis kiirteteoreemi põhjal $|DM| = \dfrac{1}{3}|AC| = \dfrac{1}{3}|BC| = |EM|$. Täisnurksest kolmnurgast

CHA saame $|CH| = \frac{1}{2}|AC|$ ehk $|CM| = \frac{1}{3}|AC|$. Et $|CM| = |DM| = |EM|$, siis on kolmnurga CDE mediaanide lõikepunkt M ühtlasi ümberringjoone keskpunkt. Järelikult on kolmnurk CDE võrdkülgne ja kõik tema nurgad on suurusega 60°.

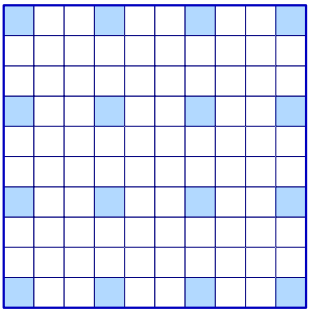
Lahendus 5. Oletame, et $\angle DCE > 60^\circ$. Siis $\angle CED < 60^\circ$. Et suuremale nurgale vastab suurem külg, siis $|DE| > |CD|$ ehk $|AD| > |CD|$. Kolmnurgas ACD on siis $\angle ACD > 30^\circ$ ning sümmeetriliselt kolmnurgas BCE on $\angle BCE > 30^\circ$. Seega $\angle ACB > 120^\circ$, vastuolu. Analoogiliselt viib vastuolule oletus $\angle DCE < 60^\circ$. Seega peab olema $\angle DCE = 60^\circ$, millest järeldub, et $\angle CDE = \angle CED = 60^\circ$.

Lahendus 6. Esiteks paneme tähele, et kui tipu C juures on nurgad 30°, 60°, 30°, siis vastavad lõigud alusel on võrdsed. Tõepoolest, siis on kolmnurgad ADC ja BEC võrhaarsed, mistõttu $|AD| = |CD|$ ja $|BE| = |CE|$; kolmnurk CDE on aga võrdkülgne, mistõttu $|CD| = |CE| = |DE|$. Teiseks, osalõikude pikkuste vahekord kolmnurga alusel määrab üheselt nurkade jaotuse tipunurga juures.

5. *Vastus:* 16.

Näitame kõigepealt, et 16 ruutu kattev nõutud omadusega laevastik leidub. Paigutame ruudustikule 16 üheruudulist laeva nii, nagu joonisel 3. Siis on ruudustiku igal ruudul ühine tipp ühega nendest laevadest, seega pole võimalik laevu juurde lisada.

Tõestame nüüd, et nõutud omadusega laevastik ei saa koosneda vähem kui 16 ruudust. Vaatleme ruudustiku ruute, kuhu eelmises osas paigutasime laevad. Nende hulgas ei leidu kahte ruutu, millel oleks ruudustiku sama ruuduga ühine tipp. Kui laevastikku pole võimalik ühtegi laeva lisada, siis peab laevastikus leiduma neist 16 ruudust igaühe jaoks mingi temaga ühise tipuga ruut. Et need ruudud peavad kõik olema erinevad, siis peab laevastikus olema vähemalt 16 ruutu.



Joonis 3

10. klass

1. *Vastus:* $2006\,\frac{1}{2}$.

Suvalise reaalarvu $a \neq 0$ ja suvalise täisarvu k korral

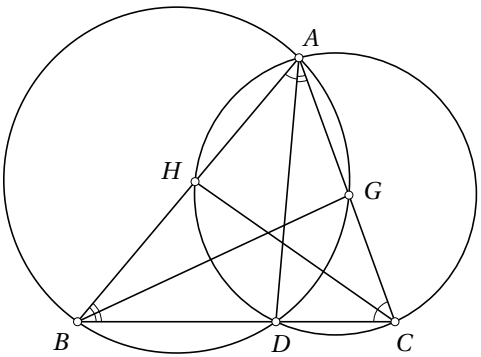
$$\frac{1}{1+a^{-k}} + \frac{1}{1+a^{k}} = \frac{1+a^{k}+1+a^{-k}}{\left(1+a^{-k}\right)\left(1+a^{k}\right)} = 1.$$

Ülesandes antud summa algusest i-s liidetav ja lõpust i-s liidetav moodustavad parajasti sellise paari; üldse on summas 2006 niisugust paari ning lisaks veel liidetav $\frac{1}{1+2^0} = \frac{1}{2}$. Summa on seega $2006 \cdot 1 + \frac{1}{2} = 2006\,\frac{1}{2}$.

2. a) Sobivad näiteks arvud $a = 1$, $b = 3$, $c = 8$. Siis $ab + 1 = 2^2$, $bc + 1 = 5^2$, $ca + 1 = 3^2$.

b) Kui kõik arvud a, b ja c on paaritud, siis annavad nad 4-ga jagamisel kas jäägi 1 või jäägi 3. Järelikult leidub nende seas kaks arvu, mille jäägid on võrdsed, üldisust kitsendamata olgu need a ja b. Sõltumata sellest, kas a ja b annavad 4-ga jagades jäägi 1 või jäägi 3, annab $ab + 1$ jagamisel 4-ga jäägi 2. Seega ei saa $ab + 1$ olla täisruut, sest täisruutude jäägid 4-ga jagamisel saavad olla ainult kas 0 (arvud kujul $2k$) või 1 (arvud kujul $2k + 1$). Seega võime eeldada, et vähemalt üks arvudest a, b ja c on paaris, üldisust kitsendamata olgu see a. Siis on arv $ab + 1$ paaritu täisruut. Et nii kujuga $4k + 1$ kui ka $4k + 3$ paaritute arvude ruudud annavad 8-ga jagades jäägi 1, siis ab jagub 8-ga. Järelikult peab vähemalt üks arvudest a ja b jaguma 4-ga.

3. Olgu D kolmnurkade ABG ja ACH ümberringjoonte lõikepunkt, mis asub küljel BC (joonis 4). Lühiduse mõttes tähistame $\angle BAD = \alpha$ ja $\angle CAD = \beta$.



Joonis 4

Et nurgad HAD ja HCD toetuvad samale kaarele, siis $\angle HCA = \angle HCD = \angle HAD = \alpha$. Samal põhjusel $\angle GBA = GBD = \angle GAD = \beta$. Kolmnurga ABC sisenurkade summa järgi saame võrrandi $(\alpha+\beta)+2\alpha+2\beta = 180^\circ$ ehk $3(\alpha+\beta) = 180^\circ$. Siit $\angle BAC = \alpha+\beta = 60^\circ$.

4. *Vastus:* 0, 2, 3, 4, 5 ja 7.

Lahendus 1. Et vasaku poole liidetavad on täisarvud, siis peab x olema täisarv. Järelikult avaldub ta kujul $x = 6k + l$, kus k ja l on täisarvud ja $0 \leqslant l \leqslant 5$.

- Kui $x = 6k$, siis on võrrandil kuju $3k + 4k = 6k$, millest $k = 0$ ja $x = 0$.
- Kui $x = 6k + 1$, siis on võrrandil kuju $3k + 4k = 6k + 1$, millest $k = 1$ ja $x = 7$.
- Kui $x = 6k + 2$, siis on võrrandil kuju $3k + 1 + 4k + 1 = 6k + 2$, millest $k = 0$ ja $x = 2$.
- Kui $x = 6k + 3$, siis on võrrandil kuju $3k + 1 + 4k + 2 = 6k + 3$, millest $k = 0$ ja $x = 3$.
- Kui $x = 6k + 4$, siis on võrrandil kuju $3k + 2 + 4k + 2 = 6k + 4$, millest $k = 0$ ja $x = 4$.
- Kui $x = 6k + 5$, siis on võrrandil kuju $3k + 2 + 4k + 3 = 6k + 5$, millest $k = 0$ ja $x = 5$.

Lahendus 2. Et $\left[\frac{x}{2}\right] \leqslant \frac{x}{2}$ ja $\left[\frac{2x}{3}\right] \leqslant \frac{2x}{3}$, siis saame antud võrrandist

$$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} \geqslant x$$

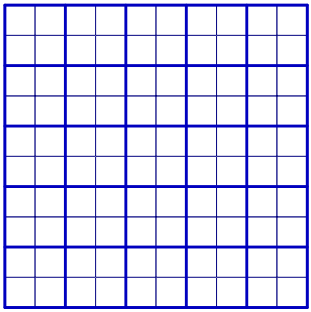
ehk $3x + 4x \geqslant 6x$, millest $x \geqslant 0$. Teiselt poolt, et x on täisarv, siis alati $\left[\frac{x}{2}\right] \geqslant \frac{x-1}{2}$ ja $\left[\frac{2x}{3}\right] \geqslant \frac{2x-2}{3}$, seega saame

$$\frac{x-1}{2} + \frac{2x-2}{3} \leqslant x$$

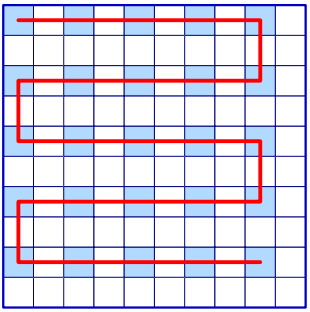
ehk $3x - 3 + 4x - 4 \leqslant 6x$, millest $x \leqslant 7$. Jääb kontrollida x väärtusi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Võrrandit rahuldavad nendest kõik peale $x = 1$ ja $x = 6$.

5. *Vastus:* 25.

Tõestame kõigepealt, et 25-st suurema arvu saab jaotada liidetavateks nii, et vastavate laevasuurustega laevastikku pole võimalik ruudustikule paigutada. Täpsemalt, tõestame, et ruudustikule pole võimalik paigutada rohkem kui 25 laeva suurusega 1. Tükeldame mängulaua 2×2 ruutudeks (joonis 5), neid on 25. Et iga tükk võib sisaldada ülimalt ühe laeva suurusega 1, saab ruudustikule üldse paigutada ülimalt 25 laeva suurusega 1.



Joonis 5



Joonis 6

Näitame nüüd, et arvu 25 iga liidetavateks jaotuse korral leidub selliste laevasuurustega laevastik. Paneme ruudustikule esialgu 25 laeva suurusega 1 nagu joonisel 6. Seejärel nihutame alates vasakust ülemisest ruudust mööda punast joont omavahel kokku nii mitu esimest laeva, kui suur on vaadeldava liidetavateks jaotuse esimene liidetav, siis nii mitu laeva, kui suur on teine liidetav jne. Saadud komplekt rahuldab ülesande tingimusi.

11. klass

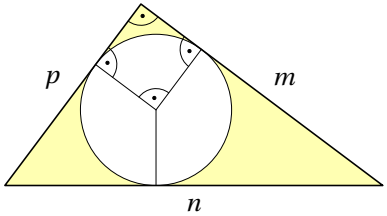
1. *Vastus:* suurim väärtus on $\sin 1 + 1$, see saavutatakse parajasti siis, kui $x = 2k\pi$, kus k on suvaline täisarv.

Et funktsiooni $\cos x$ väärtus kuulub alati lõiku $[-1; 1]$ ning funktsioon $\sin x$ on sellel lõigul kasvav, siis esimese liidetava suurim väärtus on $\sin 1$ ning see saavutatakse parajasti siis, kui $\cos x = 1$ ehk $x = 2k\pi$, kus k on suvaline täisarv. Teise liidetava suurim väärtus on 1, mis saavutatakse parajasti siis, kui $\sin x = 0$ ehk $x = l\pi$, kus l on suvaline täisarv. Mõlemad liikmed omandavad korraga maksimaalse väärtuse parajasti $x = 2k\pi$ korral, kus k on suvaline täisarv; avaldise väärtus on sel juhul $\sin 1 + 1$.

2. *Vastus:* 3, 4 ja 5.

Olgu p ja m kolmnurga kaatetite pikkused ja n hüpotenuusi pikkus, kusjuures p on algarv (joonis 7). Pythagorase teoreemist $p^2 + m^2 = n^2$ saame $p^2 = n^2 - m^2$ ehk $p^2 = (n - m)(n + m)$. Et p on algarv, siis parema poole tegurid on ainsa võimalusena $n - m = 1$, $n + m = p^2$.

Kolmnurga ümbermõõt on $p + m + n$. Kolmnurga siseringjoone diameetri d leidmiseks arvestame, et täisnurga tipust lähtuvate siseringjoone puutujalõikude kogupikkus võrdub siseringjoone diameetriga, ülejäänud kahest tipust tõmmatud nelja puutujalõigu kogupikkus on aga $2n$. Järelikult



Joonis 7

$d+2n = p+m+n$, millest $d = p+m-n$. Ülesande tingimuse põhjal jagub arv $p+m+n$ arvuga $p+m-n$. Asendades siin $m+n$ ja $m-n$ eelneva põhjal, saame, et arv $p+p^2 = p(p+1)$ jagub arvuga $p-1$. Et p ja $p-1$ on ühistegurita, siis $p+1$ jagub arvuga $p-1$. Sellest järeldub, et nende arvude vahe 2 jagub arvuga $p-1$. Seega $p-1 = 1$ või $p-1 = 2$. Esimene juht, kus $p = 2$, on võimatu, sest siis peaksid arvud $n-m$ ja $n+m$ olema erineva paarsusega. Järelikult $p = 3$. Seostest $n-m = 1$, $n+m = 9$ leiame nüüd $m = 4$ ja $n = 5$. Kolmnurk küljepikkustega 3, 4, 5 on ilmselt täisnurkne.

3. *Vastus:* $(1,1)$, $(1,5)$, $(4,6)$, $(5,1)$, $(5,5)$ ja $(6,4)$.

Lahendus 1. Arvutame välja jada mõned esimesed liikmed:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34

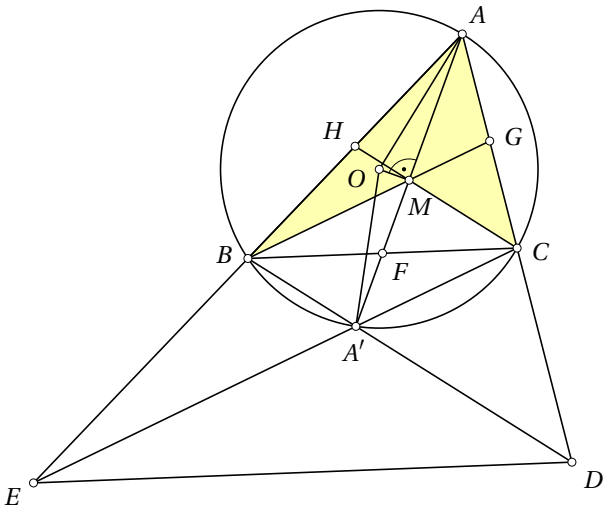
Näitame kõigepealt, et iga $n \geqslant 8$ korral $F_n > 2n$. Tõepoolest, tabelist näeme, et see võrratus kehtib, kui $n = 8$ ja $n = 9$. Kui mingi $k \geqslant 8$ korral $F_k > 2k$ ja $F_{k+1} > 2(k+1)$, siis $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k > 2k + 2(k+1) > 2(k+2)$. Edasi, võttes arvesse ka väärtusi $1 \leqslant n \leqslant 7$, näeme, et iga n korral $F_n \geqslant \frac{n}{2}$. Siit järeldub, et otsitava paari kumbki liige ei tohi olla suurem kui 7, sest näiteks juhul $m \geqslant 8$ saaksime $F_m \cdot F_n > 2m \cdot \frac{n}{2} > mn$.

Paari kumbki liige ei saa olla 2, 3 ega 7, sest näiteks $m = 2, 3, 7$ korral on $\frac{F_m}{m}$ vastavalt $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{13}{7}$, kuid ei leidu indeksit $n \leqslant 7$, mille korral $\frac{F_n}{n}$ oleks vastavalt $2, \frac{3}{2}, \frac{7}{13}$. Juhtudel $m = 1$ ja $m = 5$ on $\frac{F_m}{m} = 1$, siit saame neli sobivat paari $(1,1)$, $(1,5)$, $(5,1)$ ja $(5,5)$. Juhul $m = 4$ on $\frac{F_m}{m} = \frac{3}{4}$, millele vastab $n = 6$, kus $\frac{F_n}{n} = \frac{4}{3}$. Siit saame veel kaks paari $(4,6)$ ja $(6,4)$.

Lahendus 2. Induktsiooniga n järgi tõestame, et iga $n \geqslant 6$ korral kehtib $F_n > n$ ja iga $n \geqslant 8$ korral kehtib $F_n > 2n$. Järelikult kui $m \geqslant 6$ ja $n \geqslant 6$, siis $F_m \cdot F_n > m \cdot n$. See tähendab, et igas otsitavas paaris on üks komponent ülimalt 5. Võrduse sümmeetria tõttu võime eeldada, et see komponent on m, ülejäänud sobivad paarid saame m ja n vahetamisel.

- Kui $m = 1$, siis saame ülesande võrdusest $1 \cdot F_n = 1 \cdot n$ ehk $F_n = n$. Eelneva põhjal sobivad ainukestena $n = 1$ ja $n = 5$. Sobivad paarid on seega $(1,1)$, $(1,5)$, $(5,1)$ ja $(5,5)$.
- Kui $m = 2$, siis saame $1 \cdot F_n = 2 \cdot n$ ehk $F_n = 2n$. Et $n < 8$ korral sellise omadusega arvu ei ole, siis sel juhul lahendeid ei leidu.
- Kui $m = 3$, siis saame $2 \cdot F_n = 3 \cdot n$ ehk $F_n = \frac{3}{2}n$. Et $\frac{3}{2}n < 2n$, siis analoogiliselt eelmise juhuga lahendid puuduvad.
- Kui $m = 4$, siis saame $3 \cdot F_n = 4 \cdot n$ ehk $F_n = \frac{4}{3}n$. Ainuke sobiv võimalus on $n = 6$, mis annab paarid $(4,6)$ ja $(6,4)$.
- Kui $m = 5$, siis saame $5 \cdot F_n = 5 \cdot n$ ehk $F_n = n$, see on juba analüüsitud esimeses punktis.

4. Olgu F, G ja H vastavalt kolmnurga tipust A, B ja C tõmmatud mediaanide aluspunktid (joonis 8). Kolmnurk $A'OA$ on võrdhaarne ja OM on tema kõrgus. Seega $|A'M| = |MA|$. Et mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes $2 : 1$, siis $|FM| = \frac{1}{2}|MA|$. Seega $|A'F| = |FM|$. Teiselt poolt $|BF| = |FC|$. Järelikult on nelinurk $A'BMC$ rööpkülik ja tema vastasküljed on paralleelsed. Siis aga on kolmnurk ABD sarnane kolmnurgaga AHC paralleelsete külgede tõttu, kusjuures sarnasustegur on lõikude AB ja AH pikkuste suhe ehk 2. Samamoodi on kolmnurk ACE sarnane kolmnurgaga AGB sama teguriga. Homoteetia keskpunktiga A ja teguriga 2 teisendab kolmnurga ABC kolmnurgaks AED, kolmnurga ABC ümberringjoone



Joonis 8

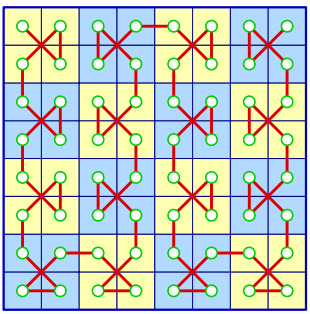
keskpunkt O aga teiseneb sirge AO teiseks lõikepunktiks nimetatud ümberringjoonega.

Märkus. Homoteetia kasutamise asemel võime leida sirge AO teise lõikepunkti P antud ringjoonega ning tõestada, et $|AP| = 2|AO|$, $|DP| = 2|CO|$ ja $|EP| = 2|BO|$.

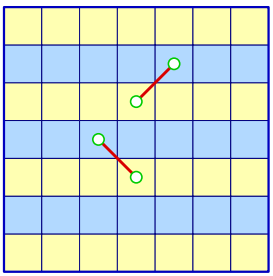
5. *Vastus:* $n = 2k$, kus k on suvaline positiivne täisarv.

Tõestame, et kui n on paarisarv, siis sobiv teekond leidub. Jaotame mängulaua plokkideks mõõtmetega 2×2 (joonis 9) ning paigutame nupu ülemisele vasakule ruudule. Seda ruutu sisaldava ploki läbimiseks nihutame nuppu järgmiselt: alla-paremale, üles, alla-vasakule, alla. Sama käigukombinatsiooni kordame kuni jõuame plokkide veeru alumisse plokki. Seal liigume järgmiselt: alla-paremale, vasakule, üles-paremale, paremale. Nüüd on esimene plokkide veerg läbitud. Teise veeru alumises plokis liigume alla-paremale, vasakule, üles-paremale, üles ning edasi analoogiliselt esimese plokkide veeruga plokkhaaval ülespoole. Sellisel viisil veerge vaheldumisi üles ja alla läbides satub nupp iga ploki igale ruudule täpselt üks kord.

Tõestame, et kui n on paaritu arv, siis sobivat teekonda ei leidu. Vaatleme suvalist teekonda, milles käigutüübid vahelduvad ja mille jooksul nupp ei viibi ühelgi ruudul rohkem kui üks kord. Värvime ruudustikus teise, neljanda, kuuenda jne rea ruudud tumedaks (joonis 10), tumedaid ruute on siis kokku $\frac{n^2 - n}{2}$. Iga diagonaalsuunas tehtud käiguga seostub üks tume ruut, sest selline käik peab alati kas algama või lõppema tumedal ruudul. Et teekond ei läbi ruute korduvalt ja kahte diagonaalkäiku ei tehta järjest, siis vastavad erinevatele käikudele erinevad tumedad ruudud. Järelikult saab teekond sisaldada ülimalt $\frac{n^2 - n}{2}$ diagonaalkäiku ja järelikult ülimalt $\frac{n^2 - n}{2} + 1$ mitte-diagonaalkäiku, kokku ülimalt $n^2 - n + 1$ käiku. Juhul



Joonis 9



Joonis 10

$n \geqslant 3$ on see arv väiksem kui kõigi ruutude läbimiseks vajalik käikude arv $n^2 - 1$.

12. klass

1. Eeldame, et n-ruudulise laeva märkimiseks on paaritu arv võimalusi. Jaotame kõik laevad klassidesse nii, et samasse klassi kuuluvad parajasti need laevad, mis on üksteisest saadavad vertikaalsete ja horisontaalsete peegelduste ning nihete abil. Siis peab leiduma klass, milles on paaritu arv laevu.

Valime sellest klassist mingi laeva L. Oletame, et L ei ole sümmeetriline teda tihedalt ümbritseva ristküliku vertikaalse või horisontaalse sümmeetriatelje suhtes. Siis mitte ükski laev sellest klassist ei ole vastava telje suhtes sümmeetriline. Seetõttu jagunevad kõik vaadeldava klassi laevad paarideks: laev ise ja tema peegeldus vastavast teljest; siis aga kuuluks vaadeldavasse klassi paarisarv laevu. Järelikult peab laev L olema sümmeetriline nii vertikaal- kui ka horisontaaltelje suhtes.

Laeva L ümbritseva ristküliku küljepikkus peab nii horisontaalsuunas kui ka vertikaalsuunas olema paarisarv ruute, sest paaritu laiusega ristküliku paigutamiseks paarisarvulisele (10-ruudulisele) küljepikkusele on paarisarv võimalusi; siis kuuluks vaadeldavasse klassi jällegi paarisarv laevu. Seega jaotavad vertikaalne ja horisontaalne sümmeetritelg laeva L ruudud neljaks lõikumatuks osaks, mis on üksteisega peegelsümmeetrilised. Et igasse ossa kuulub võrdne arv ruute, siis jagub laeva ruutude arv 4-ga.

2. *Vastus:* $\dfrac{1 + \ln\ln 2}{\sqrt{2}\ln 2}$.

Leiame kõigepealt funktsiooni $h(x) = 2^x - x$ miinimumkoha. Et selle funktsiooni tuletis on $h'(x) = 2^x \ln 2 - 1$, siis peab kehtima võrdus $2^x \ln 2 - 1 = 0$, millest

$$2^x = \frac{1}{\ln 2} \qquad \text{ja} \qquad x = -\frac{\ln\ln 2}{\ln 2}.$$

See on tõesti miinimumkoht, sest $h'(x)$ on kasvav. Funktsiooni h väärtus sellel kohal on

$$h(x) = \frac{1}{\ln 2} + \frac{\ln\ln 2}{\ln 2} = \frac{1 + \ln\ln 2}{\ln 2}.$$

Siin $1 + \ln\ln 2 = \ln(\mathrm{e}\ln 2)$. Et $2 < \mathrm{e} < 4$, siis $\ln(\mathrm{e}\ln 2) > \ln(2\ln 2) = \ln\ln 4 > \ln\ln \mathrm{e} = 0$. Järelikult on funktsiooni h väärtus miinimumkohal positiivne ehk funktsiooni $g(x) = 2^x$ graafik asub kõikjal funktsiooni $f(x) = x$ graafikust kõrgemal. Vaatleme nüüd punkte koordinaatidega $A(x, f(x))$ ja $B(x, g(x))$ ning olgu C punkti B projektsioon funktsiooni f graafikule. Kolmnurk ABC on täisnurkne ja võrdhaarne, sest $\angle BAC = 45^\circ$. Järelikult

$|BC| = \dfrac{|AB|}{\sqrt{2}} = \dfrac{h(x)}{\sqrt{2}}$. Seega saavutab kaugus $|BC|$ minimaalse väärtuse parajasti siis, kui $h(x)$ saavutab minimaalse väärtuse. Otsitav minimaalne kaugus on niisiis

$$\frac{h(x)}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \ln\ln 2}{\sqrt{2}\ln 2}.$$

Märkus. Ülesande vastusel on ka teisi kujusid, näiteks $\dfrac{\log_2 \mathrm{e} - \log_2 \log_2 \mathrm{e}}{\sqrt{2}}$.

3. *Vastus:* a) väide kehtib; b) väide ei kehti.

Lahendus 1. a) Võtame nendeks n arvuks arvud $(n^2)!$, $2(n^2)!$, $3(n^2)!$, …, $n(n^2)!$. Suvalise kahe arvu korrutis jagub arvuga $(n^2)!(n^2)!$, ülejäänud arvude summa aga avaldub kujul $k(n^2)!$, kus k on mingi positiivne täisarv, mis on kindlasti väiksem arvust $1 + 2 + \ldots + n$, seega ka arvust n^2.

b) Oletame, et mingi n korral sellised n arvu leiduvad, olgu nad järjestatud kasvavas järjekorras: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Siis ühelt poolt

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} < a_{n-2} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-2} = (n-2)a_{n-2},$$

teiselt poolt aga

$$a_{n-1}a_n \geqslant (n-1)a_n > (n-2)a_{n-2}.$$

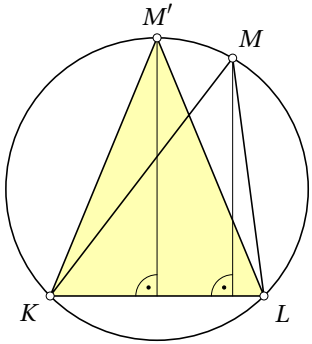
Seega $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} < a_{n-1}a_n$, millest järeldub, et arvude a_1, a_2, …, a_{n-2} summa ei saa jaguda arvude a_{n-1} ja a_n korrutisega.

Lahendus 2. a) Valime suvalised paarikaupa erinevad arvud b_1, b_2, …, b_n ning olgu m nendest arvudest moodustatud kõikvõimalike $(n-2)$-liikmeliste summade vähim ühiskordne. Iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral võtame $a_i = mb_i$. Suvalise kahe arvu a_k ja a_l korrutis $a_k a_l = (mb_k) \cdot (mb_l)$ jagub ülejäänud arvude summaga, sest sellega jagub m^2.

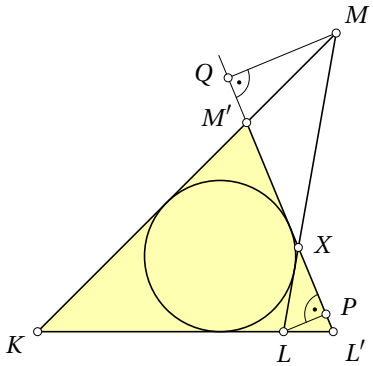
b)-osa tõestame nagu esimeses lahenduses.

4. *Lahendus 1.* Tõestame, et sama ümberringjoone raadiuse puhul on suurim pindala võrdkülgsel kolmnurgal. Kui kolmnurgal KLM leidub kaks erineva pikkusega külge, näiteks KM ja LM, siis valime kolmnurga KLM ümberringjoonel sellise punkti M', et $|KM'| = |LM'|$ (joonis 11). Kolmnurkade KLM ja KLM' alused on ühised, aga esimese kolmnurga kõrgus on väiksem, järelikult on ka esimese kolmnurga pindala teise omast väiksem. Seega ei saa KLM olla suurima pindalaga.

Tõestame, et sama siseringjoone raadiuse puhul on vähim pindala samuti võrdkülgsel kolmnurgal. Kui kolmnurga KLM puhul näiteks kehtib $\angle KLM > \angle KML$, siis vaatleme kolmnurka $KL'M'$, kus punktid L' ja M' on valitud vastavalt sirgetel KL ja KM nii, et $\angle KL'M' = \angle KM'L'$ ja lõik



Joonis 11



Joonis 12

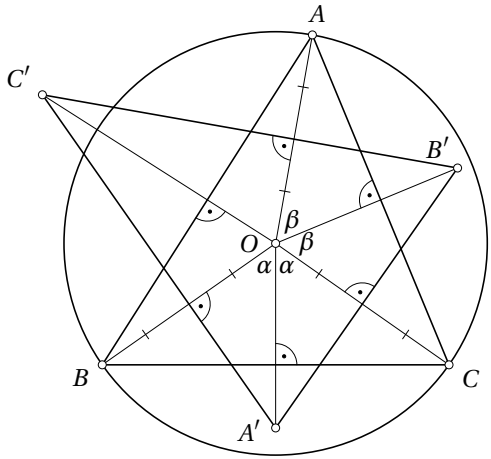
$L'M'$ on siseringjoone puutuja (joonis 12). Olgu X sirgete LM ja $L'M'$ lõikepunkt. Tõmbame punktidest L ja M sirgele $L'M'$ vastavalt ristlõigud LP ja MQ. Siis $|XM'| > |XL'|$, samuti $|MQ| > |LP|$, sest $|XQ| > |XP|$ ja täisnurksed kolmnurgad MQX ja LPX on sarnased. Seega on kolmnurga $MM'X$ pindala suurem kui kolmnurga $LL'X$ pindala ning järelikult on ka kolmnurga KLM pindala suurem kui kolmnurga $KL'M'$ pindala. Seega ei saa KLM olla vähima pindalaga.

Olgu R kolmnurga ABC ümberringjoone raadius. Et kolmnurga $A'B'C'$ küljed on risti vastavalt lõikudega OA, OB ja OC (joonis 13) ning poolitavad neid, siis on O kolmnurga $A'B'C'$ siseringjoone keskpunkt ning selle kolmnurga siseringjoone raadius on $\frac{R}{2}$. Võrdkülgne kolmnurk ümberringjoone raadiusega R ja võrdkülgne kolmnurk siseringjoone raadiusega $\frac{R}{2}$ on võrdse pindalaga S, sest võrdkülgse kolmnurga mediaanide lõikepunkt jaotab iga mediaani nii, et tipu poole ja külje poole jääva osa pikkused suhtuvad nagu $2:1$. Eelneva põhjal seega $S_{ABC} \leqslant S \leqslant S_{A'B'C'}$.

Lahendus 2. Olgu R kolmnurga ABC ümberringjoone raadius ning α, β ja γ kolmnurga nurgad tippude järjekorras. Siis $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle COA = 2\beta$ ja $\angle AOB = 2\gamma$. Seetõttu

$$S_{ABC} = S_{BOC} + S_{COA} + S_{AOB} = \frac{R^2}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

Et kolmnurk BOC on võrdhaarne, siis on külje BC keskristsirge OA' tema nurgapoolitaja, seetõttu $\angle BOA' = \angle COA' = \alpha$. Samamoodi $\angle COB' = \angle AOB' = \beta$ ja $\angle AOC' = \angle BOC' = \gamma$. Vaatleme kolmnurka $B'OC'$. Küljele $B'C'$ tõmmatud kõrgus on $\frac{R}{2}$, järelikult $|B'C'| = \frac{R}{2}(\tan\beta + \tan\gamma)$ ning



Joonis 13

selle kolmnurga pindala on $S_{B'OC'} = \dfrac{R^2}{8}(\tan\beta + \tan\gamma)$. Analoogiliselt leiame $S_{C'OA'} = \dfrac{R^2}{8}(\tan\gamma + \tan\alpha)$ ja $S_{A'OB'} = \dfrac{R^2}{8}(\tan\alpha + \tan\beta)$. Seega

$$S_{A'B'C'} = S_{B'OC'} + S_{C'OA'} + S_{A'OC'} = \frac{R^2}{4}(\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma).$$

Funktsioon $f(x) = \tan x - 2\sin 2x$ on lõigul $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ nõgus, sest tema teine tuletis

$$f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + 8\sin 2x$$

on sellel lõigul mittenegatiivne. Jenseni võrratuse põhjal

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) \geqslant 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = 3\left(\tan\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 0,$$

millest $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma \geqslant 2\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta + 2\sin 2\gamma$. Viimase võrduse abil saamegi $S_{A'B'C'} \geqslant S_{ABC}$.

Lahendus 3. Kolmnurga ABC pindala on

$$S_{ABC} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

nagu nähtub kolmnurga pindala valemist $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, kui avaldada seal a ja b siinusteoreemist. Kolmnurga $A'B'C'$ pindala on analoogiliselt eelmise lahendusega

$$S_{A'B'C'} = \frac{R^2}{4}(\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma) = \frac{R^2}{4}\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma,$$

sest kui $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, siis $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$. Seega kolmnurkade pindalade suhe on

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Funktsioon $f(x) = \cos x$ on lõigul $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ kumer, mistõttu aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse ning Jenseni võrratuse abil

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} \leqslant 8\left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\right)^3 \leqslant 8\left(\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 = 8\cos^3\frac{\pi}{3} = 1.$$

5. Et igal konstruktsioonisammul kummaski keeles sõna pikkus kahekordistub, siis esinevad kummaski keeles ainult sõnad pikkustega kujul 2^n, need on parajasti sõnad, mis on saadud n sammuga.

Tõestame, et täpselt n konstruktsioonisammuga saadavaid sõnu on kummaski keeles 2^n. Tõepoolest, 0 sammuga on võimalik kummaski keeles saada ainult üks sõna A. Iga k-sammuline sõna annab kaks erinevat $(k+1)$-sammulist sõna ning kaks erinevat k-sammulist sõna annavad ka erinevad $(k+1)$-sammulised sõnad, sest esialgne sõna moodustab tuletatud sõna osa. Järelikult on $k+1$ sammuga saadud sõnu parajasti kaks korda rohkem kui k sammuga saadud sõnu. Ülesande lahendamiseks piisab seega tõestada, et iga ababi keele sõna kuulub ululu keelde.

Kui ababi sõna on saadud 0 sammuga, siis ta ilmselt kuulub ululu keelde. Eeldame, et väide kehtib kõigi ababi keeles k sammuga saadud sõnade korral ja vaatleme mingit $k+1$ sammuga saadud sõna t. Siis ababi keele mingi sõna s korral $t = s \oplus s$ või $t = s \oplus \bar{s}$. Eelduse põhjal leidub k-liikmeline operatsioonide järjend ululu keele reeglite järgi (igal sammul moodustada kas sõna kujul $a \otimes a$ või $a \otimes \bar{a}$), millega sõnast A saab konstrueerida sõna s.

- Kui sõna t saadakse ababi keeles reegliga $t = s \oplus s$, siis rakendame ululu keeles eelnimetatud operatsioonide järjendit sõnale AA. Lihtne on näha, et pärast iga sammu tekkiv sõna on kujul $a \oplus a$, kus a on parajasti sõna s konstrueerimisprotsessi vahetulemus pärast samu operatsioone, sest ululu keeles on iga operatsiooni mõju kahest võrdsest poolest koosneva sõna esimesele ja teisele poolele sama.
- Kui sõna t saadakse ababi keeles reegliga $t = s \oplus \bar{s}$, siis rakendame ululu keeles seda operatsioonide järjendit sõnale AB. Sellisel juhul saame pärast iga sammu sõna kujul $a \oplus \bar{a}$, kus a on sõna s konstrueerimisprotsessi vastav vahetulemus, sest kui sõna üks pool on teise „peegelpilt“, siis pärast ululu keele operatsiooni rakendamist saame jälle sama omadusega sõna.

Seega kummalgi juhul kuulub t ululu keelde.

Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

1. aprill 2006 Lõppvoor **Hindamisskeemid**

9. klass

1. *(Kaie Kubjas)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täislahendus: 7 p
- Õige vastus ja tähelepanek, et $a'b' + 1 = da'b'$ (vaata lahendust 3): 3 p
- Õige vastus ja tähelepanek $\text{SÜT}(a, b) \cdot \text{VÜK}(a, b) = \text{SÜT}(a, b) + \text{VÜK}(a, b)$: 2 p
- Ainult õige vastus: 1 p
- Ebatäpsuste eest võtsime maha 1 või 2 punkti olenevalt vea suurusest.

2. *(Jekaterina Prostakova ja Anton Stalnuhhin)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täielik lahendus: 7 p
- Õige lahendus, aga selgitused pole piisavad: 6 p
- Õige idee ja õige joonis, aga selgitused puuduvad: 4 p
- Õige idee, aga selgitused puuduvad: 3 p

3. *(Hannes Jukk)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

Lahendus 1.

- Lahenduses on põhjendamata, miks väitevastase eelduse kohaselt (leidub „suurim“ arv) suurim arv on suurem kui ülejäänud arvude aritmeetiline keskmine: 5 p
- Täielik lahendus: 7 p

Lahendus 2

- Põhjendatakse erijuhtum (nt $n = 2$): 1 p
- Põhjendab, et mingid kaks arvu on võrdsed (nt $a_1 = a_2$), kuid jätab sel kohal lahenduse pooleli: 5 p
- Täielik lahendus: 7 p

4. *(Jan Willemson)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täielik lahendus: 7 p
- Lahendus, milles on kasutatud tõestamata väidet, et $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, väidet, et $\triangle ACD$ on võrdhaarne või midagi samaväärset: 1 p

- Näidatud, et $\triangle CDE$ on võrdhaarne: 1 p
- Leitud $\triangle ABC$ nurgad: 0 p

5. *(Kati Smotrova)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et nõutud omadustega laevastikus saab olla 16 ruutu: 3 p
- Näidatud, et nõutud omadustega laevastikus ei saa olla vähem kui 16 ruutu: 4 p

  Sealhulgas:

  - näidatud, et ühe „riba“ jaoks on vaja vähemalt 4 laeva: *1 p*

Kui õpilane luges ülesandest välja, et laev peab koosnema vähemalt kahest ruudust, ja leidis selle jaoks õige näite, sai ta esimeses osa eest 2 p.

10. klass

1. *(Mati Abel)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täielik lahendus: 7 p

2. *(Aleksei Lissitsin)* Lahenduse a)-osa ja b)-osa eest antud punktid summeeriti.

- osas a) näite toomine: 1 p
- osa b) eest anti punkte järgmiselt:
  - Tähelepanek, et paaritu arvu x korral arv $x^2 - 1$ jagub neljaga: *1 p*
  - Näidatud ainult, et arvude a, b ja c seas leidub paarisarv: *3 p*
  - Näidatud ainult, et kolmik, kus kõik arvud annavad neljaga jagamisel jäägi 2, ei sobi, ehk ekvivalentselt, kui $ab + 1$ on paaritu ruut, siis üks arvudest a või b jagub neljaga: *4 p*
  - Korralik lahendus: *6 p*

3. *(Elts Abel)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Õige joonis: 1 p
- Leitud mõned õiged seosed nurkade vahel, kuid ei selgu, kuidas siit jõutakse eesmärgini: 2 p
- Jõutud ühe sammu kaugusele lõppeesmärgist: 2 p
- Tõestus viidud lõpule: 2 p

Kui oli ainult tõestatud tulemus mingil erijuhul (mis taandub võrdkülgse kolmnurga juhule), anti 2 punkti.

4. *(Uve Nummert)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täielik lahendus: 7 p
- Täielik lahendus, kuid vastuses on lisatud arvud -2, -3, -4, -5, -7: 6 p
- Lahendades 6 võrrandit, võttes $\left[\frac{n}{2}\right]$ väärtuseks $\frac{n}{2}$ ja $\frac{n-1}{2}$ ning $\left[\frac{2n}{3}\right]$ väärtuseks $\frac{2n}{3}$, $\frac{2n-1}{3}$ ja $\frac{2n-2}{3}$, on saadud õige vastus, kuid seda ei ole kontrollitud ega näidatud, et saadud lahendid rahuldavad vastava võrrandi aluseks olnud tingimusi: 6 p
- Muidu õige lahendus, kuid negatiivse arvu täisosa tõlgendatakse valesti või on põhjendamata, miks $x \geqslant 0$: 5 p
- Piirkond, kust lahendeid otsitakse, on leitud sisuliselt proovimise teel; vastus on õige või mõni lahend puudu: 3 p
- Piirkond, kust lahendeid otsitakse, on leitud sisuliselt proovimise teel; vastus on poolik või sisaldab ka negatiivseid arve: 2 p
- On üritatud võrrandit analüüsida, kuid tehtud seda vigaselt; vastus vale: 1 p

Paljud lahendajad olid täisosa definitsiooni negatiivsete arvude korral tõlgendanud valesti (ülemise täisosana), kuigi see definitsioon oli ülesande tekstis kirjas.

5. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näitamine, et kirjeldatud omadusega arv ei saa olla suurem kui 25: 3 p

  Sealhulgas:
  - idee näidata, et $n > 25$ ühest ruudust koosneva laeva paigutamine on võimatu: *1 p*
- Näitamine, et 25 on kirjeldatud omadusega: 4 p

  Sealhulgas:
  - konstruktsioon 25 ühest ruudust koosneva laevaga: *1 p*

Rohkem kui pooled jõudsid õige vastuseni. Paraku sai ka enamik õige vastuse esitanutest punkte vähe, sest põhjendused olid liiga ebamäärased.

Näiteks ei saanud arvu 25 sobivuse osas punkte põhjenduste eest, mis rõhusid vaid suuremate laevade paigutamise suuremale mugavusele selle tõttu, et neid saab panna kompaktsemalt kui väikseid ja jätavad seetõttu rohkem ruumi vabaks. Niisugune arutlus pole veenev. Näiteks tekib küsimus, kas vaba ruum ei või jaotuda ruudustikul nii halvasti, et tema olemasolust hoolimata pole võimalik vajaliku suurusega laevu paigutada.

Selleks, et näidata, et $n > 25$ ühest ruudust koosneva laeva paigutamine on võimatu, ei piisa nägemisest, et kui 25 ühest ruudust koosnevat laeva on

mingil konkreetsel viisil juba paigutatud, siis sinna pole enam ühtki laeva võimalik lisada. Jääb küsimus, kas mingi teise paigutuse korral ehk oleks see siiski võimalik.

Kahjuks terve rida võistlejaid oli teksti ühel või teisel viisil valesti mõistnud. Üks üsna levinud väärtõlgendus oli, et arvati, et küsitakse suurimat naturaalarvu n, mille jaoks leidub selline laevastik, et n iga esituse korral positiivsete täisarvude summana sisaldab see laevastik iga liidetava jaoks laeva, mille suurus on see liidetav. Niimoodi mõistnud said vastuseks 7 või 9.

Mitu võistlejat olid ka eeldanud, et liidetavate arv peab olema täpselt 2.

11. klass

1. *(Indrek Zolk)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leidmine, milliste x väärtuste korral on avaldise $\sin\cos x$ väärtus maksimaalne: 3 p
- Leidmine, milliste x väärtuste korral on avaldise $\cos\sin x$ väärtus maksimaalne: 2 p
- Lahenduse lõpuleviimine: 2 p

Mitmel lahendajal oli leitud antud avaldise üks või mitu maksimumkohta, ent polnud põhjendatud, miks on leitud kõik maksimumkohad.

2. *(Juhan Aru)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $\dfrac{m+n+p}{m+p-n}$ või $\dfrac{(m+n+p)^2}{2mp}$ peab olema täisarv: 2 p
- Pythagorase teoreemist järeldatud, et $m+n=p^2$ ja $n-m=1$: 2 p
- Näidatud, et $p-1 \mid 2$: 2 p
- Näidatud, et $p \neq 2$: 1 p

Vahel harva sai punkte antud ka mõne äärmiselt huvitava tähelepaneku eest.

3. *(Martin Pettai)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Mainitud, et iga $n \geq 6$ korral $F_n > n$ või et iga $n \geq 8$ korral $F_n > 2n$: 1 p
- Tõestatud, et iga $n \geq 6$ korral $F_n > n$: 1 p
- Tõestatud, et iga $n \geq 8$ korral $F_n > 2n$: 1 p
- Eeldusel, et iga $n \geq 6$ korral $F_n > n$, näidatud, et $m \geq 6$ ja $n \geq 6$ korral lahendeid ei leidu: 1 p

- Eeldusel, et iga $n \geq 8$ korral $F_n > 2n$, näidatud, et $m < 8$ ja $n \geq 8$ korral lahendeid ei leidu: 1 p
- Leitud igast sümmeetriliste lahendite paarist $((x, y), (y, x))$ vähemalt üks lahend: 1 p
- Leitud kõik lahendid: 1 p

4. *(Oleg Petšonkin)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Kui ilma tõestuseta eeldatud, et kolmurgad ABC ja ADE on sarnased sarnasusteguriga 2, aga edasine tõestus on täielik: 2 p
- Kui ilma tõestuseta eeldatud, et $MB \parallel A'C$ ja $MC \parallel A'B$, aga edasine tõestus on täielik: 3 p
- Täislahendus: 7 p

5. *(Konstantin Tretjakov)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Ainsa lahendusena leitud $n = 2$: 0 p
- Näidatud ainult, kuidas on võimalik ruutu läbida juhul, kui n on paaris: 3 p
- Täislahendus: 7 p

12. klass

1. *(Meelis Kull)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Laevade kategooriatesse jagamine: 3 p
- Tõestus, et kõigis kategooriates peale ühe on paarisarv laevu: 2 p
- Tõestus, et kui viimases kategoorias on paaritu arv laevu, siis n jagub 4-ga: 2 p

2. *(Mart Abel)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Lahendus 1.

- Funktsiooni $h(x) := 2^x - x$ miinimumkoha leidmine: 2 p
- Funktsiooni h miinimumväärtuse $h_{\min}$ leidmine: 2 p
- Tähelepanek (koos põhjendustega), et otsitav suurus on $\frac{h_{\min}}{\sqrt{2}}$: 2 p
- Vastus: 1 p

Lahendus 2.

- Tähelepanek (põhjendusega), et punktis Q peab funktsiooni $y = 2^x$ puutuja olema paralleelne sirgega $y = x$: 2 p
- Punkti Q koordinaatide leidmine: 1 p

- Tähelepanek, et PQ on risti sirgega $y = x$: 1 p
- Punkti P koordinaatide leidmine: 1 p
- Punktide P ja Q vahelise kauguse leidmine: 2 p

3. *(Oleg Košik)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- osa a): 4 p
- osa b): 3 p

Kui b)-osas esinesid võrratustes pisivead, siis võeti selle osa eest 1 punkt maha.

4. *(Hendrik Nigul)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Kolmnurga ABC pindala avaldamine R, α, β, γ kaudu: 2 p
- Kolmnurga $A'B'C'$ pindala avaldamine R, α, β, γ kaudu: 2 p
- Saadud avaldiste omavaheline võrdlemine: 3 p

5. *(Reimo Palm)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Leitud ainult mõned konkreetsed sõnad kummaski keeles väiksema sammude arvu korral: 0 p
- Tehtud mitu kasulikku esialgset järeldust, mis ei puuduta ühe keele sõnade kuulumist teise keelde, näiteks et pikkusega 2^n sõnu on 2^n või kummaski klassis ühepalju: 1 p
- Püütakse tõestada sisalduvust ainult ühes suunas, tõestuse ideed saab lihtsasti laiendada erijuhult üldjuhule: 3 p
- Täielik lahendus: 7 p

Mittepiisavate põhjenduste eest võis 1–2 punkti kaotada.