Piirkonnavoor 2022

Ülesanded **1**
- 7. klass 1
- 8. klass 3
- 9. klass 5
- 7. klass 7
- 8. klass 8
- 9. klass 9
- 10. klass 10
- 11. klass 11
- 12. klass 12

Ülesanded vene keeles **13**
- 7 класс 13
- 8 класс 15
- 9 класс 17
- 7 класс 19
- 8 класс 20
- 9 класс 21
- 10 класс 22
- 11 класс 23
- 12 класс 24

Ülesanded inglise keeles **25**
- Grade 12 25

Lahendused **26**
- 7. klass 26
- 8. klass 28
- 9. klass 30
- 7. klass 33
- 8. klass 35
- 9. klass 38
- 10. klass 41
- 11. klass 46
- 12. klass 52

Põhikooli hindamisjuhised **57**
- Üldjuhend 57
- 7. klass 59
- 8. klass 60
- 9. klass 61
- 7. klass 62
- 8. klass 64
- 9. klass 66

Gümnaasiumi hindamisskeemid **68**
- 10. klass 68
- 11. klass 73
- 12. klass 78

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Elts Abel
Kaarel Hänni
Maksim Ivanov
Urve Kangro
Joonas Jürgen Kisel
Oleg Košik
Härmel Nestra
Markus Rene Pae
Erik Paemurru
Kaur Aare Saar
Hendrik Vija
Raili Vilt

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kell on 20.45. Kui palju on kell täpselt 20 tundi ja 22 minutit hiljem?

. . . . . .

2. Leia number A, mille korral kehtib võrdus

$$(\overline{AA} + \overline{AA} + 1) \cdot A = \overline{AAA},$$

kus $\overline{AA}$ on kahekohaline ja $\overline{AAA}$ kolmekohaline naturaalarv.

. . . . . .

3. Leia vähim positiivne täisarv, millega arv 20222022 ei jagu.

. . . . . .

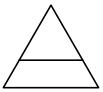
4. Korvis on 15 tomatit rohkem kui kotis. Mitu tomatit tuleb korvist tõsta kotti, et kotis oleks 7 tomatit rohkem kui korvis?

. . . . . .

5. Nelja erineva positiivse täisarvu a, b, c ja d kohta on teada, et $c + b = 4$, $a + d = 7$ ja $b + d = 6$. Leia arv a.

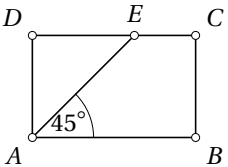
. . . . . .

6. Võrdkülgne kolmnurk ümbermõõduga 27 cm on jaotatud võrdkülgseks kolmnurgaks ja nelinurgaks. Nii saadud väiksema kolmnurga ümbermõõt on 18 cm. Leia saadud nelinurga ümbermõõt.



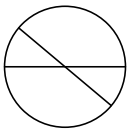
. . . . . .

7. Ristküliku $ABCD$ küljel CD asub punkt E, mille korral $\angle EAB = 45^\circ$ ja $|EC| = 3$ cm. Lisaks on teada, et $|BC| = 4$ cm. Leia ristküliku $ABCD$ pindala.



. . . . . .

8. Ringi on tõmmatud kaks diameetrit, mille vaheline nurk on 40°. Leia vähim arv, mitu diameetrit tuleb lisaks tõmmata, et kõik diameetrid jaotaks ringi võrdseteks sektoriteks.



. . . . . .

9. Tuleb valida üks õun, üks pirn ja üks paprika. Iga vili saab olla kas punane, kollane või roheline. Valitud viljade seas:

1) peab olema vähemalt üks kollane;
2) ei tohi olla punast paprikat, kollast õuna, rohelist õuna ega rohelist pirni.

Mitu erinevat võimalust on viljade valikuks? Kaks valikut on erinevad kui need erinevad vähemalt ühe vilja värvi poolest.

. . . . . .

10. Kolm ühesuurust kuubikut on kleebitud tahkupidi kokku ja saadud joonisel olev keha. Mitme võrra on selle keha servade arv suurem tahkude arvust?

. . . . . .

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Arvuta:

$$\frac{202{,}2}{2{,}021} \cdot \frac{202{,}1}{20{,}22} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Leia numbrite A ja B summa, kui kehtib võrdus $\overline{AAAA} = \overline{AA} \cdot \overline{ABA}$, kus $\overline{AA}$ on kahekohaline, $\overline{ABA}$ kolmekohaline ja $\overline{AAAA}$ neljakohaline naturaalarv.

. . . . . .

3. Leia vähim algarv, mis ei saa ühegi numbri X korral olla viiekohalise arvu $\overline{20X22}$ teguriks.

. . . . . .

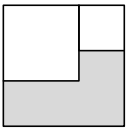
4. On teada, et 250 milliliitrit mannat kaalub 0,2 kilogrammi. Mitu grammi kaalub 0,4 liitrit mannat?

. . . . . .

5. On antud kaks positiivset arvu a ja b. Arv a moodustab 60% arvust b. Kui lahutada suuremast arvust väiksem, saame tulemuseks arvu, mis on 60 võrra väiksem arvust a. Leia arv a.

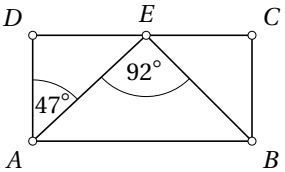
. . . . . .

6. Joonisel on suur ruut jaotatud kaheks ruuduks ümbermõõtudega 20 cm ja 12 cm ning tumedamaks värvitud kujundiks. Leia tumedamaks värvitud kujundi ümbermõõt.



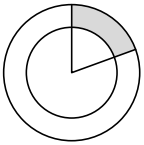
. . . . . .

7. Ristküliku $ABCD$ küljel CD asub punkt E, mille korral $\angle EAD = 47^\circ$ ja $\angle AEB = 92^\circ$. Lisaks on teada, et $|AD| = 7$ cm. Leia kolmnurga BCE pindala.



. . . . . .

8. On kaks ühise keskpunktiga ringjoont raadiustega 3 cm ja 2 cm. Sektori tumedamaks värvitud osa pindala on π cm^2. Leia selle sektori nurga suurus.



. . . . . .

9. Kui palju on kolmekohalisi arve, mis jaguvad arvuga 4 ja mille viimane number on samuti 4?

. . . . . .

10. Neli ühesuurust kuubikut kleebitakse tahkupidi kokku, nii et kokkukleebitavad tahud kattuvad tervenisti. Joonisel on saadava keha pealtvaade. Leia selle keha tahkude arv.

. . . . . .

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia arv x võrdusest $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{x}{6} = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{6}$.

. . . . . .

2. Leia numbrite A ja B summa, kui kehtib võrdus $\overline{BA} \cdot B \cdot A = \overline{AAA}$, kus $\overline{BA}$ on kahekohaline ja $\overline{AAA}$ kolmekohaline naturaalarv.

. . . . . .

3. Kui palju on selliseid kahekohalisi naturaalarve, mille kõik arvust 1 suuremad tegurid on paarisarvud?

. . . . . .

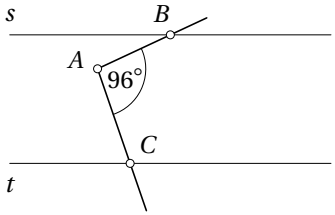
4. Kooli spordipäeval osalejatest moodustasid poisid 52%, tüdrukuid aga oli 6 võrra vähem kui poisse. Kui palju oli sellel spordipäeval osalejaid kokku?

. . . . . .

5. Positiivsete arvude a ja b korrutis ab on jagatisest $\frac{a}{b}$ neli korda suurem ja jagatisest $\frac{b}{a}$ neli korda väiksem. Leia arvude a ja b summa.

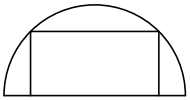
. . . . . .

6. Punktid B ja C asuvad vastavalt paralleelsetel sirgetel s ja t. Nurga BAC suurus on 96°. Leia sirge AC ja sirge t vahelise teravnurga suurus, kui on teada, et see on kolm korda suurem sirge AB ja sirge s vahelise teravnurga suurusest.



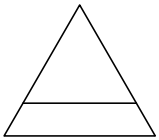
. . . . . .

7. Poolringi raadiusega 6 cm on kujundatud ristkülik, mille pikem külg asub diameetril ja kaks tippu asuvad poolringjoonel. Ristküliku üks külg on teisest kaks korda pikem. Leia ristküliku pindala.



. . . . . .

8. Võrdkülgne kolmnurk on jaotatud võrdkülgseks kolmnurgaks ja nelinurgaks nii, et need mõlemad on ümbermõõduga 15 cm. Leia suure kolmnurga ümbermõõt.



. . . . . .

9. Mitmel erineval viisil saab lisada täpselt kaks koma avaldises $\frac{2022}{2021} \cdot \frac{2021}{2022}$ olevate arvude numbrite vahele nii, et avaldise väärtus oleks võrdne arvuga 100?

. . . . . .

10. Viis ühesuurust kuubikut kleebitakse tahkupidi kokku, nii et kokkukleebitavad tahud kattuvad tervenisti. Joonisel on saadava keha pealtvaade. Mitme võrra on selle keha tippude arv suurem tahkude arvust?

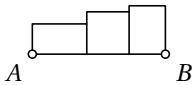
. . . . . .

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

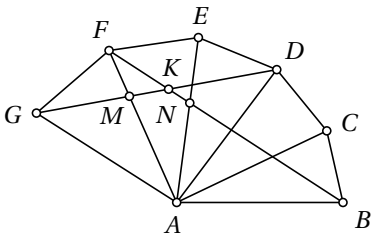
2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Lõigule AB pikkusega 22 cm on asetatud kolm võrdse ümbermõõduga ristkülikut, millest vaid keskmine on ruut. Lõigul AB asuva vasakpoolse ristküliku külg on ruudu küljest 2 cm võrra pikem. Samal lõigul asuv parempoolse ristküliku külg on aga ruudu küljest 1 cm võrra lühem. Leia kolmest ristkülikust tekkinud kujundi ümbermõõt.



2. Võrdhaarsete kolmnurkade ABC, ACD, ADE, AEF ja AFG tipunurkade suurused ühise tipu A juures on vastavalt 24°, 26°, 28°, 30° ja 32°. Olgu M lõikude FA ja GD lõikepunkt, K lõikude FB ja GD lõikepunkt ning N lõikude FB ja EA lõikepunkt. Leia nurkade AMK, MKN ja KNA suurused.



3. 2022-kohaline arv algab numbriga 2, järgmine number on 7. Alates kolmandast numbrist on iga number selles arvus võrdne kahe eelmise numbri korrutise üheliste numbriga.

a) Mitu korda esineb selles arvus number 8?

b) Jüri liitis selle arvu mingist numbrist alates mingi hulga järjestikuseid numbreid ja sai summaks 777. Leia kõik võimalused, mitu numbrit võis Jüri liita.

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **8. klass**

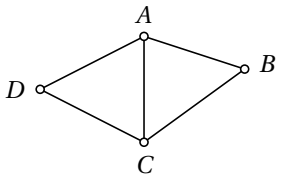
II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Emal on kaks last. Praegu on ema vanus aastates kahekohaline arv, mille esimene number on tema ühe lapse vanus aastates ning mille numbrite summa on võrdne teise lapse vanusega aastates. Ema ja laste vanuste summa on 40 ning ema vanus jagub laste vanuste summaga.

a) Leia laste vanused.

b) Seitsme aasta pärast on vanaisa vanus võrdne ema ja kahe lapse vanuste summaga. Kui vana on vanaisa praegu?

2. Nelinurga $ABCD$ kohta on teada, et $|AB| = |AC|$ ja $|DA| = |DC|$ ning $\angle ABC = \angle CDA$. Selle nelinurga üks nurkadest on suurusega 150°. Leia nelinurga $ABCD$ kolme ülejäänud nurga suurused.



3. Tabel täidetakse arvust 20 väiksemate positiivsete täisarvudega nii, et igas lahtris oleks erinev arv. Seejuures peavad olema ridades olevate arvude summad võrdsed ning ka veergudes olevate arvude summad võrdsed. Mõned arvud on juba tabelisse kirjutatud.

	10		12		
8					
16		11	13	14	

a) Leia kahes vasakpoolses veerus puuduvate arvude summa.

b) Leia üks võimalus täita tabeli kõik tühjad lahtrid.

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia kolm vähimat naturaalarvu, millest 1 võrra väiksemad arvud jaguvad 5-ga, 1 võrra suuremad arvud jaguvad 3-ga ja mis ise jaguvad 4-ga.

2. Kas on võimalik asendada tehtes

$$\begin{array}{r} J\ U\ M\ A\ L \\ +\ K\ U\ R\ A\ T \\ \hline E\ E\ T\ E\ R \end{array}$$

tähed numbritega nii, et tekiks korrektne liitmine? Sama täht tuleb asendada kõikjal sama numbriga, erinevad tähed erinevate numbritega.

3. Kumera nelinurga $ABCD$ küljel AB valitakse punkt K nii, et $|BK| = 2 \cdot |AK|$, küljel CD aga valitakse punkt L nii, et $|CL| = 3 \cdot |DL|$. Nelinurga $ABCD$ pindala on 2022 cm^2, nelinurga $AKCL$ pindala aga 974 cm^2. Leia kolmnurga BCK pindala.

4. Kui palju on 8-kohalisi arve, mis on nii palindroomid kui ka poolpöördambigrammid, kui numbreid kujutatakse elektrooniliste kellade ekraanidelt tuttavas 7-segmendilises vormis, nagu joonisel näidatud?

Märkus. Palindroomiks nimetatakse arvu, mille numbrite järjestuse ümberpööramisel saame sama arvu. *Poolpöördambigramm* on arv, mis jääb samaks 180 kraadi pööramisel. Näiteks kuupäev 2. detsember 2021 formaadis YYYYMMDD on 20211202, mis on ühekorraga palindroom ja poolpöördambigramm. Kuupäev 2. juuni 2060 samas formaadis on aga küll palindroom, kuid mitte poolpöördambigramm, sest 180 kraadi pööramisel saame teise kuupäeva 9. september 2090.

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kas arv $\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{4+4+4+4}}}}$ on suurem, väiksem või niisama suur kui arv $\sqrt[4+4+4+4]{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}}}$?

2. Kooli spordipäeval läbib Juku esimese poole jooksudistantsist ühtlase kiirusega $16{,}2\frac{\text{km}}{\text{h}}$, teise poole jooksuajast aga ühtlase kiirusega $12{,}8\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Vahepealse aja jookseb ta ühtlase kiirusega v, mis on ühtlasi tema keskmine kiirus kogu jooksu vältel. Leia v.

3. Jüri tahab teha järgmist trikki. Ta palub Maril mõelda ühe neljakohalise naturaalarvu. Seejärel palub ta Maril liita sellele arvule oma vanuse ja tulemusele veelkord oma vanuse. Nüüd palub ta Maril algul mõeldud arvu korrutada esimese liitmise tulemusega ning saadud korrutise teise liitmise tulemusega jagada. Enne tegevuse algust on aga Jüri kirjutanud paberile arvu, mis osutub võrdseks jagamisel tekkiva jäägiga. Leia Mari suurim vanus, mille puhul Jüri saab seda trikki edukalt teha sõltumata Mari mõeldud arvust. (Eeldame, et Jüri teab Mari vanust ja Mari sooritab kõik tehted õigesti.)

4. Leia kõik sellised naturaalarvude paarid, et kui esimesele arvule liita teise arvu numbrite summa, siis on tulemuseks 1000, ja kui teisele arvule liita kahekordne esimese arvu numbrite summa, siis on tulemuseks samuti 1000.

5. Olgu $ABCD$ rööpkülik. Olgu A' punkti A peegeldus punkti C suhtes. Olgu X sirgete $A'B$ ja CD lõikepunkt. Leia suhe $\frac{|XD|}{|XC|}$.

6. Art, Ben, Carmen ja Deivi tegid kokku 62 Messengeri postitust, kusjuures keegi ei teinud kahte postitust järjest. Art ja Carmen tegid kokku 2 postitust enam kui Ben, kellel oli 2 korda rohkem postitusi kui Deivil. On teada, et Ben ei kirjutanud kordagi kohe pärast Carmenit, kes omakorda ei teinud ühtki postitust kohe pärast Arti. Iga Deivi postitus järgnes vahetult Beni postitusele, igale Deivi postitusele aga järgnes omakorda vahetult Beni postitus. Kes neist neljast tegi viimase postituse?

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Positiivsed reaalarvud a, b, c ja d rahuldavad võrdusi $a - d = b$, $b \cdot a = c$, $c + b = d$ ja $d : c = a$. Leia $a + b + c + d$.

2. Urnis on n palli ($n \geqslant 3$), mis on nummerdatud täisarvudega $1, 2, \ldots, n$. Võimaluste arv võtta urnist 3 palli nii, et suurima numbriga pall oleks võetud pallide seas, on täpselt 3 korda väiksem võimaluste arvust võtta urnist 3 palli nii, et suurima numbriga palli poleks võetud pallide seas (pallide võtmise järjekorda ei arvestata). Leia n.

3. Kas leiduvad täisarvud x ja y, mille korral

a) $x^2 - xy + y^2 = 2021$?

b) $x^2 - xy + y^2 = 2022$?

4. Tahvlil on mingi erinevatest numbritest koosnev viiekohaline arv. Juku liidab kokku kõik muud sellest arvust numbrite ümberjärjestamise teel saadavad viiekohalised arvud. Leia algne arv, mille korral saadav summa on suurim võimalik.

5. Ringjoon puutub nelinurga $ABCD$ külgi AB, BC, CD ja DA vastavalt punktides K, L, M ja N. Tõesta, et lõikude AN, BK, CL ja DM pikkused suhtuvad nagu nurkade ANK, BKL, CLM ja DMN tangensid.

6. On antud positiivne täisarv n. Arvteljel on eesel, kes jookseb alati mööda arvtelge konstantse kiirusega $v = 1$ mingis suunas. Ajahetkel $t = 0$ alustab eesel jooksmist arvtelje punktist $x = 0$ arvtelje positiivses suunas. Shrekil on kotis n porgandit, mida ta vabalt valitud aegadel saab ühekaupa asetada arvtelje vabalt valitud punktidesse, kus eesel hetkel ei viibi. Eesel muudab jooksusuunda siis ja ainult siis, kui tema selja taha jääb kokku rohkem porgandeid kui on tema ees. Kui eesel jõuab mõne porgandini, siis ta sööb selle ära. Leia suurim arv, mitu korda saab eesel kirjeldatud protsessi käigus suunda vahetada.

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Ats ja Pets mängisid lumesõda. Pets saatis teele 25 kuuli rohkem kui Ats, vastast tabas aga 2 võrra vähem Petsi kuule kui Atsi omi. Kui aga Atsi oleksid tabanud kõik Petsi kuulid, kõik Atsi enda kuulid ja veel üks kuul, siis oleks Ats pihta saanud 6 korda rohkem kordi kui ta tegelikult sai. Atsi kuulidest tabas Petsi 40%. Mitu protsenti Petsi kuulidest tabas Atsi?

2. Leia kõik nurgad α, mille korral $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ja kehtib võrdus

$$4\cos\alpha = 1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \ldots$$

(võrduse paremal pool on lõpmatu summa).

3. Jukule meeldib väga number 4. Juku kirjutab tahvlile ritta mingi arvu neljasid ja mõnede neljade vahele pluss- või miinusmärke, nii et avaldise väärtuseks oleks mingi positiivse täisarvu neljas aste. Mis on vähim võimalik arv tehtemärke, mida Juku saab kasutada?

4. Leia kõik reaalarvud x, mis rahuldavad võrrandit $3^x + 4^x = 5^x$.

5. Kaks ringjoont raadiustega r_1 ja r_2 puutuvad teineteist välimiselt punktis C ning mingit üht ja sama sirget vastavalt punktides A ja B, kus $A \neq B$.

a) Tõesta, et kolmnurk ABC on täisnurkne.

b) Avalda kolmnurga ABC pindala S raadiuste r_1 ja r_2 kaudu.

6. Olgu $n \geqslant 3$ täisarv. Ütleme, et lõplik hulk n-nurki ruumis (mis ei pea olema korrapärased) on kuubi *kate*, kui kehtivad kõik järgnevad tingimused:

1) iga punkt, mis kuulub mõnele selle hulga n-nurgale, asub kuubi pinnal;
2) iga punkt kuubi pinnal kuulub mingile n-nurgale sellest hulgast;
3) alati, kui mõni punkt kuulub mitmele n-nurgale sellest hulgast, on ta kõigi nende n-nurkade tipp või asub kõigi nende n-nurkade küljel, kuid pole ühegi n-nurga tipp;
4) iga n-nurk selles hulgas on kumer ja asub tervikuna ühel tasandil.

Kas kuubil leidub kate, kui

a) $n = 3$;

b) $n = 5$?

Märkus. Öeldakse, et punkt X *kuulub* n*-nurgale*, kui X on selle n-nurga tipp, asub tema küljel või asub tema sees.

69-я Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2022 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Сейчас время 20.45. Сколько будет времени ровно через 20 часов и 22 минуты?

. . . . . .

2. Найти значение цифры A, при котором действует равенство

$$(\overline{AA} + \overline{AA} + 1) \cdot A = \overline{AAA},$$

где $\overline{AA}$ двузначное и $\overline{AAA}$ трёхзначное натуральное число.

. . . . . .

3. Найти наименьшее положительное целое число, на которое число 20222022 не делится.

. . . . . .

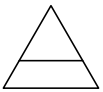
4. В корзине на 15 помидоров больше, чем в мешке. Сколько помидоров нужно из корзины переложить в мешок так, чтобы в мешке оказалось на 7 помидоров больше, чем в корзине?

. . . . . .

5. Про четыре различных положительных целых числа a, b, c и d известно, что $c + b = 4$, $a + d = 7$ и $b + d = 6$. Найти значение числа a.

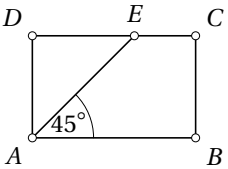
. . . . . .

6. Равносторонний треугольник, периметр которого равен 27 см, поделён на равносторонний треугольник и четырёхугольник. Периметр полученного меньшего треугольника равен 18 см. Найти периметр полученного четырёхугольника.



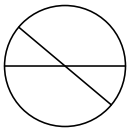
. . . . . .

7. На стороне CD прямоугольника $ABCD$ лежит точка E так, что $\angle EAB = 45^\circ$ и $|EC| = 3$ см. Также известно, что $|BC| = 4$ см. Найти площадь прямоугольника $ABCD$.



. . . . . .

8. В круге проведены два диаметра, угол между которыми равен 40°. Найти наименьшее количество диаметров, которые необходимо дополнительно провести, чтобы все диаметры поделили круг на равные сектора.



. . . . . .

9. Нужно выбрать одно яблоко, одну грушу и один перец. Каждый плод может быть красного, жёлтого или зелёного цвета. Среди выбранных плодов:

1) должен быть хотя бы один жёлтого цвета;
2) не должно быть красного перца, жёлтого яблока, зелёного яблока и зелёной груши.

Сколько всего различных возможностей для выбора плодов? Две возможности считаются различными, если они отличаются цветом хотя бы одного выбранного плода.

. . . . . .

10. Тело на рисунке получили склеиванием некоторых граней трёх одинаковых кубиков. На сколько количество рёбер в полученном теле больше количества граней?

. . . . . .

69-я Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2022 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Вычислить:

$$\frac{202{,}2}{2{,}021} \cdot \frac{202{,}1}{20{,}22} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Найти сумму цифр A и B, если действует равенство $\overline{AAAA} = \overline{AA} \cdot \overline{ABA}$, где $\overline{AA}$ двузначное, $\overline{ABA}$ трёхзначное и $\overline{AAAA}$ четырёхзначное натуральное число.

. . . . . .

3. Найти наименьшее простое число, которое не может оказаться делителем пятизначного числа $\overline{20X22}$ ни при каком значении цифры X.

. . . . . .

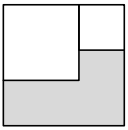
4. Известно, что 250 миллилитров манной крупы весит 0,2 килограмма. Сколько граммов весит 0,4 литра манной крупы?

. . . . . .

5. Даны два положительных числа a и b. Число a составляет 60% от числа b. Если вычесть из большего данного числа меньшее, то в результате получится число, которое на 60 меньше числа a. Найти значение числа a.

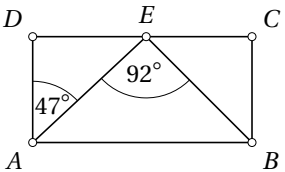
. . . . . .

6. На рисунке большой квадрат поделён на два меньших квадрата, периметры которых равны 20 см и 12 см, а также на закрашенную в тёмный цвет фигуру. Найти периметр закрашенной в тёмный цвет фигуры.



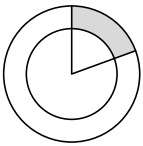
. . . . . .

7. На стороне CD прямоугольника $ABCD$ лежит точка E так, что $\angle EAD = 47^\circ$ и $\angle AEB = 92^\circ$. Также известно, что $|AD| = 7$ см. Найти площадь треугольника BCE.



. . . . . .

8. Две окружности имеют общий центр, а их радиусы равны 3 см и 2 см. Площадь части сектора, которая закрашена в тёмный цвет, равняется π см^2. Найти величину угла этого сектора.



. . . . . .

9. Сколько всего трёхзначных чисел, которые делятся на число 4 и последняя цифра которых также равна 4?

. . . . . .

10. Тело получили склеиванием некоторых граней четырёх одинаковых кубиков так, что склеенные грани целиком совпадают. На рисунке показан вид спереди этого тела. Найти количество граней этого тела.

. . . . . .

69-я Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2022 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти значение числа x из равенства $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{x}{6} = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{6}$.

. . . . . .

2. Найти сумму цифр A и B, если действует равенство $\overline{BA} \cdot B \cdot A = \overline{AAA}$, где $\overline{BA}$ двузначное и $\overline{AAA}$ трёхзначное натуральное число.

. . . . . .

3. Сколько всего таких двузначных натуральных чисел, у которых все множители, большие числа 1, чётные?

. . . . . .

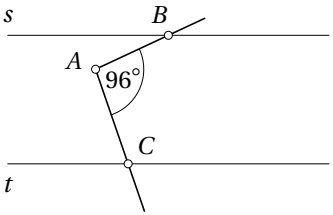
4. Среди всех участников школьного спортивного дня мальчиков было 52%, а девочек было на 6 меньше, чем мальчиков. Сколько всего было участников на этом спортивном дне?

. . . . . .

5. Произведение ab положительных чисел a и b в четыре раза больше частного $\frac{a}{b}$ и в четыре раза меньше частного $\frac{b}{a}$. Найти сумму чисел a и b.

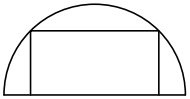
. . . . . .

6. Точки B и C соответственно лежат на параллельных прямых s и t. Величина угла BAC равна 96°. Найти величину острого угла между прямыми AC и t, если известно, что эта величина в три раза больше величины острого угла между прямыми AB и s.



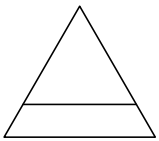
. . . . . .

7. В полукруг, радиус которого равен 6 см, вписан прямоугольник, большая сторона которого лежит на диаметре и две вершины которого лежат на полуокружности. Одна сторона прямоугольника в два раза длиннее другой. Найти площадь прямоугольника.



. . . . . .

8. Равносторонний треугольник поделили на равносторонний треугольник и четырёхугольник так, что периметры обеих меньших фигур были равны 15 см. Найти периметр большего треугольника.



. . . . . .

9. Сколькими различными способами можно добавить ровно две запятые между цифрами чисел, представленных в выражении $\frac{2022}{2021} \cdot \frac{2021}{2022}$, так, чтобы значением выражения оказалось число 100?

. . . . . .

10. Тело получили склеиванием некоторых граней пяти одинаковых кубиков так, что склеенные грани целиком совпадают. На рисунке показан вид спереди этого тела. На сколько количество вершин в полученном теле больше количества граней?

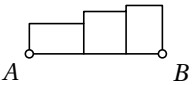
. . . . . .

69-я Олимпиада Эстонии по математике

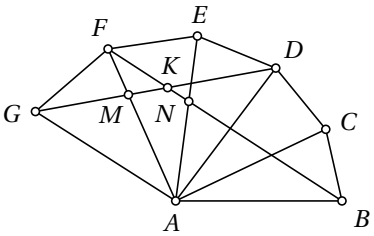
2 февраля 2022 г. Региональный тур **7 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. На отрезке AB длиной 22 см лежат стороны трёх прямоугольников одинакового периметра. Только расположенный посередине прямоугольник является квадратом. Лежащая на отрезке AB сторона прямоугольника, расположенного слева от квадрата, на 2 см длиннее стороны квадрата, а лежащая на том же отрезке сторона прямоугольника, расположенного справа от квадрата, на 1 см короче стороны квадрата. Найти периметр фигуры, состоящей из этих трёх прямоугольников.



2. Величины углов при вершинах равнобедренных треугольников ABC, ACD, ADE, AEF и AFG, которые расположены около их общей вершины A, соответственно равны 24°, 26°, 28°, 30° и 32°. Отрезки FA и GD пересекаются в точке M, отрезки FB и GD пересекаются в точке K, а отрезки FB и EA пересекаются в точке N. Найти величины углов AMK, MKN и KNA.



3. Данное 2022-значное число начинается с цифры 2, его следующая цифра 7. Начиная с третьей цифры, каждая цифра этого числа равняется цифре единиц в результате произведения двух предыдущих цифр.

а) Сколько раз в данном числе встречается цифра 8?

б) Начиная с некоторой цифры данного числа, Юра сложил какое-то количество последовательных цифр этого числа и получил в сумме 777. Сколько цифр данного числа Юра мог сложить? Найти все возможности.

69-я Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2022 г. Региональный тур **8 класс**

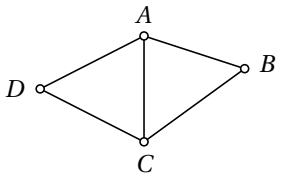
II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. У мамы двое детей. Сейчас возраст мамы в полных годах равен двузначному числу, первая цифра которого равняется возрасту в полных годах одного её ребёнка, а сумма цифр которого равняется возрасту в полных годах второго её ребёнка. Сумма возрастов мамы и её детей равняется 40 годам, причём возраст мамы делится на сумму возрастов её детей.

а) Найти возраст каждого из её детей.

б) Через семь лет возраст дедушки будет равен сумме возрастов мамы и двух её детей. Сколько лет дедушке сейчас?

2. Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $|AB| = |AC|$, $|DA| = |DC|$ и $\angle ABC = \angle CDA$. Величина одного из углов этого четырёхугольника равна 150°. Найти величины трёх других углов четырёхугольника $ABCD$.



3. В каждую ячейку таблицы необходимо записать одно положительное целое число, которое меньше числа 20, так, чтобы во всех ячейках были записаны различные числа. При этом сумма чисел в каждом ряду таблицы должна быть одинаковой, и сумма чисел в каждом столбце таблицы должна быть одинаковой. Некоторые числа уже вписаны в ячейки таблицы.

	10		12		
8					
16		11	13	14	

а) Найти сумму чисел, отсутствующих в двух крайних слева столбцах этой таблицы.

б) Найти одну возможность для заполнения числами всех пустых ячеек таблицы.

69-я Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2022 г. Региональный тур **9 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти три наименьших натуральных числа, имеющих следующее свойство: числа, которые на 1 меньше них, делятся на число 5, числа, которые на 1 больше них, делятся на число 3, а сами числа делятся на число 4.

2. Возможно ли в действии

$$\begin{array}{r} J\,U\,M\,A\,L \\ +\,K\,U\,R\,A\,T \\ \hline E\,E\,T\,E\,R \end{array}$$

заменить буквы цифрами так, чтобы получилось верное действие сложения? Одинаковые буквы необходимо везде заменить одинаковыми цифрами, а разные буквы — разными цифрами.

3. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбирают точку K так, что $|BK| = 2 \cdot |AK|$, а на стороне CD выбирают точку L так, что $|CL| = 3 \cdot |DL|$. Площадь четырёхугольника $ABCD$ равняется 2022 см^2, а площадь четырёхугольника $AKCL$ равняется 974 см^2. Найти площадь треугольника BCK.

4. Сколько всего таких 8-значных чисел, которые одновременно являются как палиндромами, так и листовертнями, если цифрами этих чисел являются показанные на рисунке цифры, используемые на табло электронных часов и состоящие из семи сегментов?

Замечание. Палиндромом называется число, при записи цифр которого в обратном порядке получается то же самое число. *Листовертнем* называется число, которое не изменяется при его повороте на 180 градусов. Например, дата 2 декабря 2021 года в формате ГГГГММДД имеет вид 20211202 и является как палиндромом, так и листовертнем. Число, соответствующее дате 2 июня 2060 года в том же формате, является палиндромом, но не является листовертнем, так как при повороте этого числа на 180 градусов получается число, соответствующее другой дате — 9 сентября 2090 года.

69-я Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2022 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Определить, число $\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{4+4+4+4}}}}$ больше, меньше или равно числу $\sqrt[4+4+4+4]{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}}$.

2. На школьном спортивном дне Коля пробежал первую половину дистанции с постоянной скоростью 16,2 км/ч, а вторую половину потраченного на забег времени он пробежал с постоянной скоростью 12,8 км/ч. В промежуточное время он бежал с постоянной скоростью v, которая также оказалась его средней скоростью на протяжении всего забега. Найти v.

3. Юра хочет сделать следующий трюк. Он просит Машу задумать одно четырёхзначное натуральное число. Затем он просит Машу прибавить к задуманному числу её возраст, после чего он просит к полученному результату снова прибавить её возраст. Затем он просит Машу изначально задуманное число умножить на результат первого сложения, а затем полученное произведение поделить на результат второго сложения. До выполнения всех описанных действий Юра записывает на листке бумаги число, которое окажется равным остатку, полученному при последнем делении. Найти наибольший возможный возраст Маши, при котором Юра может успешно выполнить этот трюк вне зависимости от задуманного Машей числа. (Предполагаем, что Юра знает возраст Маши, а Маша верно выполняет все необходимые вычисления.)

4. Найти все пары натуральных чисел, имеющие следующее свойство: если к первому числу прибавить сумму цифр второго числа, то в результате получится 1000, а если ко второму числу прибавить двойную сумму цифр первого числа, то в результате снова получится 1000.

5. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Пусть A' — симметричное отражение точки A относительно точки C. Пусть X — точка пересечения прямых $A'B$ и CD. Найти отношение $|XD|/|XC|$.

6. Артём, Боря, Катя и Даша отправили в их общий чат всего 62 сообщения, причём никто из них не отправлял два сообщения подряд. Артём и Катя на двоих отправили на 2 сообщения больше, чем Боря, который отправил в чат в 2 раза больше сообщений, чем Даша. Известно, что Боря ни разу не отправлял сообщение сразу после Кати, которая, в свою очередь, ни разу не отправляла сообщение сразу после Артёма. Каждое своё сообщение Даша отправляла сразу после сообщения Бори, причём после каждого сообщения Даши всегда сразу следовало сообщение Бори. Кто из них отправил в чат последнее сообщение?

69-я Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2022 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Положительные действительные числа a, b, c и d удовлетворяют равенствам $a - d = b$, $b \cdot a = c$, $c + b = d$ и $d : c = a$. Найти $a + b + c + d$.

2. В урне n шаров ($n \geqslant 3$), пронумерованных целыми числами $1, 2, \ldots, n$. Количество возможностей выбрать из урны 3 шара так, что шар с наибольшим номером будет среди выбранных шаров, ровно в 3 раза меньше количества возможностей выбрать из урны 3 шара так, что шара с наибольшим номером не будет среди выбранных шаров (порядок выбора шаров не учитывают). Найти n.

3. Найдутся ли целые числа x и y, при которых

а) $x^2 - xy + y^2 = 2021$?

б) $x^2 - xy + y^2 = 2022$?

4. На доске записано пятизначное число, состоящее из различных цифр. Юра складывает все другие пятизначные числа, которые можно получить перестановкой цифр этого числа. Найти изначальное число, при котором получаемая сумма будет максимальной возможной.

5. Окружность касается сторон AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$ соответственно в точках K, L, M и N. Доказать, что длины отрезков AN, BK, CL и DM относятся как тангенсы углов ANK, BKL, CLM и DMN.

6. Дано положительное целое число n. На числовой прямой находится осёл, который всё время бежит по числовой прямой с постоянной скоростью $v = 1$ в каком-то направлении. В момент времени $t = 0$ осёл начинает бег из точки $x = 0$ в положительном направлении числовой прямой. У Шрека в сумке n морковок, которые он в произвольно выбранные моменты времени может расставлять по одной в произвольно выбираемые точки на числовой прямой, в которых осёл в этот момент не находится. Осёл поменяет направление бега тогда и только тогда, когда за его спиной будет находиться больше морковок, чем впереди него. Когда осёл достигает какой-то морковки, он её съедает. Найти наибольшее число, сколько раз может осёл поменять направление бега по ходу описанного процесса.

69-я Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2022 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Артём и Петя играли в снежки. Петя отправил в сторону соперника на 25 снежков больше, чем Артём, но снежков Пети попало в соперника на 2 меньше, чем Артёма. Если бы в Артёма попали все снежки Пети, все снежки самого Артёма и ещё один снежок, то в Артёма попало бы в 6 раз больше снежков, чем на самом деле его поразило. Из снежков Артёма попали в Петю 40%. Сколько процентов снежков Пети попали в Артёма?

2. Найти все углы α, при которых $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ и выполняется равенство $4\cos\alpha = 1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \ldots$ (с правой стороны равенства находится бесконечная сумма).

3. Лёше очень нравится цифра 4. Лёша записал на доске в ряд какое-то число четвёрок, а между некоторыми из них знаки сложения или вычитания так, что значением выражения оказалась четвёртая степень какого-то положительного целого числа. Каково наименьшее количество знаков действия, которое мог использовать Лёша?

4. Найти все действительные числа x, при которых $3^x + 4^x = 5^x$.

5. Две окружности с радиусами r_1 и r_2 касаются друг друга внешним образом в точке C, а также какой-то одной и той же прямой соответственно в точках A и B, причём $A \neq B$.

а) Доказать, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Выразить площадь S треугольника ABC через радиусы r_1 и r_2.

6. Пусть $n \geqslant 3$ — целое число. Скажем что конечное число n-угольников в пространстве (не обязательно правильных) является *покрытием* куба, если выполняются все следующие условия:

1) каждая точка, которая принадлежит какому-то n-угольнику из этого множества, лежит на поверхности куба;
2) каждая точка на поверхности куба принадлежит какому-то n-угольнику из этого множества;
3) всегда, когда какая-то точка принадлежит нескольким n-угольникам из этого множества, является она либо вершиной всех этих n-угольников, либо лежит на стороне каждого из этих n-угольников, но не является при этом вершиной ни одного из них;
4) каждый n-угольник в этом множестве выпуклый и находится целиком в одной плоскости.

Найдётся ли у куба покрытие, если

а) $n = 3$;

б) $n = 5$?

Замечание. Говорят, что точка X *принадлежит n-угольнику*, если X — вершина этого n-угольника, находится на его стороне или внутри него.

Estonian Mathematical Olympiad No. 69

February 2, 2022 Regional round **Grade 12**

Working time: 5 hours.
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.
Written materials or electronic devices are not permitted.

1. Andy and Pete had a snowball fight. Pete threw 25 more balls than Andy but the number of Pete's balls hitting his opponent was 2 less than the number of Andy's balls hitting Pete. If Andy had been hit by all Pete's balls, all Andy's own balls and one extra ball, then the number of times Andy was hit would have been 6 times greater than it actually was. Of Andy's balls, 40% hit Pete. Find the percentage of Pete's balls that hit Andy.

2. Find all angles α such that $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ and the equality

$$4\cos\alpha = 1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \ldots$$

holds (the right-hand side of the equality is an infinite sum).

3. Johnny very much likes the digit 4. Johnny writes on a blackboard a number of fours in a row, and plus or minus signs between some of the fours in such a way that the value of the expression is the fourth power of some positive integer. What is the least possible number of operators that Johnny could use?

4. Find all real numbers x satisfying the equation $3^x + 4^x = 5^x$.

5. Two circles with radii r_1 and r_2 touch each other externally at a point C and a common line at points A and B, respectively, where $A \neq B$.

a) Prove that the triangle ABC is right-angled.

b) Express the area S of the triangle ABC in terms of the radii r_1 and r_2.

6. Let $n \geqslant 3$ be an integer. Call a finite set of (not necessarily regular) n-gons in the space a *covering* of a cube if all following conditions hold:

1) Every point that belongs to an n-gon of the set lies on the surface of the cube;
2) Every point on the surface of the cube belongs to an n-gon of the set;
3) Whenever a point belongs to several n-gons of the set, it either is a vertex of all of these n-gons or lies on a side of all these n-gons while being a vertex for none of these n-gons;
4) Every n-gon of the set is convex and lies entirely in one plane.

Does a cube have a covering if:

a) $n = 3$?

b) $n = 5$?

Remark. A point X *belongs to an* n*-gon* if X is a vertex of the n-gon, lies on a side of the n-gon or lies inside the n-gon.

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. 17.07.

2. 5.

3. 4.

4. 11.

5. 2.

6. 21 cm.

7. 28 cm^2.

8. 7.

9. 3.

10. 10.

Lahendused

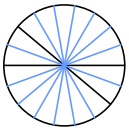
1. 20 tundi on 4 tundi vähem kui ööpäev, seega täpselt 20 tundi pärast kellaaega 20.45 näitab kell 16.45. Veel 15 minutit hiljem on kell 17.00, seega 22 ehk $15+7$ minutit hiljem on kell 17.07.

2. Et $\overline{AA} = 11 \cdot A$ ja $\overline{AAA} = 111 \cdot A$, saame võrrandi $(22 \cdot A + 1) \cdot A = 111 \cdot A$. Kuna A esineb arvu algusnumbrina, siis $A \neq 0$, mistõttu saame A-ga läbi jagades samaväärse võrrandi $22 \cdot A + 1 = 111$. Siit $A = 5$.

3. Iga arv jagub 1-ga. Kuna arv 20222022 lõpeb paarisnumbriga 2, siis see arv jagub 2-ga, ning kuna arvu 20222022 ristsumma on $6 \cdot 2$, mis jagub 3-ga, siis see arv jagub 3-ga. Arv 20222022 ei jagu 4-ga, sest kahest viimasest numbrist moodustatud arv 22 ei jagu 4-ga (annab 4-ga jagades jäägi 2).

4. Alguses on korvis ja kotis olevate tomatite arvude vahe 15, lõpus aga -7. Seega on vahet vaja vähendada $15-(-7)$ ehk 22 võrra. Ühe tomati tõstmine korvist kotti vähendab vahet 2 võrra, sest korvis olevate tomatite arv kahaneb 1 võrra ja kotis olevate tomatite arv kasvab 1 võrra. Seega on vaja korvist kotti tõsta $\frac{22}{2}$ ehk 11 tomatit.

5. Kuna $c + b = 4$ ning liidetavad on erinevad positiivsed täisarvud, siis b ja c on 1 ja 3 mingis järjestuses. Et $b + d = 6$ ja $b \neq d$, siis $b \neq 3$. Järelikult $b = 1$ ja $d = 5$. Võrdusest $a + d = 7$ saame nüüd $a = 2$.



Joonis 1

6. Kuna suure võrdkülgse kolmnurga ümbermõõt on 27 cm, siis tema küljepikkus on sellest kolmandik ehk 9 cm. Analoogselt saame, et väikse kolmnurga küljepikkus on 6 cm. Nelinurga kaks külge ühtivad vastavalt suure ja väikse kolmnurga külgedega, kahe ülejäänud külje pikkus aga võrdub suure ja väikse kolmnurga küljepikkuste vahega 3 cm. Kokkuvõttes on nelinurga ümbermõõt $9 + 6 + 3 + 3$ ehk 21 sentimeetrit.

7. Kuna nelinurk $ABCD$ on ristkülik, siis $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$. Järelikult $\angle EAD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Kolmnurgast ADE saame nüüd arvutada $\angle AED = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle EAD$. Seega $|DE| = |DA|$. Et $ABCD$ on ristkülik, siis $|DA| = |BC| = 4$ cm. Kokkuvõttes $|DE| = 4$ cm, kust $|CD| = |DE| + |EC| = 7$ cm. Seega ristküliku $ABCD$ pindala on $4 \cdot 7$ ehk 28 ruutsentimeetrit.

8. Ring tuleb jaotada võrdseteks sektoriteks, mis jaotavad ühtlasi ka antud sektori nurgaga 40° võrdseteks sektoriteks. Seega otsitav jaotus sisaldab koos iga diameetriga ka 40° võrra pööratud diameetri. Siis lisaks antud kahele diameetrile peab leiduma ka 80°, 120°, 160°, 200°, 240°, 280° ja 320° pööratud diameetrid, kokku 7 diameetrit. Jääb tähele panna, et saadud diameetrid on kõik erinevad, sest nende seas ei leidu kahte, mis oleksid teineteise suhtes pööratud 180°. Koos jaotavad nad ringi sektoriteks, mille nurk on 20° (joonisel 1 on sinisega märgitud uued diameetrid).

9. Kuna kollast ega rohelist õuna olla ei tohi, siis tuleb valida punane õun. Edasi on kaks võimalust.

- Kui valitakse vähemalt üks roheline vili, siis paprika peab olema roheline, sest teised viljad tingimuse 2 järgi rohelised olla ei tohi. Et õun ja paprika pole kumbki kollane, peab tingimuse 1 täitmiseks pirn olema kollane. Siin on valik ühene.
- Kui ühtki rohelist vilja ei valita, siis paprika peab olema kollane ja pirn saab olla punane või kollane, mis annab 2 valikuvõimalust.

Seega kokku on $1 + 2$ ehk 3 võimalust tingimusi täita.

10. Antud kehal on samapalju ristkülikukujulisi tahke kui kolmest ruudust moodustatud kujundil servi ehk 6, lisaks on 2 põhitahku ehk kokku 8. Antud kehal on servi $3 \cdot 6$ ehk 18. Seega servi on $18 - 8$ ehk 10 võrra enam.

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa vastused

1. 1000.

2. 1.

3. 5.

4. 320.

5. 180.

6. 26 cm.

7. 24,5 cm^2.

8. 72°.

9. 45.

10. 10.

Lahendused

1. Paneme tähele, et

$$\frac{202{,}2}{2{,}021}\cdot\frac{202{,}1}{20{,}22}=\frac{202{,}2\cdot 202{,}1}{2{,}021\cdot 20{,}22}=\frac{202{,}1\cdot 202{,}2}{2{,}021\cdot 20{,}22}=\frac{202{,}1}{2{,}021}\cdot\frac{202{,}2}{20{,}22}=100\cdot 10=1000.$$

2. Et $\overline{AA}=11\cdot A$, $\overline{ABA}=101\cdot A+10\cdot B$ ja $\overline{AAAA}=1111\cdot A$, saame võrrandi $1111\cdot A=11\cdot A\cdot(101\cdot A+10\cdot B)$. Kuna A esineb arvu algusnumbrina, siis $A\neq 0$, mistõttu saame suurusega $11\cdot A$ läbi jagades samaväärse võrrandi $101=101\cdot A+10\cdot B$. Kui $A>1$ või $B>0$, siis ilmselt $101\cdot A+10\cdot B>101$. Järelikult on ainus võimalus $A=1$ ja $B=0$, kust $A+B=1$.

3. Et $\overline{20X22}$ lõpeb paarisnumbriga 2 sõltumata numbri X valikust, siis algarv 2 on alati arvu $\overline{20X22}$ tegur. Valides näiteks $X=0$, jagub arv $\overline{20X22}$ algarvuga 3, sest selle arvu ristsumma 6 jagub 3-ga. Järgmine algarv 5 aga ei saa olla arvu $\overline{20X22}$ tegur ühegi X korral, sest sõltumata X valikust lõpeb see arv numbriga 2, mis ei jagu 5-ga.

4. Et 250 milliliitrit mannat kaalub 0,2 kilogrammi ehk 200 grammi ning 0,4 liitrit ehk 400 milliliitrit on $\frac{400}{250}$ ehk $\frac{8}{5}$ korda rohkem kui 250 milliliitrit, siis 0,4 liitrit mannat kaalub $200\cdot\frac{8}{5}$ ehk 320 grammi.

5. Et positiivne arv a moodustab 60% arvust b, siis arv b on suurem kui arv a ja $a=0{,}6b$. Ülesande tingimustest saame võrrandi $b-0{,}6b=0{,}6b-60$. See võrrand lihtsustub kujule $0{,}2b=60$, kust $b=300$. Seega $a=0{,}6\cdot 300=180$.

6. Ruutudel ümbermõõduga 20 cm ja ümbermõõduga 12 cm on küljepikkus vastavalt 5 cm ja 3 cm. Seega suure ruudu küljepikkus on 8 cm. Tumedaks värvitud kujundi ümbermõõt on järelikult $2 \cdot (8 + (8 - 3))$ ehk 26 sentimeetrit.

7. Kuna $ABCD$ on ristkülik, siis $|BC| = |AD| = 7$ cm ja $\angle ADE = \angle ECB = 90^\circ$. Kolmnurgast ADE saame $\angle AED = 180^\circ - 90^\circ - 47^\circ = 43^\circ$, millest tulenevalt $\angle BEC = 180^\circ - 92^\circ - 43^\circ = 45^\circ$. Kolmnurgast BCE saame nüüd $\angle EBC = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle BEC$. Järelikult $|EC| = |BC| = 7$ cm. Kolmnurga BCE pindala on seega $\frac{7 \cdot 7}{2}$ ehk 24,5 ruutsentimeetrit.

8. Olgu sektori nurga suurus α. Suurema ringi sektori pindala on $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 3^2$ ja väiksema ringi sektori pindala $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 2^2$ ruutsentimeetrit. Tumedaks värvitud osa pindala võrdub nende pindalade vahega. Siit $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot \left(3^2 - 2^2\right) = \pi$, kust $\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

9. Arv jagub 4-ga parajasti siis, kui tema kahest viimasest numbrist moodustuv arv jagub 4-ga. Sellistest arvudest lõpevad 4-ga 04, 24, 44, 64 ja 84, ülejäänud ehk 14, 34, 54, 74 ja 94 ei jagu 4-ga. Seega iga sajaliste numbriga leidub täpselt 5 nõutud omadusega kolmekohalist arvu. Kokku on neid järelikult $9 \cdot 5$ ehk 45.

10. Peale 2 põhitahu on kehal samapalju külgtahke kui on põhitahul servi ehk 8. Seega kehal on kokku 10 tahku.

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa vastused

1. 11.

2. 10.

3. 3.

4. 150.

5. 2,5.

6. 72°.

7. $36\ \text{cm}^2$.

8. 20 cm.

9. 5.

10. 6.

Lahendused

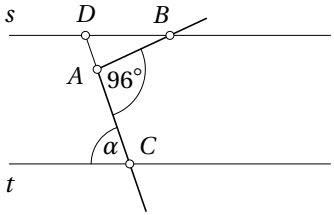
1. Viies liikmed $\frac{1}{2}$ ja $-\frac{3}{4}$ paremale, saame $\frac{x}{6} = \frac{2}{2} + \frac{8}{4} - \frac{7}{6} = 3 - \frac{7}{6} = \frac{11}{6}$. Järelikult $x = 11$.

2. Et $\overline{AAA} = 111 \cdot A$, saame võrrandi $\overline{BA} \cdot B \cdot A = 111 \cdot A$. Kuna A esineb arvu algusnumbrina, siis $A \neq 0$. Seega suurusega A läbi jagades saame samaväärse võrrandi $\overline{BA} \cdot B = 111$. Arvu 111 ainsad tegurid on $1, 3, 37, 111$, sest $111 = 3 \cdot 37$, kus tegurid on algarvud. Seega $\overline{BA} = 37$, kust $A = 7$ ja $B = 3$. Järelikult $A + B = 10$.

3. Otsitavad arvud on parajasti 2 astmed, sest teistel naturaalarvudel leidub paaritu algarvuline tegur. Kahekohalised 2 astmed on 16, 32 ja 64, kokku 3 arvu.

4. Et poisid moodustasid osalejatest 52%, siis tüdrukud moodustasid osalejatest 48%. Poiste ja tüdrukute arvude vahe moodustab järelikult 52% − 48% ehk 4% kõigi osalejate arvust. Et see vahe on 6, siis osalejaid oli kokku $6 \cdot \frac{100\%}{4\%}$ ehk 150.

5. Ülesande tingimuste põhjal $ab = 4 \cdot \frac{a}{b}$, kust $b^2 = 4$ ehk $b = 2$. Samuti saame $ab = \frac{b}{a} : 4$, kust $a^2 = \frac{1}{4}$ ehk $a = \frac{1}{2}$. Kokkuvõttes $a + b = 2 + \frac{1}{2} = 2{,}5$.



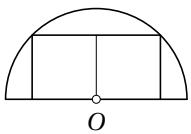
Joonis 2

6. Olgu sirge AC ja sirge t vahelise teravnurga suurus α. Pikendame lõiku AC üle punkti A sirgeni s, olgu vastav lõikepunkt D (joonis 2). Põiknurkadest saame $\angle BDA = \alpha$. Kolmnurga ABD tipu A juures oleva välisnurga suurus on 96°, tippude B ja D juures olevate sisenurkade suurused aga vastavalt $\frac{\alpha}{3}$ ja α. Seega $96^\circ = \frac{\alpha}{3} + \alpha = \frac{4}{3}\alpha$, kust $\alpha = 72^\circ$.

7. Olgu poolringjoone keskpunkt O. Et ristküliku pikem külg on lühemast küljest 2 korda pikem, on ristkülik jaotatav kaheks ruuduks, mille küljepikkus võrdub ristküliku lühema külje pikkusega (joonis 3). Sümmeetria tõttu on ruutude üks ühine tipp punktis O. Seega kummagi ruudu diagonaali pikkus võrdub poolringjoone raadiusega 6 cm. Järelikult ristküliku pindala on $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6^2$ ehk 36 ruutsentimeetrit.

8. Et väikse võrdkülgse kolmnurga ümbermõõt on 15 cm, on väikse kolmnurga küljepikkus sellest kolmandik ehk 5 cm. Kuna väike kolmnurk ja nelinurk on sama ümbermõõduga ja neil kujundeil on ühine külg, mille pikkus võrdub väikse kolmnurga küljepikkusega, siis nelinurga rajajoone osa, mis kattub suure kolmnurga rajajoonega, on niisama pikk kui väikse kolmnurga kaks ülejäänud külge kokku. Seega suure kolmnurga ümbermõõt on $2 \cdot 2 \cdot 5$ ehk 20 sentimeetrit.

9. Et $\frac{2022}{2021} \cdot \frac{2021}{2022} = 1$, siis tuleb komade abil avaldise väärtust täpselt 100 korda suuremaks teha. Komad peavad olema erinevates arvudes. Kui mõlemad komaga arvud oleksid lugejates, siis muutuks avaldise väärtus väiksemaks.



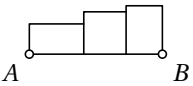
Joonis 3

Kui mõlemad komad on nimetajates, siis lisandub avaldise väärtusele niimitu nulli, kuipalju on komade järel numbreid kokku. Seega peab komade järel olema kokku 2 numbrit, mida on võimalik saavutada ainult 1 viisil, pannes koma kummagi nimetaja viimase numbri ette. Kui üks koma on lugejas ja teine nimetajas, peab nimetajas olev koma eraldama paremalt 2 numbrit rohkem kui lugejas olev koma. See on võimalik ainult nii, et lugejas olev koma on viimase numbri ees ja nimetajas olev koma esimese numbri järel. Et lugejaid on 2 ja nimetajaid samuti 2, on niiviisi komade panekuks $2 \cdot 2$ ehk 4 võimalust. Kokku on komade asetamiseks nõutud viisil $1 + 4$ ehk 5 võimalust.

10. Peale 2 põhitahu on kehal samapalju külgtahke kui on põhitahul servi ehk 8. Seega kehal on kokku 10 tahku. Keha tipud on parajasti mõlema põhitahu tipud, mida on kokku $2 \cdot 8$ ehk 16. Tippude ja tahkude arvu vahe on $16 - 10$ ehk 6.

II osa lahendused

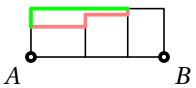
1. Lõigule AB pikkusega 22 cm on asetatud kolm võrdse ümbermõõduga ristkülikut, millest vaid keskmine on ruut. Lõigul AB asuva vasakpoolse ristküliku külg on ruudu küljest 2 cm võrra pikem. Samal lõigul asuv parempoolse ristküliku külg on aga ruudu küljest 1 cm võrra lühem. Leia kolmest ristkülikust tekkinud kujundi ümbermõõt.



Vastus: 60 cm.

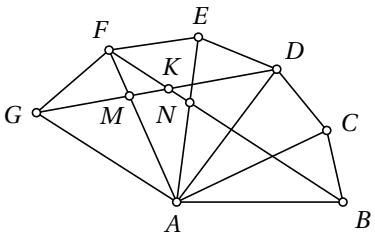
Lahendus. Olgu ruudu küljepikkus a cm. Siis lõigul AB asuva vasakpoolse ristküliku külje pikkus on $a+2$, parempoolse ristküliku külje pikkus aga $a-1$ sentimeetrit. Kokkuvõttes $(a+2)+a+(a-1) = 22$, kust $a = 7$. Seega ruudu ümbermõõt on $4 \cdot 7$ ehk 28 sentimeetrit.

Olgu parempoolse ristküliku vertikaalse külje pikkus h cm. Kuna parempoolse ristküliku ümbermõõt peab olema võrdne ruudu ümbermõõduga, siis $2(7-1+h) = 28$, kust $h = 8$. Analoogselt saame vasakpoolse ristküliku vertikaalse külje pikkuseks 5 cm, mis on väiksem kui parempoolse ristküliku oma. Seega kolmest ristkülikust koosneva kujundi ümbermõõt võrdub sellise ristküliku ümbermõõduga, mille üks külg on AB ja teine külg on parempoolse ristküliku vertikaalne külg (joonisel 4 punasega märgitud lõikude kogupikkus võrdub rohelisega märgitud lõikude kogupikkusega, sest nii horisontaal- kui vertikaalsihiline pikkus on sama). Järelikult kolmest ristkülikust tekkinud kujundi ümbermõõt on $2(22+8)$ ehk 60 sentimeetrit.



Joonis 4

2. Võrdhaarsete kolmnurkade ABC, ACD, ADE, AEF ja AFG tipunurkade suurused ühise tipu A juures on vastavalt 24°, 26°, 28°, 30° ja 32°. Olgu M lõikude FA ja GD lõikepunkt, K lõikude FB ja GD lõikepunkt ning N lõikude FB ja EA lõikepunkt. Leia nurkade AMK, MKN ja KNA suurused.



Vastus: 77°, 139°, 114°.

Lahendus. Et $|AB| = |AC| = |AD| = |AE| = |AG| = |AF|$, siis võrdhaarsetest kolmnurkadest ADG ja ABF saame $\angle ADG = \angle AGD = \dfrac{180^\circ - \angle DAG}{2}$ ja $\angle ABF = \angle AFB = \dfrac{180^\circ - \angle BAF}{2}$. Et $\angle DAG = 28^\circ + 30^\circ + 32^\circ = 90^\circ$ ja $\angle BAF = 24^\circ + 26^\circ + 28^\circ + 30^\circ = 108^\circ$, siis $\angle AGM = \angle AGD = \dfrac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$ ja $\angle AFN = \angle AFB = \dfrac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$. Seega $\angle AMK = 32^\circ + 45^\circ = 77^\circ$ ja $\angle KNA = 180^\circ - 30^\circ - 36^\circ = 114^\circ$. Nüüd nelinurgast $AMKN$ saame $\angle MKN = 360^\circ - 30^\circ - 77^\circ - 114^\circ = 139^\circ$.

3. 2022-kohaline arv algab numbriga 2, järgmine number on 7. Alates kolmandast numbrist on iga number selles arvus võrdne kahe eelmise numbri korrutise üheliste numbriga.

a) Mitu korda esineb selles arvus number 8?

b) Jüri liitis selle arvu mingist numbrist alates mingi hulga järjestikuseid numbreid ja sai summaks 777. Leia kõik võimalused, mitu numbrit võis Jüri liita.

Vastus: a) 337; b) 194.

Lahendus. Vaadeldava arvu esimesed 10 numbrit on 2748262248. Paneme tähele, et 9-s ja 10-s number on võrdsed vastavalt 3-nda ja 4-nda numbriga. Et iga number sõltub vaid kahest eelmisest, on ka 11-s number võrdne 5-nda numbriga, 12-s number võrdne 6-nda numbriga jne, üldiselt number järjekorranumbriga $n+6$ on võrdne numbriga, mille järjekorranumber on n, iga $n \geqslant 3$ korral.

a) Leitud tsüklis pikkusega 6 on täpselt üks number 8. Kuna arvus on 2022 numbrit, millest 2020 kuulub leitud tsüklitesse, ja $2020 = 6 \cdot 336 + 4$, sisaldab vaadeldav arv 336 täistsüklit ja veel 4 numbrit järgmisest tsüklist, milles on ka üks number 8. Seega on arvus kokku 337 numbrit 8.

b) Kõik tsüklisse kuuluvad numbrid on paaris. Seega ainus paaritu number vaadeldavas arvus on tema teine number 7. Et Jüri sai summaks paaritu arvu, pidi summa hõlmama arvu teist numbrit. Ühes tsüklis olevate numbrite summa on $4 + 8 + 2 + 6 + 2 + 2$ ehk 24 ning $777 = 24 \cdot 32 + 9$. Seega kui Jüri alustas liitmist arvu esimesest numbrist, siis hõlmas tema summa lisaks kahele esimesele numbrile täpselt 32 täistsüklit. Liidetavaid oli sel juhul $2 + 32 \cdot 6$ ehk 194. Kui Jüri oleks alustanud liitmist arvu teisest numbrist 7, siis pidanuks tema summa hõlmama 33-ndast tsüklist mingi hulga numbreid, mille summa on 2, kuid see pole võimalik, sest tsükli esimene number 4 on suurem kui 2. Järelikult 194 liidetavat on ainus võimalus.

II osa lahendused

1. Emal on kaks last. Praegu on ema vanus aastates kahekohaline arv, mille esimene number on tema ühe lapse vanus aastates ning mille numbrite summa on võrdne teise lapse vanusega aastates. Ema ja laste vanuste summa on 40 ning ema vanus jagub laste vanuste summaga.

a) Leia laste vanused.

b) Seitsme aasta pärast on vanaisa vanus võrdne ema ja kahe lapse vanuste summaga. Kui vana on vanaisa praegu?

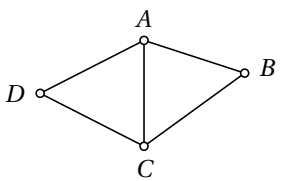
Vastus: a) 3 ja 5; b) 54.

Lahendus.

a) Olgu laste vanused x ja y. Üldisust kitsendamata on ema vanuse kümneliste number x ja üheliste number $y-x$. Siis ema vanus avaldub kujul $10x+(y-x)$ ehk $9x+y$. Ülesande tingimus annab $(9x+y)+x+y = 40$ ehk $10x+2y = 40$, kust $5x+y = 20$. Seega $y = 20-5x$, kust $y-x = 20-6x$. Et $y-x$ on ema vanuse üheliste number, siis $0 \leqslant 20-6x < 10$, mis annab võimalused $x = 2$ ja $x = 3$; vastavalt $y = 10$ ja $y = 5$. Kui $x = 2$ ja $y = 10$, siis oleks ema vanus 28, mis ei jagu summaga $2+10$ ehk 12. Seega $x = 3$ ja $y = 5$ ehk laste vanused on 3 ja 5.

b) Kuna praegu on ema ja laste vanuste summa 40, siis 7 aasta pärast on ema ja laste vanuste summa $40+3\cdot 7$ ehk 61. Ülesande tingimuse põhjal on 7 aasta pärast vanaisa vanus 61. Järelikult praegu on vanaisa vanus $61-7$ ehk 54.

2. Nelinurga $ABCD$ kohta on teada, et $|AB| = |AC|$ ja $|DA| = |DC|$ ning $\angle ABC = \angle CDA$. Selle nelinurga üks nurkadest on suurusega 150°. Leia nelinurga $ABCD$ kolme ülejäänud nurga suurused.



Vastus: 48°, 48°, 114°.

Lahendus. Tähistame $\angle ABC = \angle CDA = \alpha$. Kuna $|AB| = |AC|$, siis ka $\angle ACB = \alpha$ ja $\angle CAB = 180^\circ - 2\alpha$. Võrdus $|DA| = |DC|$ aga annab $\angle ACD = \angle CAD = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$. Seega $\angle BCD = \alpha + \dfrac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\alpha$

ja $\angle DAB = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2} + (180^\circ - 2\alpha) = 270^\circ - \dfrac{5}{2}\alpha$. Järelikult nelinurga $ABCD$ nurkade suurused on $270^\circ - \dfrac{5}{2}\alpha$, α, $90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$ ja α.

Et $\angle ABC = \alpha$ ja ABC peab võrdhaarse kolmnurga alusnurgana olema terav, siis $\alpha < 90^\circ$, mis tähendab, et $\alpha \neq 150^\circ$. Kui oleks $90^\circ + \dfrac{1}{2}\alpha = 150^\circ$, saaksime $\alpha = 120^\circ$, mis on samal põhjusel võimatu. Seega $270^\circ - \dfrac{5}{2}\alpha = 150^\circ$, kust $\alpha = 48^\circ$ ja $90^\circ + \dfrac{1}{2}\alpha = 114^\circ$. Seega nelinurga $ABCD$ ülejäänud nurkade suurused on 48°, 48° ja 114°.

3. Tabel täidetakse arvust 20 väiksemate positiivsete täisarvudega nii, et igas lahtris oleks erinev arv. Seejuures peavad olema ridades olevate arvude summad võrdsed ning ka veergudes olevate arvude summad võrdsed. Mõned arvud on juba tabelisse kirjutatud.

	10		12		
8					
16		11	13	14	

a) Leia kahes vasakpoolses veerus puuduvate arvude summa.

b) Leia üks võimalus täita tabeli kõik tühjad lahtrid.

Vastus: a) 28; b) ainus variant on kujutatud joonisel 5.

7	10	1	12	15	17
8	18	19	6	2	9
16	3	11	13	14	5

Joonis 5

7	10		12		
8	18		6		
16	3	11	13	14	5

Joonis 6

Lahendus. Ülesande tingimuse põhjal saavad tabelis esineda naturaalarvud 1 kuni 19. Nende arvude summa on 190. Et lahtreid on $3 \cdot 6$ ehk 18, jääb täpselt üks arv välja. Kuna veergudes olevate arvude summad on võrdsed ja veerge on 6, peab kasutatud arvude summa jaguma 6-ga. Et 190 annab 6-ga jagades jäägi 4, peab väljajäetav arv andma 6-ga jagades jäägi 4. Sellised arvud on 4, 10 ja 16, aga kuna 10 ja 16 on juba kasutatud, peab välja jääma 4. Seega täidetud tabelis esinevate arvude summa on $190 - 4$ ehk 186.

a) Iga veeru arvude summa on $\dfrac{186}{6}$ ehk 31. Kahe esimese veeru arvude kogusumma on järelikult 62. Puuduvate arvude summa on järelikult $62 - 10 - 8 - 16$ ehk 28.

b) Sobib tabel joonisel 5.

Märkus. Saab tõestada, et tegu on ainsa võimalusega tingimustele vastavalt tabelit täita. Et iga veeru arvude summa on 31, siis esimese veeru puuduv arv peab olema $31 - 8 - 16$ ehk 7 ja neljanda veeru puuduv arv $31 - 12 - 13$

ehk 6. Et iga rea arvude summa on $\frac{186}{3}$ ehk 62, on kolmanda rea kahe puuduva arvu summa $62 - 16 - 11 - 13 - 14$ ehk 8. Et 7 ja 6 on mujal kasutatud, peavad puuduvad arvud olema 5 ja 3 mingis järjestuses. Kolmanda rea teises lahtris ei saa olla 5, sest $31 - 10 - 5 = 16$ ja arv 16 on juba kasutatud. Seega kolmanda rea teises lahtris on 3 ja kuuendas lahtris 5 ning teise rea teises lahtris on 18 (joonis 6).

Kasutamata on arvud 1, 2, 9, 15, 17, 19. Kolmanda veeru puuduvate arvude summa on $31 - 11$ ehk 20; kasutamata arvudest annavad vaid 1 ja 19 summaks 20. Seega kolmandas veerus on arvud 1 ja 19 mingis järjestuses. Analoogselt saame, et viiendas veerus on 2 ja 15 mingis järjestuses ning kuuendas 9 ja 17 mingis järjestuses. Et teise rea olemasolevate arvude summa on paaris ja kõigi arvude summa samuti paaris, peab ka puuduvate arvude summa olema paaris, mistõttu peab selle rea puuduvate arvude seas leiduma paarisarv. Seega viiendas veerus peab arv 2 olema keskmises ja arv 15 ülemises lahtris. Nüüd on esimese rea puuduvate arvude summa $62 - 7 - 10 - 12 - 15$ ehk 18; seega kolmandas veeru ülemises lahtris peab olema 1 ja kuuenda veeru ülemises lahtris 17. Sellega on määratud ka teise veeru puuduvad arvud.

II osa lahendused

1. *(Maksim Ivanov)*

Leia kolm vähimat naturaalarvu, millest 1 võrra väiksemad arvud jaguvad 5-ga, 1 võrra suuremad arvud jaguvad 3-ga ja mis ise jaguvad 4-ga.

Vastus: 56, 116, 176.

Lahendus 1. Otsitavad arvud on paaris, sest 4-ga jaguvad arvud jaguvad ka 2-ga. Seega otsitavatest 1 võrra väiksemad arvud on paaritud. Et otsitavatest 1 võrra väiksemad arvud jaguvad 5-ga, peab nende viimane number olema 5, mis tähendab, et otsitavate arvude viimane number on 6. Seega otsitavatest arvudest 1 võrra suuremate arvude viimane number on 7. Ainus 30-st väiksem 3-ga jaguv arv lõpunumbriga 7 on 27. Et 30-st alates hakkavad 3-ga jaguvate arvude lõpunumbrid tsükliliselt korduma, siis ainsad 3-ga jaguvad arvud, mille viimane number on 7, on $27, 57, 87, 117, 147, 177, \ldots$. Ainsad kahekohalised 4-ga jaguvad arvud, mille viimane number on 6, on $16, 36, 56, 76, 96$. Järgmised sama omadusega arvud on 4-ga jaguvuse tunnuse põhjal $116, 136, 156, 176, 196$. Võrreldes leitud arvujadu, näeme, et kolm vähimat otsitavat naturaalarvu on 56, 116 ja 176.

Lahendus 2. Kui arv n on nõutud omadusega, st $n-1$ jagub 5-ga, $n+1$ jagub 3-ga ja n jagub 4-ga, siis arv $n+4$ jagub nii 3-ga, 4-ga kui ka 5-ga. Ümberpöördult, kui $n+4$ jagub nii 3-ga, 4-ga kui ka 5-ga, siis $n-1$ jagub 5-ga, $n+1$ jagub 3-ga ja n jagub 4-ga. Seega piisab leida kolm vähimat naturaalarvu, mis jaguvad nii 3-ga, 4-ga kui ka 5-ga, ja lahutada neist arvudest 4. Kuna $\text{VÜK}(3,4,5) = 60$, siis arv jagub 3-ga, 4-ga ja 5-ga parajasti siis, kui see arv jagub 60-ga. Kolm vähimat 60-ga jaguvat naturaalarvu on 60, 120 ja 180. Seega kolm vähimat nõutud omadusega arvu on 56, 116 ja 176.

2. *(Härmel Nestra)*

Kas on võimalik asendada tehtes

$$\begin{array}{r} J\,U\,M\,A\,L \\ +\,K\,U\,R\,A\,T \\ \hline E\,E\,T\,E\,R \end{array}$$

tähed numbritega nii, et tekiks korrektne liitmine? Sama täht tuleb asendada kõikjal sama numbriga, erinevad tähed erinevate numbritega.

Vastus: ei.

Lahendus. Oletame, et E on paaris. Et $A+A$ on samuti paaris ja lõpeb paarisnumbriga, siis ühelistest ei tule kümnelistesse ülekannet, muidu oleks summa kümneliste number paaritu. Samuti näeme, et sajalistest tuhandelistesse ei teki ülekannet, sest $U+U$ on paaris. Seega ühelistest saame $L+T=R$, sajalistest aga $M+R=T$ või $M+R+1=T$ sõltuvalt sellest, kas kümnelistest sajalistesse tekib ülekanne või mitte. Liites ühelistest ja sajalistest saadud võrdused, saame $L+T+M+R=R+T$ või $L+T+M+R+1=R+T$, millest sarnaste liikmete koondamisel saame $L+M=0$ või $L+M=-1$. Kumbki pole võimalik, sest L ja M on erinevad numbrid.

Oletame, et E on paaritu. Et $A+A$ on paaris ja lõpeb paarisnumbriga, siis ühelistest tuleb kümnelistesse ülekanne, muidu oleks summa kümneliste number paaris. Samuti näeme, et sajalistest tuhandelistesse tekib ülekanne, sest $U+U$ on paaris. Seega ühelistest saame $L+T=10+R$, sajalistest aga $M+R=10+T$ või $M+R+1=10+T$ sõltuvalt sellest, kas kümnelistest sajalistesse tekib ülekanne või mitte. Liites ühelistest ja sajalistest saadud võrdused, saame $L+T+M+R=20+R+T$ või $L+T+M+R+1=20+R+T$, millest sarnaste liikmete koondamisel saame $L+M=20$ või $L+M=19$. Kumbki pole võimalik.

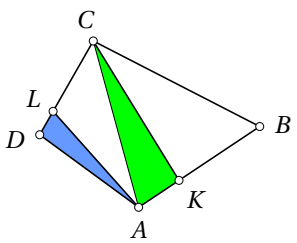
Kuna E ei saa olla paaris ega paaritu, siis tähtede asendamine numbritega nõutud viisil pole võimalik.

3. *(Maksim Ivanov)*

Kumera nelinurga $ABCD$ küljel AB valitakse punkt K nii, et $|BK|=2\cdot|AK|$, küljel CD aga valitakse punkt L nii, et $|CL|=3\cdot|DL|$. Nelinurga $ABCD$ pindala on 2022 cm^2, nelinurga $AKCL$ pindala aga 974 cm^2. Leia kolmnurga BCK pindala.

Vastus: 868 cm^2.

Lahendus. Olgu kolmnurga ACK pindala a cm^2 ja kolmnurga ADL pindala b cm^2 (joonisel 7 kujutatud vastavalt rohelise ja sinisega). Kolmnurkadel ACK ja BCK on ühine tipust C tõmmatud kõrgus, alused suhtuvad



Joonis 7

aga nagu $1 : 2$. Seega kolmnurga BCK pindala on $2a$ cm^2, kolmnurga ACB pindala aga $3a$ cm^2. Analoogselt näeme, et kolmnurga ACL pindala on $3b$ cm^2, kolmnurga ACD pindala aga $4b$ cm^2. Nelinurga $ABCD$ pindala on kolmnurkade ACB ja ACD pindalade summa, nelinurga $AKCL$ pindala aga kolmnurkade ACK ja ACL pindalade summa. Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3a + 4b = 2022, \\ a + 3b = 974. \end{cases}$$

Korrutades esimese võrrandi 3-ga ja teise võrrandi 4-ga ning lahutades, saame $5a = 2170$, kust $a = 434$. Järelikult kolmnurga BCK pindala on $2 \cdot 434$ ehk 868 ruutsentimeetrit.

4. *(Kaur Aare Saar)*

Kui palju on 8-kohalisi arve, mis on nii palindroomid kui ka poolpöördambigrammid, kui numbreid kujutatakse elektrooniliste kellade ekraanidelt tuttavas 7-segmendilises vormis, nagu joonisel näidatud?

Märkus. Palindroomiks nimetatakse arvu, mille numbrite järjestuse ümberpööramisel saame sama arvu. *Poolpöördambigramm* on arv, mis jääb samaks 180 kraadi pööramisel. Näiteks kuupäev 2. detsember 2021 formaadis YYYYMMDD on 20211202, mis on ühekorraga palindroom ja poolpöördambigramm. Kuupäev 2. juuni 2060 samas formaadis on aga küll palindroom, kuid mitte poolpöördambigramm, sest 180 kraadi pööramisel saame teise kuupäeva 9. september 2090.

Vastus: 500.

Lahendus. Numbrite järjestuse ümberpööramisel ja poolpöördel kujutuvad numbrikohad samadeks numbrikohtadeks. Järelikult arvus, mis on nii palindroom kui ka poolpöördambigramm, peavad kõik numbrid olema iseenda poolpöördambigrammid ehk pööramisel 180 kraadi nägema välja samasugused. Sellised numbrid on 0, 1, 2, 5 ja 8. Esimese numbri valimiseks on 4 võimalust, sest arv ei alga nulliga, järgnevast 3 numbrist igaühe valikuks on 5 võimalust. Sellega on kogu arv määratud. Seega kokku on 8-kohalisi arve, mis on ühtaegu palindroomid ja poolpöördambigrammid, $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ ehk 500 tükki.

Lahendused

1. *(Härmel Nestra)*

Kas arv $\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{4+4+4+4}}}}$ on suurem, väiksem või niisama suur kui arv $\sqrt[4+4+4+4]{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}}}$?

Vastus: niisama suur.

Lahendus. Paneme tähele, et

$$\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{4+4+4+4}}}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{4^2}}}} = \left(\left(\left(\left(4^2\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} = 4^{2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{128}}$$

ning

$$\sqrt[4+4+4+4]{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}}} = \sqrt[16]{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}}} = \left(\left(\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{16}} = 4^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}} = 4^{\frac{1}{128}}.$$

Seega need arvud on võrdsed.

2. *(Joonas Jürgen Kisel)*

Kooli spordipäeval läbib Juku esimese poole jooksudistantsist ühtlase kiirusega $16{,}2\frac{\text{km}}{\text{h}}$, teise poole jooksuajast aga ühtlase kiirusega $12{,}8\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Vahepealse aja jookseb ta ühtlase kiirusega v, mis on ühtlasi tema keskmine kiirus kogu jooksu vältel. Leia v.

Vastus: $14{,}4\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Lahendus. Olgu kogu jooksudistants s ning kogu jooksuaeg t; sellisel juhul $v = \frac{s}{t}$. Lihtsuse mõttes toome sisse ka tähistused $u = 16{,}2\frac{\text{km}}{\text{h}}$ esimese poole jooksudistantsi läbimise kiiruse ja $w = 12{,}8\frac{\text{km}}{\text{h}}$ teise poole jooksuaja hoitava kiiruse kohta. Paneme tähele, et jooksuaja teisel poolel läbib Juku vahemaa $w\cdot\frac{t}{2}$, seega kiirusega v läbib ta vahemaa $s-\frac{s}{2}-\frac{wt}{2}$ ehk $\frac{s-wt}{2}$. Esimese poole jooksudistantsist läbib Juku ajaga $\frac{\frac{s}{2}}{u}$, seega kiirusega v jookseb ta

ajavahemiku $t - \frac{t}{2} - \frac{s}{2u}$ ehk $\frac{ut-s}{2u}$ vältel. Kokkuvõttes $v = \frac{s}{t} = \frac{u(s-wt)}{ut-s}$, kus viimane võrdus annab $ust - s^2 = ust - uwt^2$ ehk $s^2 = uwt^2$. Siit $\left(\frac{s}{t}\right)^2 = uw$ ehk $v = \frac{s}{t} = \sqrt{uw} = 14{,}4\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

3. *(Urve Kangro)*

Jüri tahab teha järgmist trikki. Ta palub Maril mõelda ühe neljakohalise naturaalarvu. Seejärel palub ta Maril liita sellele arvule oma vanuse ja tulemusele veelkord oma vanuse. Nüüd palub ta Maril algul mõeldud arvu korrutada esimese liitmise tulemusega ning saadud korrutise teise liitmise tulemusega jagada. Enne tegevuse algust on aga Jüri kirjutanud paberile arvu, mis osutub võrdseks jagamisel tekkiva jäägiga. Leia Mari suurim vanus, mille puhul Jüri saab seda trikki edukalt teha sõltumata Mari mõeldud arvust. (Eeldame, et Jüri teab Mari vanust ja Mari sooritab kõik tehted õigesti.)

Vastus: 22.

Lahendus. Olgu Mari mõeldud arv m ja vanus v. Paneme tähele, et

$$m(m+v) = (m+2v)(m-v) + 2v^2.$$

Seega leitud jääk on $2v^2$, tingimusel et $2v^2 < m + 2v$ ehk $2v(v-1) < m$. Kui $v \leqslant 22$, siis tõepoolest $2v(v-1) \leqslant 2 \cdot 22 \cdot 21 = 924 < 1000 \leqslant m$, mistõttu Jüri saab triki edukalt lõpetada, kirjutades arvu $2v^2$. Kui aga $v \geqslant 23$, siis $2v(v-1) \geqslant 2 \cdot 23 \cdot 22 = 1012$. Seega Mari mõeldud arv võib olla nii suurem kui ka väiksem kui $2v(v-1)$, mistõttu leitud jääk võib olla nii $2v^2$ kui ka mõni väiksem arv ja Jüri trikk ei tarvitse õnnestuda.

4. *(Urve Kangro, Maksim Ivanov)*

Leia kõik sellised naturaalarvude paarid, et kui esimesele arvule liita teise arvu numbrite summa, siis on tulemuseks 1000, ja kui teisele arvule liita kahekordne esimese arvu numbrite summa, siis on tulemuseks samuti 1000.

Vastus: $(981, 964)$.

Lahendus 1. Otsitavad arvud peavad ilmselt olema väiksemad kui 1000. Et sellise arvu numbrite summa on ülimalt $9+9+9$ ehk 27, peavad mõlemad arvud olema kolmekohalised ja algama 9-ga. Olgu need arvud $900 + 10a + b$ ja $900 + 10c + d$. Ülesande tingimustest siis $900 + 10a + b + 9 + c + d = 1000$ ja $900 + 10c + d + 2(9 + a + b) = 1000$; nende võrrandite lihtsustamisel saame vastavalt $10a + b + c + d = 91$ ja $2a + 2b + 10c + d = 82$. Lahutades esimesest võrdusest teise, saame $8a - b - 9c = 9$, kust kummalegi poolele arvu $9b + 9c$ liitmisel saame $8(a+b) = 9(1+b+c)$. Järelikult $8(a+b)$ jagub 9-ga; et 8 ja 9 on ühistegurita, siis $a+b$ jagub 9-ga. Saame kolm varianti $a+b = 0$, $a+b = 9$ ja $a+b = 18$. Esimene ja kolmas variant on võimalikud ainult juhul $a = b = 0$ ja $a = b = 9$, mis võrdusse $10a + b + c + d = 91$ annavad vastavalt $c + d = 91$ ja $c + d = -8$, seega kumbki ei sobi. Järelikult $a + b = 9$, st esimese arvu numbrite summa on $9 + 9$ ehk 18. Seega teine arv on $1000 - 2 \cdot 18$ ehk 964 ning esimene arv on $1000 - 9 - 6 - 4$ ehk 981.

Lahendus 2. Otsitavad arvud peavad ilmselt olema väiksemad kui 1000. Et sellise arvu numbrite summa on ülimalt $9 + 9 + 9$ ehk 27, peab esimene arv olema 973 või suurem ning teine arv 946 või suurem. Esimese arvu numbrite summa on vähemalt 17, seega teine arv peab olema 966 või väiksem. Teise arvu numbrite summa on vähemalt 14, seega esimene arv peab olema 986 või väiksem. Seega esimese arvu numbrite summa on ülimalt 25, mistõttu teine arv peab olema 950 või suurem. Et teisele arvule paarisarvu liites saame paarisarvu 1000, on teine arv paaris ega saa olla 959; järelikult on teise arvu numbrite summa ülimalt 22 ja esimene arv seega 978 või suurem. Järgnevas kahes tabelis on kõik sõelale jäänud võimalused vastavalt esimese ja teise arvu valikuks, koos numbrite summaga:

978	979	980	981	982	983	984	985	986
24	25	17	18	19	20	21	22	23

950	952	954	956	958	960	962	964	966
14	16	18	20	22	15	17	19	21

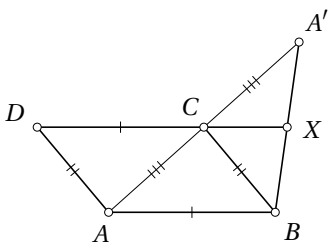
Valime esimese tabeli ülemisest reast suvalise arvu x ja leiame teise tabeli ülemises reas arvu y, millele vastav alumise rea arv on $1000 - x$. Paar (x, y) vastab ülesande tingimustele parajasti siis, kui arvule x esimese tabeli alumises reas vastava numbrite summa kahekordne on $1000 - y$. Läbivaatus näitab, et see on nii vaid juhul $x = 981$; siis $y = 964$. Seega ainus tingimustele vastav arvupaar on $(981, 964)$.

5. *(Hendrik Vija)*

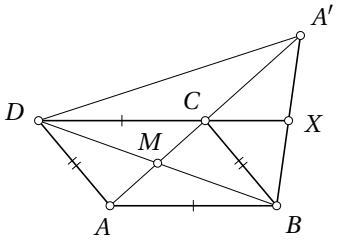
Olgu $ABCD$ rööpkülik. Olgu A' punkti A peegeldus punkti C suhtes. Olgu X sirgete $A'B$ ja CD lõikepunkt. Leia suhe $\dfrac{|XD|}{|XC|}$.

Vastus: 3.

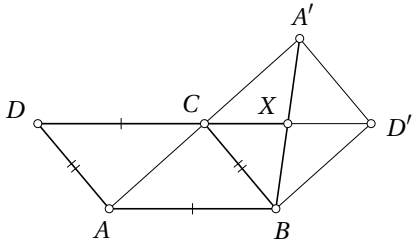
Lahendus 1. Et punkt A' on punkti A peegeldus punkti C suhtes, on punkt C lõigu AA' keskpunkt (joonis 8). Lõigud CX ja AB on paralleelsed. Järelikult



Joonis 8



Joonis 9



Joonis 10

on CX kolmnurga $AA'B$ kesklõik, mistõttu $|CX| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|CD|$. Kokkuvõttes $\frac{|XD|}{|XC|} = \frac{|CX| + |CD|}{|CX|} = \frac{\left(\frac{1}{2} + 1\right)|CD|}{\frac{1}{2}|CD|} = 3$.

Lahendus 2. Olgu M rööpküliku $ABCD$ diagonaalide lõikepunkt (joonis 9). Et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, on M lõigu BD keskpunkt ehk $A'M$ on kolmnurgas $A'BD$ mediaan. Ühtlasi on M ka lõigu AC keskpunkt, mistõttu $\frac{|A'C|}{|CM|} = \frac{|AC|}{|CM|} = 2$. Et mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes $2:1$, siis C on kolmnurga $A'BD$ mediaanide lõikepunkt. Järelikult on DX samuti kolmnurga $A'BD$ mediaan, mistõttu mediaanide lõikepunkti omaduse põhjal $\frac{|XD|}{|XC|} = 3$.

Lahendus 3. Olgu D' punkti D peegeldus punkti C suhtes (joonis 10). Peegelduse tõttu on lõik $A'D'$ paralleelne rööpküliku küljega AD ja seega ka küljega BC. Samuti paneme tähele, et kuna $|D'C| = |DC| = |AB|$ ning $D'C \parallel AB$, on $ABD'C$ rööpkülik. Seega sirged AA' ja BD' on paralleelsed. Tingimustest $A'D' \parallel BC$ ja $AA' \parallel BD'$ järeldub, et ka $A'D'BC$ on rööpkülik. Seega poolitab X diagonaali CD' ehk $\frac{|CD'|}{|XC|} = 2$, mistõttu

$$\frac{|XD|}{|XC|} = \frac{|CD| + |XC|}{|XC|} = \frac{|CD|}{|XC|} + 1 = \frac{|CD'|}{|XC|} + 1 = 2 + 1 = 3.$$

6. *(Maksim Ivanov)*

Art, Ben, Carmen ja Deivi tegid kokku 62 Messengeri postitust, kusjuures keegi ei teinud kahte postitust järjest. Art ja Carmen tegid kokku 2 postitust enam kui Ben, kellel oli 2 korda rohkem postitusi kui Deivil. On teada, et Ben ei kirjutanud kordagi kohe pärast Carmenit, kes omakorda ei teinud ühtki postitust kohe pärast Arti. Iga Deivi postitus järgnes vahetult Beni postitusele, igale Deivi postitusele aga järgnes omakorda vahetult Beni postitus. Kes neist neljast tegi viimase postituse?

Vastus: Art.

Lahendus. Olgu Ardi, Beni, Carmeni ja Deivi postituste arvud vastavalt a, b, c ja d. Ülesande tingimuste põhjal $a + c = b + 2$ ja $b = 2d$, kust $a + c = 2d + 2$. Samuti saame ülesande tingimustest $a + b + c + d = 62$, kust $a + c = 62 - b - d = 62 - 3d$. Kokkuvõttes $62 - 3d = 2d + 2$, kust $5d = 60$ ehk $d = 12$. Seega $b = 24$ ja $a + c = 26$.

Carmeni postitusele ei saa tingimuste kohaselt järgneda Beni postitus ega Carmeni enda postitus, samuti ei saa Carmeni postitusele järgneda Deivi postitus, sest kõik Deivi postitused järgnevad Beni postitustele. Seega saab Carmeni postitusele järgneda ainult Ardi postitus. Järelikult $a \geqslant c - 1$ (kui Carmeni postitus oleks viimane, siis sellele ei peaks järgnema Ardi postitust). Et aga $a + c$ on paarisarv, siis $a = c - 1$ pole võimalik. Seega $a \geqslant c$, millest saame $a \geqslant 13$.

Ardi postitusele ei saa tingimuste kohaselt järgneda Carmeni postitus ega Ardi enda postitus, samuti ei saa Ardi postitusele järgneda Deivi postitus. Seega saab Ardi postitusele järgneda ainult Beni postitus. Samuti järgneb Deivi postitusele alati Beni postitus. Eelmistes lõikudes tehtu põhjal aga $a + d \geqslant 13 + 12 = 25 > b$ ehk Ardi ja Deivi postitusi on kokku rohkem kui Beni omi. Seega peab üks Ardi ja Deivi postitustest olema viimane. Et Deivi postitus ei saa olla viimane, siis viimase postituse pidi tegema Art.

Märkus. Postituste järjestus pole tingimustega üheselt määratud. Tähistades Ardi, Beni, Carmeni ja Deivi postitused tähtedega A, B, C ja D, on lihtsaim tingimusi rahuldav võimalus selline, kus plokid CA ja BDB omavahel vahelduvad, kusjuures nii esimene kui ka viimane plokk on CA. Leidub aga ka keerulisemaid variante, näiteks võivad omavahel vahelduda plokid CA ja $BCABDBDB$, kusjuures jällegi on nii esimene kui ka viimane plokk CA. Üldiselt sobivad parajasti kõik sellised järgnevused, kus nii alguses kui ka lõpus on CA, nende vahel aga esineb B täpselt 24 korda vaheldumisi D-dega ja CA-dega nii, et D-sid on kokku täpselt 12 tükki.

Lahendused

1. *(Maksim Ivanov)*

Positiivsed reaalarvud a, b, c ja d rahuldavad võrdusi $a - d = b$, $b \cdot a = c$, $c + b = d$ ja $d : c = a$. Leia $a + b + c + d$.

Vastus: $\dfrac{15 + 11\sqrt{5}}{10}$.

Lahendus 1. Et esimese võrduse põhjal $b = a - d$, siis

$$a + b + c + d = a + (a - d) + c + d = 2a + c.$$

Kui oleks $a = 0$, siis teisest võrdusest saaksime $c = 0$, mis on vastuolus neljanda võrdusega. Järelikult teise ja neljanda võrduse saab ümber kirjutada vastavalt kujul $b = \dfrac{c}{a}$ ja $d = ca$. Asendades siit kolmandasse võrdusse, saame võrduse $c + \dfrac{c}{a} = ca$, mille poolte korrutamisel arvuga $\dfrac{a}{c}$ saame $a + 1 = a^2$. Asendades aga esimesse võrdusse, saame $a - ca = \dfrac{c}{a}$, kust $c\left(a + \dfrac{1}{a}\right) = a$. Kordaja $a + \dfrac{1}{a}$ on ühemärgiliste liidetavate summana nullist erinev, mistõttu $c = \dfrac{a}{a + \frac{1}{a}} = \dfrac{a^2}{a^2 + 1}$.

Võrdus $a + 1 = a^2$ esitub samaväärselt kujul $a^2 - a - 1 = 0$, kust positiivsust arvestades $a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Seega $a^2 = a + 1 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ja $a^2 + 1 = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}$. Siit saame $c = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = \dfrac{(3 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})} = \dfrac{10 + 2\sqrt{5}}{20} = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{10}$. Järelikult küsitud summa on $2 \cdot \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} + \dfrac{5 + \sqrt{5}}{10}$ ehk $\dfrac{15 + 11\sqrt{5}}{10}$.

Lahendus 2. Esimesest ja kolmandast võrdusest saame vastavalt $a = d + b$ ja $c = d - b$, mille pooliti liitmisel ja korrutamisel saame vastavalt $a + c = 2d$ ja $a \cdot c = (d + b)(d - b) = d^2 - b^2$. Arvestades neljandat võrdust, saame kokkuvõttes $d = d^2 - b^2$ ehk $b^2 = d^2 - d$. Asendades aga eelnevalt avaldatud a ja c teise võrdusse, saame $b(b + d) = d - b$, kust $d(b - 1) = -b(b + 1)$. Et $b = 1$

viiks vastuoluni (vasak pool 0, parem pool -2), siis saame $d = -\dfrac{b(b+1)}{b-1}$. Asendades siit võrdusse $b^2 = d^2 - d$, saame b suhtes võrrandi

$$b^2 = \frac{b^2(b+1)^2}{(b-1)^2} + \frac{b(b+1)}{b-1}.$$

Kui oleks $b = 0$, siis teisest ülesande võrdusest saaksime $c = 0$, mis on vastuolus neljanda võrdusega. Seega saadud võrrandi poolte korrutamisel murruga $\dfrac{(b-1)^2}{b}$ saame samaväärse võrrandi $b(b-1)^2 = b(b+1)^2 + (b+1)(b-1)$, mis lihtsustub kujule $5b^2 = 1$. Positiivsust arvestades $b = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Seega

$$\begin{aligned} d &= -\frac{b(b+1)}{b-1} = -\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}+1\right)}{\frac{\sqrt{5}}{5}-1} = -\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \\ &= \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)} = \frac{10+6\sqrt{5}}{20} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}. \end{aligned}$$

Viimaks saame

$$a+b+c+d = (a+c)+(b+d) = 2d+b+d = b+3d = \frac{15+11\sqrt{5}}{10}.$$

2. *(Kaarel Hänni, Maksim Ivanov)*

Urnis on n palli ($n \geqslant 3$), mis on nummerdatud täisarvudega $1, 2, \ldots, n$. Võimaluste arv võtta urnist 3 palli nii, et suurima numbriga pall oleks võetud pallide seas, on täpselt 3 korda väiksem võimaluste arvust võtta urnist 3 palli nii, et suurima numbriga palli poleks võetud pallide seas (pallide võtmise järjekorda ei arvestata). Leia n.

Vastus: 12.

Lahendus 1. Võimalusi võtta urnist 3 palli on kokku C_n^3. Võtmaks urnist 3 palli nii, et suurima numbriga pall oleks võetud pallide seas, tuleb võtta suurima numbriga pall ja veel 2 palli ülejäänute seast. Selleks on C_{n-1}^2 võimalust. Seega võimalusi võtta urnist n palli nii, et suurima numbriga palli poleks võetud pallide seas, on $C_n^3 - C_{n-1}^2$. Ülesande tingimuste põhjal saame arvu n määramiseks võrrandi $C_{n-1}^2 \cdot 3 = C_n^3 - C_{n-1}^2$, mis lihtsustub kujule $C_{n-1}^2 \cdot 4 = C_n^3$. Arvestades, et $C_n^3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ ja $C_{n-1}^2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$, saame $2(n-1)(n-2) = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Kuna $n \geqslant 3$, siis $(n-1)(n-2) \neq 0$, mistõttu taandades ühiste teguritega saame samaväärse võrrandi $2 = \dfrac{n}{6}$, kust $n = 12$.

Lahendus 2. Võtmaks urnist 3 palli nii, et suurima numbriga pall oleks võetud pallide seas, tuleb võtta suurima numbriga pall ja veel 2 palli ülejäänute seast. Selleks on C_{n-1}^2 võimalust. Võtmaks urnist 3 palli nii, et suurima numbriga palli poleks võetud, tuleb võtta 3 palli ülejäänute seast. Selleks on C_{n-1}^3 võimalust. Ülesande tingimuste põhjal saame arvu n määramiseks võrrandi $C_{n-1}^2 \cdot 3 = C_{n-1}^3$. Arvestades, et $C_{n-1}^2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ ja $C_{n-1}^3 = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$, siis $\dfrac{3(n-1)(n-2)}{2} = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$. Kuna $n \geqslant 3$, siis $(n-1)(n-2) \neq 0$, mistõttu taandades ühiste teguritega saame samaväärse võrrandi $\dfrac{3}{2} = \dfrac{n-3}{6}$, kust $n = 12$.

3. *(Härmel Nestra)*

Kas leiduvad täisarvud x ja y, mille korral

a) $x^2 - xy + y^2 = 2021$?

b) $x^2 - xy + y^2 = 2022$?

Vastus: a) ei; b) ei.

Lahendus 1.

a) Oletame, et x jagub 3-ga. Siis kaks esimest liidetavat võrrandi vasakul pool jaguvad 3-ga, mistõttu annab kogu vasak pool 3-ga jagades sama jäägi nagu y^2. Täisarvude ruudud annavad 3-ga jagades jäägiks 0 või 1, sest $(3k)^2 = 9k^2 = 3 \cdot 3k^2$ ja $(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3 \cdot (3k^2 \pm 2k) + 1$. Seega võrrandi vasak pool annab 3-ga jagades jäägiks 0 või 1.

   Juht, kus y jagub 3-ga, on sümmeetriline. Kui aga kumbki arvudest x ja y ei jagu 3-ga, siis x^2 ja y^2 annavad 3-ga jagades jäägiks 1, mistõttu $x^2 + y^2$ annab 3-ga jagades jäägi 2. Kuna xy ei jagu 3-ga, siis terve vasaku poole jääk 3-ga jagamisel on 2-st erinev ehk jällegi kas 0 või 1.

   Kuid parem pool 2021 annab 3-ga jagades jäägi 2. Vastuolu näitab, et võrrandil täisarvulisi lahendeid ei leidu.

b) Oletame, et x jagub 2-ga. Siis kaks esimest liidetavat võrrandi vasakul pool jaguvad 2-ga. Seega võrduse kehtimiseks peab ka y jaguma 2-ga. Siis aga jaguvad võrrandi vasaku poole kõik liidetavad 4-ga, mistõttu kogu vasak pool jagub 4-ga. Parem pool 2022 aga 4-ga ei jagu.

   Juht, kus y jagub 2-ga, on sümmeetriline. Kui aga kumbki arvudest x ja y ei jagu 2-ga, siis vasaku poole kõik kolm liidetavat on paaritud, mistõttu kogu vasak pool on paaritu. Parem pool aga on paaris.

   Vastuolu kõikidel juhtudel näitab, et võrrandil täisarvulisi lahendeid ei leidu.

Lahendus 2. Võrrandi $x^2 - xy + y^2 = a$ saab samaväärselt ümber kirjutada kujul $x^2 - xy + y^2 - a = 0$. Vaadeldes seda ruutvõrrandina x suhtes, saame $x = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(y^2 - a)}}{2} = \dfrac{y \pm \sqrt{4a - 3y^2}}{2}$. Selleks, et x ja y oleksid

täisarvud, peab $4a - 3y^2$ olema täisarvu ruut. Teisalt, kui $4a - 3y^2$ on täisarvu ruut ning a ja y on täisarvud, siis $4a - 3y^2$ on sama paarsusega nagu $3y^2$, mis omakorda on sama paarsusega nagu y. Seega lugejas liidetakse või lahutatakse kaks sama paarsusega täisarvu, millest tulenevalt on x täisarv. Kokkuvõttes leidub võrrandil $x^2 - xy + y^2 = a$ täisarvuline lahend (x, y) parajasti siis, kui leidub täisarv y, mille korral $4a - 3y^2$ on mingi täisarvu ruut.

a) Et 4 ja 2021 annavad 3-ga jagades vastavalt jäägi 1 ja 2, siis $4 \cdot 2021$ annab 3-ga jagades jäägi 2. Siis ka $4 \cdot 2021 - 3y^2$ annab 3-ga jagades jäägi 2. Kuid jääkide 0, 1, 2 läbivaatus näitab, et ühegi täisarvu ruut ei anna 3-ga jagades jäägiks 2. Seega võrrandil $x^2 - xy + y^2 = 2021$ täisarvulised lahendid puuduvad.

b) Tegurdades saame $4 \cdot 2022 - 3y^2 = 3\left(4 \cdot 674 - y^2\right)$. Kui see arv oleks täisarvu ruut, peaks tegur $4 \cdot 674 - y^2$ jaguma 3-ga. Et 4 ja 674 annavad 3-ga jagades jäägiks vastavalt 1 ja 2, siis $4 \cdot 674$ annab 3-ga jagades jäägiks 2. Samas y^2 ei anna 3-ga jagades jääki 2, mistõttu $4 \cdot 674 - y^2$ ei saa jaguda 3-ga. Seega võrrandil $x^2 - xy + y^2 = 2022$ täisarvulised lahendid puuduvad.

4. *(Härmel Nestra)*

Tahvlil on mingi erinevatest numbritest koosnev viiekohaline arv. Juku liidab kokku kõik muud sellest arvust numbrite ümberjärjestamise teel saadavad viiekohalised arvud. Leia algne arv, mille korral saadav summa on suurim võimalik.

Vastus: 56789.

Lahendus 1. Olgu algne arv n ja olgu s kõigi numbritest $5, 6, 7, 8, 9$ koosnevate viiekohaliste arvude summa.

Kui n koosneb numbritest $5, 6, 7, 8, 9$, siis kõigi temast numbrite ümberjärjestamisega saadavate arvude summa on $s - n$. See on suurim juhul, kui n on vähim ehk 56789.

Kui n koosneb mingitest muudest numbritest, siis saab arvude n ja 56789 numbrid seada vastavusse nii, et arvu n ükski number ei ole suurem arvu 56789 vastavast numbrist, kusjuures vähemalt üks number arvus n on arvu 56789 vastavast numbrist väiksem. Sama kehtib ka ümberjärjestatud numbrite korral. Seega arvu n numbrite ümberjärjestusel saadavad arvud on väiksemad arvu 56789 vastavate numbrite ümberjärjestusel saadavatest arvudest, mistõttu ka ülesande summa arvu n korral on väiksem summast arvu 56789 korral.

Kokkuvõttes on otsitav arv 56789.

Lahendus 2. Olgu antud arv $\overline{ABCDE}$. Liites kokku selle arvu kõik numbrite ümberjärjestamisel saaavad arvud (peale arvu enda), esineb numbrit A

esimesel positsioonil 23 korda ja kõigil ülejäänud positsioonidel 24 korda, numbrit B teisel positsioonil 23 korda ja kõigil ülejäänud positsioonidel 24 korda, numbrit C kolmandal positsioonil 23 korda ja kõigil ülejäänud positsioonidel 24 korda, numbrit D neljandal positsioonil 23 korda ja kõigil ülejäänud positsioonidel 24 korda ning numbrit E viiendal positsioonil 23 korda ja kõigil ülejäänud positsioonidel 24 korda. Seega see summa avaldub kujul

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D + \varepsilon E, \tag{1}$$

kus $\alpha = 230000+24000+2400+240+24$, $\beta = 240000+23000+2400+240+24$, $\gamma = 240000 + 24000 + 2300 + 240 + 24$, $\delta = 240000 + 24000 + 2400 + 230 + 24$ ja $\varepsilon = 240000 + 24000 + 2400 + 240 + 23$. Ilmselt $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$. Ümberpaigutusvõrratuse põhjal on fikseeritud numbrite A, B, C, D, E hulga korral summa (1) suurim siis, kui $A < B < C < D < E$. Seega on ülesande summa suurim arvu 56789 korral, sest muude arvude $\overline{ABCDE}$ korral peaks olema $A < 5$, $B \leqslant 6$, $C \leqslant 7$, $D \leqslant 8$ ja $E \leqslant 9$, mis annaks väiksema summa (1) kui 56789.

5. *(Härmel Nestra)*

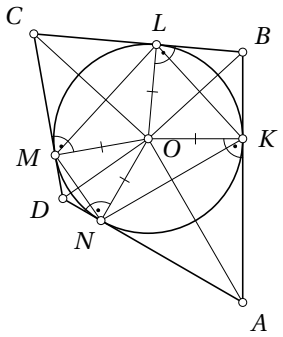
Ringjoon puutub nelinurga $ABCD$ külgi AB, BC, CD ja DA vastavalt punktides K, L, M ja N. Tõesta, et lõikude AN, BK, CL ja DM pikkused suhtuvad nagu nurkade ANK, BKL, CLM ja DMN tangensid.

Lahendus 1. Olgu ringjoone raadius r ja keskpunkt O (joonis 11). Puutujalõikude võrdsusest $|AN| = |AK|$, mistõttu $\angle ANK = \angle AKN$. Et puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega, siis $\angle ONA = \angle OKA = 90^\circ$. Järelikult $ONAK$ on kõõlnelinurk, mistõttu $\angle AKN = \angle AON$. Kokkuvõttes $\angle ANK = \angle AON$. Seega $\tan\angle ANK = \tan\angle AON = \dfrac{|AN|}{|ON|} = \dfrac{|AN|}{r}$ ehk $|AN| = r\tan\angle ANK$. Sarnaselt saame võrdused $|BK| = r\tan\angle BKL$, $|CL| = r\tan\angle CLM$ ja $|DM| = r\tan\angle DMN$. Seega

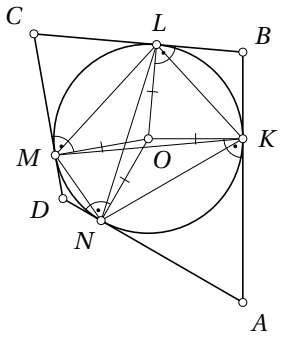
$$\frac{|AN|}{\tan\angle ANK} = \frac{|BK|}{\tan\angle BKL} = \frac{|CL|}{\tan\angle CLM} = \frac{|DM|}{\tan\angle DMN} = r,$$

millega ülesanne on lahendatud.

Lahendus 2. Olgu ringjoone raadius r. Siinusteoreemist kolmnurgas KLN saame $|NK| = 2r\sin\angle KLN$ (joonis 12). Puutuja ja kõõlu teoreemi põhjal aga $\angle KLN = \angle ANK$. Seega $\dfrac{|NK|}{2} = r\sin\angle ANK$. Et puutujalõikude võrdsuse põhjal $|AN| = |AK|$ ja võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud kõrgus poolitab aluse, siis $\dfrac{|NK|}{2} = |AN|\cos\angle ANK$. Kokkuvõttes $r\sin\angle ANK = |AN|\cos\angle ANK$, kust $|AN| = r\tan\angle ANK$. Sarnaselt saame $|BK| = r\tan\angle BKL$, $|CL| = r\tan\angle CLM$ ja $|DM| = r\tan\angle DMN$. Seega $\dfrac{|AN|}{\tan\angle ANK} = \dfrac{|BK|}{\tan\angle BKL} = \dfrac{|CL|}{\tan\angle CLM} = \dfrac{|DM|}{\tan\angle DMN} = r$, millega ülesanne on lahendatud.



Joonis 11



Joonis 12

6. *(Kaarel Hänni)*

On antud positiivne täisarv n. Arvteljel on eesel, kes jookseb alati mööda arvtelge konstantse kiirusega $v = 1$ mingis suunas. Ajahetkel $t = 0$ alustab eesel jooksmist arvtelje punktist $x = 0$ arvtelje positiivses suunas. Shrekil on kotis n porgandit, mida ta vabalt valitud aegadel saab ühekaupa asetada arvtelje vabalt valitud punktidesse, kus eesel hetkel ei viibi. Eesel muudab jooksusuunda siis ja ainult siis, kui tema selja taha jääb kokku rohkem porgandeid kui on tema ees. Kui eesel jõuab mõne porgandini, siis ta sööb selle ära. Leia suurim arv, mitu korda saab eesel kirjeldatud protsessi käigus suunda vahetada.

Vastus: n.

Lahendus. Kui Shrek asetab porgandid ajahetkedel $t = 1, 2, 3, 4, \ldots$ koordinaatidele $0, 1, 0, 1, \ldots$, siis muudab eesel jooksusuunda iga kord, kui on järgmise porgandi söönud, kokku n korda. Näitame nüüd, et rohkem kui n korda pole suunda vahetada võimalik. Vastavalt ülesande tingimustele saab suunavahetus toimuda vaid siis, kui porgandite arv arvteljel muutub. Arvteljel olevate porgandite arv saab muutuda vaid siis, kui Shrek asetab arvteljele porgandi või kui eesel sööb mõne porgandi ära. Kuna kumbki sündmus saab toimuda ülimalt n korda, saab porgandite arv muutuda ülimalt $2n$ korda. Paneme tähele, et igast kahest järjestikusest porgandite arvu muutusest saab ülimalt üks põhjustada suunavahetuse, sest kui esimene kahest muutusest põhjustab suunavahetuse, siis peab pärast seda olema ühel pool eeslit täpselt üks porgand rohkem kui teisel pool, aga siis ei saa järgmine muutus üksi suunavahetust põhjustada. Kui porgandite arv muutub täpselt k korda, siis saab suunavahetusi järelikult olla kokku ülimalt $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$, kus $\lceil x \rceil$ tähistab vähimat täisarvu, mis pole väiksem kui x. Jääb märgata, et $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{2n}{2} \right\rceil = n$.

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendused

1. *(Härmel Nestra)*

Ats ja Pets mängisid lumesõda. Pets saatis teele 25 kuuli rohkem kui Ats, vastast tabas aga 2 võrra vähem Petsi kuule kui Atsi omi. Kui aga Atsi oleksid tabanud kõik Petsi kuulid, kõik Atsi enda kuulid ja veel üks kuul, siis oleks Ats pihta saanud 6 korda rohkem kordi kui ta tegelikult sai. Atsi kuulidest tabas Petsi 40%. Mitu protsenti Petsi kuulidest tabas Atsi?

Vastus: 30.

Lahendus 1. Olgu Atsi teelesaadetud kuulide arv a. Siis Petsi teelesaadetud kuulide arv on $a + 25$, Petsi tabanud Atsi kuulide arv aga $0{,}4a$. Seega Ats ise sai pihta $0{,}4a - 2$ kuuliga. Ülesande tingimustest saame võrrandi $(a + 25) + a + 1 = 6(0{,}4a - 2)$, mis annab $0{,}4a = 38$ ehk $a = 95$. Seega Pets saatis teele $95 + 25$ ehk 120 kuuli, millest tabas $38 - 2$ ehk 36. Tabanud Petsi kuulide osakaal on $\frac{36}{120}$ ehk 30%.

Lahendus 2. Olgu Atsi ja Petsi teelesaadetud kuulide arvud vastavalt a ja b. Olgu x Petsi tabanud Atsi kuulide arv ning y Atsi tabanud Petsi kuulide arv. Ülesande tingimustest saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} b = a + 25, \\ y = x - 2, \\ 6y = b + a + 1, \\ x = 0{,}4a. \end{cases}$$

Lahendades saame $a = 95$, $b = 120$, $x = 38$ ja $y = 36$. Seega Petsi kuulidest tabas $\frac{36}{120}$ ehk 30%.

2. *(Markus Rene Pae)*

Leia kõik nurgad α, mille korral $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ja kehtib võrdus

$$4\cos\alpha = 1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \ldots$$

(võrduse paremal pool on lõpmatu summa).

Vastus: 60°.

Lahendus. Võrrandi parema poole liidetavad moodustavad geomeetrilise jada, mille esimene liige on 1 ja tegur on $\cos\alpha$. Et $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, siis $1 > \cos\alpha > -1$, millest tulenevalt on see hääbuv geomeetriline jada summaga $\dfrac{1}{1-\cos\alpha}$. Algne võrrand on seega samaväärne võrrandiga

$$4\cos\alpha = \frac{1}{1-\cos\alpha}.$$

Et $\cos\alpha \neq 1$, on see võrrand samaväärne poolte korrutamisel suurusega $1-\cos\alpha$ saadava võrrandiga, mis lihtsustub kujule

$$-4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha - 1 = 0.$$

Selle võrrandi vasak pool avaldub kujul $-(2\cos\alpha-1)^2$. Seega ainsa võimalusena saame $2\cos\alpha - 1 = 0$, kust $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. Võttes arvesse, et $0 < \alpha < 180^\circ$, on ainus võimalus $\alpha = 60^\circ$.

3. *(Hendrik Vija)*

Jukule meeldib väga number 4. Juku kirjutab tahvlile ritta mingi arvu neljasid ja mõnede neljade vahele pluss- või miinusmärke, nii et avaldise väärtuseks oleks mingi positiivse täisarvu neljas aste. Mis on vähim võimalik arv tehtemärke, mida Juku saab kasutada?

Vastus: 3.

Lahendus. Leidub variant 3 tehtemärgiga: $4+4+4+4 = 16 = 2^4$. Jääb näidata, et 2 või vähema tehtemärgiga ei ole Jukul võimalik positiivse täisarvu neljandat astet moodustada.

Ainult neljadest koosnev arv annab 8-ga jagades jäägi 4, sest ta kas on 4 või 44 või lõpeb numbritega 444. Selline arv ise ei saa olla positiivse täisarvu neljas aste, kuna ta jagub algarvuga 2, kuid mitte arvuga 2^4. Järelikult peab Juku kasutama rohkem kui 0 tehtemärki.

Kui Juku kasutab 1 tehtemärki, siis vaatleme kaht varianti.

- Kui märk on $-$, siis et tulemuseks oleks positiivne arv, peavad vähendatav ja vähendaja olema erinevad. Seega on tulemus kujul $4\ldots40\ldots0$. Siis aga peab arvu lõpus olevate nullide arv jaguma 4-ga ning ka esimestest neljadest moodustuv arv olema mingi positiivse täisarvu neljas aste. Viimane aga pole eelneva põhjal võimalik.
- Kui märk on $+$, siis tulemuseks oleva arvu viimane number on 8. Kuid ühegi neljanda astme viimane number pole 8, sest neljandad astmed on ruudud ja ruudud saavad lõppeda vaid numbritega 0, 1, 4, 5, 6 ja 9.

Kui Juku kasutab 2 tehtemärki, siis on avaldises kokku 3 liiget. Et iga liige annab arvuga 8 jagamisel jäägi 4, siis ka kogu avaldise väärtus annab arvuga 8 jagamisel jäägi 4. Sarnaselt varasematele juhtudele ei saa tegemist olla positiivse täisarvu neljanda astmega.

4. *(Urve Kangro)*

Leia kõik reaalarvud x, mis rahuldavad võrrandit $3^x + 4^x = 5^x$.

Vastus: 2.

Lahendus 1. Ilmselt $x = 2$ on lahend. Kui $x > 2$, siis $x - 2 > 0$, mistõttu võrratusest $1 < a < b$ järeldub $a^{x-2} < b^{x-2}$. Seega

$$3^x + 4^x = 3^2 \cdot 3^{x-2} + 4^2 \cdot 4^{x-2} < 3^2 \cdot 5^{x-2} + 4^2 \cdot 5^{x-2} = 5^2 \cdot 5^{x-2} = 5^x.$$

Kui $x < 2$, siis $x - 2 < 0$, mistõttu võrratusest $1 < a < b$ järeldub $a^{x-2} > b^{x-2}$. Seega

$$3^x + 4^x = 3^2 \cdot 3^{x-2} + 4^2 \cdot 4^{x-2} > 3^2 \cdot 5^{x-2} + 4^2 \cdot 5^{x-2} = 5^2 \cdot 5^{x-2} = 5^x.$$

Seega rohkem lahendeid pole.

Lahendus 2. Antud võrrandi poolte jagamisel suurusega 5^x saame samaväärse võrrandi $0{,}6^x + 0{,}8^x = 1$. Paneme tähele, et $x = 2$ on selle võrrandi lahend. Kuna $y = 0{,}6^x$ ja $y = 0{,}8^x$ on mõlemad kahanevad funktsioonid, siis $x < 2$ puhul saame $0{,}6^x + 0{,}8^x > 1$ ja $x > 2$ puhul $0{,}6^x + 0{,}8^x < 1$. Järelikult rohkem lahendeid pole.

5. *(Maksim Ivanov)*

Kaks ringjoont raadiustega r_1 ja r_2 puutuvad teineteist välimiselt punktis C ning mingit üht ja sama sirget vastavalt punktides A ja B, kus $A \neq B$.

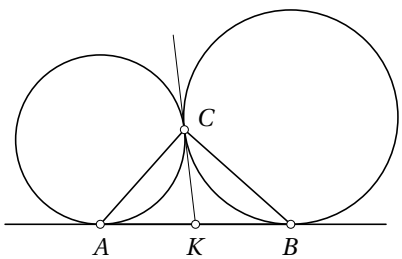
a) Tõesta, et kolmnurk ABC on täisnurkne.

b) Avalda kolmnurga ABC pindala S raadiuste r_1 ja r_2 kaudu.

Vastus: b) $S = \dfrac{2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \cdot \sqrt{r_1 r_2}$.

Lahendus 1.

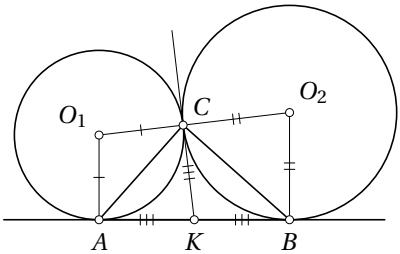
a) Lõikugu ringjoonte puutepunkti C läbiv ühispuutuja sirget AB punktis K (joonis 13). Puutujalõikude võrdsuse tõttu $|AK| = |CK| = |BK|$. Seega K on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt. Et K asub selle kolmnurga küljel AB, on kolmnurk ABC täisnurkne, kusjuures $\angle ACB = 90^\circ$.



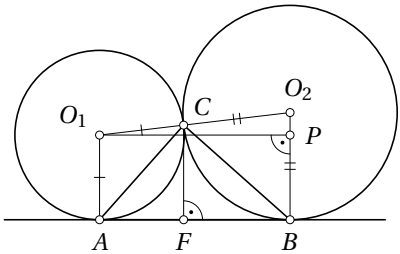
Joonis 13

b) Olgu ringjoonte keskpunktid vastavalt O_1 ja O_2 (joonis 14) ning tähistame $|BC| = a$, $|AC| = b$ ja $|AK| = |CK| = |BK| = x$. Et puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega, siis $\angle O_1AB = \angle O_1CK = 90^\circ$, kust $\angle AO_1C + \angle AKC = 180^\circ$. Seega $\angle AO_1C = 180^\circ - \angle AKC = \angle BKC$, mistõttu võrdhaarsed kolmnurgad AO_1C ja BKC on sarnased. Siit $\dfrac{r_1}{x} = \dfrac{b}{a}$. Analoogselt saame kolmnurkade BO_2C ja AKC sarnasusest $\dfrac{r_2}{x} = \dfrac{a}{b}$. Korrutades nende kahe võrduse vastavad pooled, saame $\dfrac{r_1r_2}{x^2} = 1$, kust $x^2 = r_1r_2$. Samade võrduste poolte jagamisel aga saame $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{b^2}{a^2}$. Samas Pythagorase teoreem kolmnurgas ABC annab $a^2 + b^2 = 4x^2$, kust eelneva põhjal $a^2\left(1 + \dfrac{r_1}{r_2}\right) = 4r_1r_2$ ehk $a^2 = \dfrac{4r_1r_2}{1 + \frac{r_1}{r_2}} = \dfrac{4}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \cdot r_2$. Kokkuvõttes

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \cdot r_2 \cdot \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \frac{2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \cdot \sqrt{r_1r_2}.$$



Joonis 14



Joonis 15

Lahendus 2.

b) Eeldame üldisust kitsendamata, et $r_1 \leqslant r_2$ (kui $r_1 > r_2$, võime ringjoonte rollid vahetada). Nagu lahenduses 1 tähistagu O_1 ja O_2 ringjoonte keskpunkte; olgu F kolmnurga ABC tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt ja P punktist O_1 sirgele BO_2 tõmmatud ristlõigu aluspunkt (joonis 15). Tähistame veel $c = |AB|$ ja $h = |CF|$.

Kasutades Pythagorase teoreemi täisnurkses kolmnurgas O_1O_2P, saame $|O_1P|^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2$. Et $ABPO_1$ on ristkülik, siis $|O_1P| = c$; järelikult $c^2 = 4r_1r_2$ ehk $c = 2\sqrt{r_1r_2}$. Nurga PO_1O_2 haarade lõikamisest paralleelsete sirgetega CF ja O_2B saame võrde

$$\frac{h-r_1}{|O_2P|} = \frac{|O_1C|}{|O_1O_2|} \text{ ehk } \frac{h-r_1}{r_2-r_1} = \frac{r_1}{r_2+r_1}, \text{ kust}$$

$$h = r_1\left(1+\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}\right) = \frac{2r_1r_2}{r_2+r_1} = \frac{2}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}.$$

Kokkuvõttes $S = \frac{1}{2}ch = \sqrt{r_1r_2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}$.

Märkus. Ülesande b-osa vastus näitab, et kolmnurga ABC pindala võrdub ringjoonte raadiuste harmoonilise ja geomeetrilise keskmise korrutisega.

6. *(Erik Paemurru)*

Olgu $n \geqslant 3$ täisarv. Ütleme, et lõplik hulk n-nurki ruumis (mis ei pea olema korrapärased) on kuubi *kate*, kui kehtivad kõik järgnevad tingimused:

1) iga punkt, mis kuulub mõnele selle hulga n-nurgale, asub kuubi pinnal;
2) iga punkt kuubi pinnal kuulub mingile n-nurgale sellest hulgast;
3) alati, kui mõni punkt kuulub mitmele n-nurgale sellest hulgast, on ta kõigi nende n-nurkade tipp või asub kõigi nende n-nurkade küljel, kuid pole ühegi n-nurga tipp;
4) iga n-nurk selles hulgas on kumer ja asub tervikuna ühel tasandil.

Kas kuubil leidub kate, kui

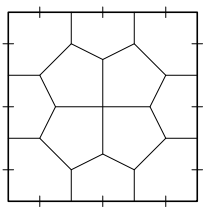
a) $n = 3$;
b) $n = 5$?

Märkus. Öeldakse, et punkt X *kuulub n-nurgale*, kui X on selle n-nurga tipp, asub tema küljel või asub tema sees.

Vastus: a) jah; b) jah.

Lahendus.

a) Piisab jaotada kuubi iga tahk ühe diagonaaliga kaheks kolmnurgaks.
b) Võib jaotada kuubi iga tahu viisnurkadeks nagu joonisel 16.



Joonis 16

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning on näidatud iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

   Mõnes skeemis on mõne etapi kirjelduse all („*Sealhulgas:*“ järel) alapunktidena välja toodud konkreetse etapi väiksemate osade eest antavad punktid – need lähevad käiku juhul, kui lahenduse see etapp on ebatäielik või vigane ja selle osa täispunkte seetõttu ei saa anda. Alamosade punktid tuleb omavahel samuti liita.

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud

vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala ...?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Teistes ühikutes väljendatud sama suurus tuleb lugeda õigeks, näiteks vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ on samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit ...?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu ...?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Teistes ühikutes antud vastus tuleb aga lugeda valeks, vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole siin samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa hindamisjuhised

1.	◦ Antud õige vastus 17.07:	2 p
2.	◦ Antud õige vastus 5:	2 p
3.	◦ Antud õige vastus 4:	2 p
4.	◦ Antud õige vastus 11:	2 p
5.	◦ Antud õige vastus 2:	2 p
6.	◦ Antud õige vastus 21 cm:	2 p
	◦ Antud vastuseks 21 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
7.	◦ Antud õige vastus 28 cm^2:	2 p
	◦ Antud vastuseks 28 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
8.	◦ Antud õige vastus 7:	2 p
9.	◦ Antud õige vastus 3:	2 p
10.	◦ Antud õige vastus 10:	2 p

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa hindamisjuhised

1. ∘ Antud õige vastus 1000: 2 p

2. ∘ Antud õige vastus 1: 2 p

3. ∘ Antud õige vastus 5: 2 p

4. ∘ Antud õige vastus 320 (või 320 g): 2 p

5. ∘ Antud õige vastus 180: 2 p

6. ∘ Antud õige vastus 26 cm: 2 p
∘ Antud vastuseks 26 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

7. ∘ Antud õige vastus 24,5 cm^2 (või $\frac{49}{2}$ cm^2): 2 p
∘ Antud vastuseks 24,5 (või $\frac{49}{2}$) ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8. ∘ Antud õige vastus 72° (või $\frac{2}{5}\pi$): 2 p
∘ Antud vastuseks 72 ilma kraadimärgita: 1 p

9. ∘ Antud õige vastus 45: 2 p

10. ∘ Antud õige vastus 10: 2 p

Eesti 69. matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2022 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 11: 2 p
- Antud vastuseks taandamata harilik murd väärtusega 11: 1 p

2.
- Antud õige vastus 10: 2 p

3.
- Antud õige vastus 3: 2 p

4.
- Antud õige vastus 150: 2 p

5.
- Antud õige vastus 2,5 (või $\frac{5}{2}$): 2 p

6.
- Antud õige vastus 72° (või $\frac{2}{5}\pi$): 2 p
- Antud vastuseks 72 ilma kraadimärgita: 1 p

7.
- Antud õige vastus 36 cm^2: 2 p
- Antud vastuseks 36 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8.
- Antud õige vastus 20 cm: 2 p
- Antud vastuseks 20 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

9.
- Antud õige vastus 5: 2 p

10.
- Antud õige vastus 6: 2 p

II osa hindamisjuhised

1.
- Leitud ruudu küljepikkus koos ammendava põhjendusega: 2 p
  Sealhulgas:
  - Koostatud õige lineaarvõrrand ruudu küljepikkuse leidmiseks: *1 p*
- Leitud ruudu ümbermõõt ja märgatud, et see on ühtlasi parempoolse ristküliku ümbermõõt: 1 p
- Leitud parempoolse ristküliku vertikaalse külje pikkus: 1 p
- Leitud vasakpoolse ristküliku vertikaalse külje pikkus (või põhjendatud, et see on väiksem kui parempoolse ristküliku vertikaalse külje pikkus): 1 p
- Arvutuse või ammendava mõttekäigu abil leitud kujundi ümbermõõt: 2 p
  Sealhulgas:
  - Täiendatud kujund teda hõlmavaks ristkülikuks ja märgitud, et ümbermõõt jääb samaks: *1 p*

Ühiku puudumise või vale ühiku korral lõppvastuses anda viimase rea järgi 1 punkt vähem.

Ainult õige vastuse (60 cm) eest ilma selgituseta anda 2 punkti, ühiku puudumise või vale ühiku korral 1 punkt.

2.
- Märgatud võrdhaarsust ja kasutatud seda alusnurkade leidmisel: 1 p
- Korrektselt leitud nurga AMK suurus: 2 p
- Korrektselt leitud nurga KNA suurus: 2 p
- Korrektselt leitud nurga MKN suurus: 2 p

Kraadimärkide puudumisel lõppvastuses anda skeemi kolme viimase rea järgi kokku 1 punkt vähem.

Ainult täieliku õige vastuse (esitatud kõik kolm õiget nurka kas õiges järjestuses või muul viisil, nii et vastavus küsitud nurkadega on üheselt mõistetav) eest ilma selgituseta anda 2 punkti, kahe õige nurga korral 1 punkt.

3.
- Avastatud tsükkel ja tehtud kindlaks tema rekvisiidid (pikkus 6, esimese liikme järjekorranumber 3): 1 p
- Täielikult lahendatud ülesande a-osa: 2 p

- Täielikult lahendatud ülesande b-osa: 4 p

  Sealhulgas:

  - Leitud tsükli numbrite summa 24 ja teostatud jäägiga jagamine $777 = 24 \cdot 32 + 9$: *1 p*
  - Leitud liidetavate arv juhul, kui esimene liidetav on 2: *1 p*
  - Põhjendatud, et kui esimene liidetav on 7, siis ei saa summa tulla 777: *1 p*
  - Põhjendatud, et rohkem võimalusi pole: *1 p*

Ainult mõlema osa õige vastuse (337 ja 194) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, ainult ühe osa õige vastuse eest 1 punkt.

II osa hindamisjuhised

1.
- Lahendatud a-osa: 5 p

  Sealhulgas:
  - Võetud kasutusele sobivad muutujad ja nende kaudu väljendatud seosed ema ja laste vanuste vahel: *2 p*
  - Teisenduste teel jõutud seoseni $5x + y = 20$, kus x ja y on laste vanused, või midagi analoogset (nt $6x + z = 20$, kus x ja y on ema vanuse numbrid): *1 p*
  - Välistatud laste vanustena muud variandid peale 3 ja 5: *2 p*
- Lahendatud b-osa: 2 p

  Sealhulgas:
  - Koostatud õige lineaarvõrrand vanaisa vanuse leidmiseks: *1 p*

Ainult mõlema osa täieliku õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult ühe osa täieliku õige vastuse eest anda 1 punkt.

2.
- Saadud võrdus $\angle ACB = \angle ABC$: 1 p
- Saadud võrdus $\angle ACD = \angle DAC$ või avaldatud mõlemad nurgad mingi muu ühe ja sama nurga kaudu ja saadud sama avaldis: 1 p
- Selgitatud, miks nurgad ABC ja CDA ei saa olla suurusega 150°: 1 p
- Näidatud, et nurk BCD ei saa olla suurusega 150°: 2 p
- Õigesti arvutatud kolme ülejäänud nurga suurused: 2 p

Kraadimärkide puudumisel lõppvastuses anda viimase rea järgi 1 punkt vähem.

Ainult täieliku õige vastuse (48°, 48° ja 114°) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult osalise õige vastuse eest, kui selles esineb nii 48° kui ka 114°, anda 1 punkt. Ainult täieliku või osalise õige vastuse eest, kus kraadimärgid on puudu, aga mis kraadimärkide olemasolul vääriksid vähemalt 1 punkti, anda 1 punkt.

3.
- Tähele pandud, et tabelis oleva 18 arvu summa peab olema arvu 6 kordne: 1 p
- Ammendavalt põhjendatud, miks arvude $1, 2, \ldots, 19$ seast tuleb välja jätta just arv 4: 2 p
- Leitud ühes veerus (reas) olevate arvude summa 31 (62): 1 p
- Arvutatud kahe esimese veeru puuduvate arvude summa 28: 1 p

- Täidetud tabel õigesti: 2 p

Ainult mõlema osa õige vastuse (28 ja tabel joonisel 5) eest ilma selgitusteta anda 3 punkti, ainult a-osa õige vastuse eest 1 punkt ja ainult b-osa täieliku õige vastuse eest 2 punkti.

II osa hindamisjuhised

1. Anname kahe erineva lahenduskäigu puhuks eraldi skeemid.

Skeem lõpunumbrite analüüsil põhinevale lahendusele.

- Põhjendatud, et otsitavad arvud on paaris: 1 p
- Põhjendatud, et otsitavate arvude viimane number on 6: 2 p
- Leitud vähemalt 9 esimest 4-ga jaguvat arvu, mis lõpevad 6-ga: 1 p
- Läbivaatuse teel või muul viisil ammendavalt põhjendatud, et sobivad vaid 56, 116 ja 176: 3 p

Skeem 60*-ga jaguvate arvude leidmist kasutavale lahendusele.*

- Selgitatud, et otsitavad arvud on parajasti sellised, millest 4 võrra suuremad arvud jaguvad 3-ga, 4-ga ja 5-ga: 3 p

  Sealhulgas:
  - Väide esitatud ainult ühesuunaliselt, nt „otsitavatest arvudest 4 võrra suuremad arvud jaguvad 3-ga, 4-ga ja 5-ga“: *2 p*
- Vähima ühiskordse abil järeldatud, et otsitavad arvud on sellised, millest 4 võrra suuremad arvud jaguvad 60-ga: 2 p
- Leitud kolm vähimat 60-ga jaguvat naturaalarvu: 1 p
- Leitud kolm vähimat nõutud omadusega naturaalarvu: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse (56, 116 ja 176) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Ammendavalt käsitletud juht, kus E on paaris: 3 p

  Sealhulgas:
  - Märgitud, et ühelistest kümnelistesse ega sajalistest tuhandelistesse ei teki ülekannet: *1 p*
- Ammendavalt käsitletud juht, kus E on paaritu: 3 p

  Sealhulgas:
  - Märgitud, et nii ühelistest kümnelistesse kui ka sajalistest tuhandelistesse tekib ülekanne: *1 p*
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Ainult õige vastuse (ei) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

3.
- Kasutatud diagonaali AC poolt eraldatud kolmnurki eesmärgiga avaldada ülesandes jutuks olevaid pindalasid: 2 p

- Märgatud, et kolmnurga ACK pindala on 2 korda väiksem kui kolmnurga BCK pindala (või 3 korda väiksem kui kolmnurga ACB pindala): 1 p
- Märgatud, et kolmnurga ADL pindala on 3 korda väiksem kui kolmnurga ACL pindala (või 4 korda väiksem kui kolmnurga ACD pindala): 1 p
- Koostatud õige lineaarvõrrandisüsteem, millest saab arvutada vajalikud pindalad: 1 p
- Võrrandisüsteem õigesti lahendatud: 1 p
- Saadud õige lõppvastus: 1 p

Ühiku puudumise või vale ühiku korral lõppvastuses anda viimase rea järgi 0 punkti.

Ainult õige vastuse (868 cm^2) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt, ühiku puudumise või vale ühiku korral anda 0 punkti.

4.
- Märgitud, et otsitavad arvud koosnevad numbritest, mis 180-kraadisel pööramisel jäävad iseendaks: 2 p
- Leitud kõik 5 numbrit, mis 180-kraadisel pööramisel jäävad iseendaks: 1 p
- Selgitatud, et esimese numbri valikuks on 4 võimalust: 1 p
  Selgitatud, et järgmisest kolmest numbrist igaühe valikuks on 5 võimalust: 1 p
- Arvutatud õige lõppvastus: 2 p

Ainult õige vastuse (500) eest ilma selgituseta anda 1 punkt. Õige vastus algarvude astmete korrutisena ($2^2 \cdot 5^3$) lugeda samaväärseks kümnendesitusega.

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Helli Juurma)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Üks arvudest teisendatud kujule $4^{\frac{1}{128}}$ (või $2^{\frac{1}{64}}$ või $\sqrt[128]{4}$ või $\sqrt[64]{2}$): 3 p
- Teine arv teisendatud samale kujule: 3 p
- Saadud tulemusest järeldatud õige vastus: 1 p

Arvutusvigade korral anti punkte proportsionaalselt lahenduse osaga, mis oli vigadest oluliselt mõjutamata.

Ainult õige vastuse (niisama suur) eest ilma selgituseta anti 0 punkti.

2. *(Joonas Jürgen Kisel)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud kiirusega v joostud teepikkus kui $\frac{s-wt}{2}$ ehk $0{,}5s - 6{,}4t$: 1 p
- Leitud kiirusega v joostud aeg kui $\frac{ut-s}{2u}$ ehk $0{,}5t - \frac{s}{32{,}4}$: 1 p
- Jõutud võrrandini $\frac{s}{t} = \frac{u(s-wt)}{ut-s}$ ehk $\frac{s}{t} = \frac{16{,}2s - 207{,}36}{16{,}2t - s}$: 2 p
- Jõutud võrrandini $v^2 = uw$ ehk $v^2 = 207{,}36$: 2 p
- Avaldatud vastus $v = 14{,}4\frac{\text{km}}{\text{h}}$: 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

Ülesanne oli lahendatud oodatust oluliselt kehvemini: vähesed lahendajad suutsid koostada teksti põhjal sobiva võrrandi. Seevastu need, kes suutsid, jõudsid enamasti ka sihile. Kaugelt kõige levinum viga oli eeldus, et keskmine kiirus avaldub üksikute kiiruste keskmisena, mistõttu koostati võrrand $v = \frac{16{,}2 + 12{,}8}{2}$ või $v = \frac{16{,}2 + v + 12{,}8}{3}$, mis andsid mõlemad vastuseks $14{,}5\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Selline eeldus kehtiks ainult siis, kui kõik kolm etappi oleks kestnud sama kaua. Kui aga näiteks liikuda 125 tundi kiirusega $8\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja 3 tundi kiirusega $1000\frac{\text{km}}{\text{h}}$, siis läbitakse 128 tunni jooksul 4000 km, mis annab keskmiseks kiiruseks $31{,}25\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ehkki 8 ja 1000 aritmeetiline keskmine on 504.

Mõned lahendajad leidsid hoopis kiiruste 16,2 ja 12,8 harmoonilise keskmise $14\frac{218}{725}$, mis vastab eeldusele, et Juku oleks iga kiirusega joostes läbinud võrdse vahemaa.

3. *(Urve Kangro)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Mari tehtav jagamistehe $\dfrac{m(m+v)}{m+2v}$ üldkujul korrektselt välja kirjutatud: 1 p
- Leitud üldkujul jagatis ja võimalik jääk $2v^2$: 3 p
- Pandud kirja tingimus $2v^2 < 1000 + 2v$: 2 p
- Leitud suurim võimalik vanus: 1 p

Kui millegi muu eest punkte ei saanud, siis õige vastuse eest ilma põhjenduseta (või puuduliku põhjendusega) sai 1 punkti. Samuti sai 1 punkti õige jäägi leidmise eest ilma põhjenduseta (näiteks proovimise teel). Lihtsalt mingite juhtude proovimise eest, kui sellest ei tehtud ühtegi õiget järeldust, punkte ei saanud.

See ülesanne oli ootamatult raske. Enamuses töödes oli jagamistehe korrektselt kirja pandud, aga sellega ei osatud midagi edasi teha. Küll võrdsustati seda nulliga, küll Mari vanuse või Mari poolt mõeldud arvuga vms. Jäi mulje, et umbes pooled õpilased ei teadnud, mis on jäägiga jagamine. Vahel taandati murd enne jäägiga jagamist, aga sel juhul tuleks saadud jääk hiljem läbi korrutada selle arvuga, millega taandati. Samuti valmistas raskusi arusaamine, et see jääk võib sõltuda Mari vanusest (sest seda Jüri teadis), aga mitte Mari poolt mõeldud arvust.

Mitmetes töödes oli lihtsalt arvutatud erinevate vanustega ja/või erinevate Mari poolt mõeldud arvudega. Aga kui meil näiteks kahe erineva Mari poolt mõeldud arvu ja sama vanusega tuleb sama jääk, siis see veel ei tõesta, et sama jääk tuleb kõikvõimalike Mari poolt mõeldud arvudega. Reeglina sellised lahendused said 0 punkti, või 1 punkti, kui jagamistehe oli ka üldkujul kirja pandud. Lahendamiseks on igal juhul vaja üldkuju, sest pole mõeldav, et jõuaks läbi arvutada kõikvõimalike neljakohaliste arvudega ja kõikvõimalike vanustega.

Palju esines ka arvutusvigu ja vigaseid lihtsustusi, näiteks taandati ära murru lugejas või nimetajas üks liidetavatest. Arvutusvea eest reeglina kaotati 1 punkt, aga vigane lihtsustus muutis lihtsalt edasise lahendamise võimatuks.

4. *(Maksim Ivanov)*

Erinevate lahenduste hindamiseks kasutati kaht eri skeemi; iga skeemi puhul selles märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem žürii lahendusega 1 sarnaste lahenduste jaoks.

- Põhjendatud, et mõlemad otsitavad naturaalarvud on kolmekohalised ja algavad numbriga 9: 1 p
- Otsitavad arvud esitatud mingite numbrite a, b, c ja d korral kujul $900 + 10a + b$ ja $900 + 10c + d$: 1 p
- Koostatud teksti järgi võrdused $900 + 10a + b + 9 + c + d = 1000$ ja $900 + 10c + d + 2(9 + a + b) = 1000$: 1 p
- Koostatud võrdustest järeldatud seos $8a - b = 9(c + 1)$: 1 p
- Lahendus korrektselt lõpule viidud: 3 p

  Sealhulgas žürii lahendusega sarnaselt jätkuva lahenduse puhul:
  - Järeldatud, et $a + b$ jagub 9-ga: *1 p*
  - Põhjendatud, et juhtudel $a + b = 0$ ja $a + b = 18$ ei leidu sobivat naturaalarvude paari: *1 p*
  - Juhul $a + b = 9$ leitud ainus sobiv paar $(981, 964)$: *1 p*
- *Sealhulgas alternatiivselt jätkuva lahenduse puhul:*
  - Põhjendatud, et number a peab olema 7, 8 või 9: *1 p*
  - Põhjendatud, et juhtudel $a = 7$ ja $a = 9$ ei leidu sobivat naturaalarvude paari: *1 p*
  - Juhul $a = 8$ leitud ainus sobiv paar $(981, 964)$: *1 p*

Kui otsitavad arvud olid mingite numbrite a, b, c, d, e ja f korral esitatud kujul $100a + 10b + c$ ja $100d + 10e + f$ ning koostatud võrdustest $100a + 10b + c + d + e + f = 1000$ ja $100d + 10e + f + 2(a + b + c) = 1000$ oli järeldatud võrdus $8b - c = 9e + 99d - 98a$, siis selle eest anti kokku 2 punkti.

Skeem žürii lahendusega 2 sarnaste lahenduste jaoks.

- Leitud otsitavate naturaalarvude suuruse alam- ja ülempiirid: 2 p

  Sealhulgas:
  - Põhjendatud, et esimene arv ei ole väiksem arvust 973: *1 p*

  Korralikult kirjeldatud läbivaatuse skeem (st kuidas esimese arvu võimaliku väärtuse korral arvutada vastav teine arv ja kontrollida selle sobivust): 2 p
- Läbivaatuse skeem rakendatud nt esimese arvu kõikide võimalike väärtuste korral: 2 p
- Järeldatud, et vaid üks naturaalarvude paar $(981, 964)$ rahuldab ülesande tingimusi: 1 p

Õige vastuse eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

5. *(Hendrik Vija)*

Anname kaks eraldi skeemi erinevate lähenemistega tööde hindamiseks.

Žürii lahendusega 1 sarnaste lahenduste allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud, et CX on kolmnurga $AA'B$ kesklõik, kolmnurgad $A'AB$ ja $A'CX$ on sarnased või midagi analoogset: 3 p

  Sealhulgas (kui on kasutatud sarnaseid või võrdseid kolmnurki):
  - Kolmnurkade sarnasuse või võrdsuse tunnuse üks element põhjendatud puudulikult: *2 p*
- Järeldatud, et $|CX| = \frac{1}{2}|CD|$ või midagi analoogset: 2 p
- *Sealhulgas (kui on kasutatud sarnaseid kolmnurki):*
  - Väidetud põhjenduseta, et sarnasustegur on 2: *1 p*
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Žürii lahendusega 2 sarnaste lahenduste allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et C on kolmnurga $A'BD$ mediaanide lõikepunkt: 5 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta punkte ei antud, sest õiget vastust oli väga lihtne kasvõi joonlauaga mõõtes leida.

Ülesande raskusaste osutus parajaks ning leidus rohkelt ilusaid täislahendusi, kuid kahjuks oli hulganisti komistuskive, mis ei võimaldanud paljudel õpilastel selles ülesandes endast parimat anda.

Paljudel õpilastel oli raskusi korrektse joonise koostamisega ülesande jaoks. Sageli oli punkti C suhtes peegeldamise asemel peegeldatud punkti A hoopis näiteks üle külje CD. Samuti oli tüüpveaks rööpküliku tippude valesti tähistamine. Selleks, et $ABCD$ oleks rööpkülik, peavad kehtima tingimused $AB \parallel CD$ ning $AD \parallel BC$ ning see on võimalik vaid siis, kui tipud A, B, C, D asuvad rööpkülikul täpselt selles järjekorras. Teisisõnu peavad A ja C olema kindlasti rööpküliku vastastipud.

Kuid ka siis, kui korrektne joonis sai koostatud, astuti vahel ämbrisse. Mõned õpilased mõõtsid ülesande vastuse jooniselt, kasutades selleks joonlauda või lahenduspaberil olevaid täpikesi. See aga ei tõesta midagi üldise juhu jaoks, vaid annab (ligikaudse!) vastuse vaid ühe konkreetse rööpküliku puhul. Samuti jäeti mitmel juhul mõni jooniselt tehtud tähelepanek tõestamata, näiteks väideti ilma piisava põhjenduseta, et X on lõigu CD' keskpunkt (vt lahenduse 3 joonist). Need tõestused aga enamasti moodustasid põhiosa lahendustest, nii et sellised puudujäägid põhjustasid suuri punktikaotusi.

Üks eksimus, mille eest punkte maha ei võetud, kuid mida soovitan siiski edaspidi tähele panna, on kolmnurkade tippude õige järjestus kolmnurkade võrdsusest/sarnasusest rääkimisel. Näiteks žürii lahenduses 1 on kolmnurgad $A'AB$ ja $A'CX$ sarnased, kuid kolmnurgad $A'BA$ ja $A'CX$ sarnased ei ole.

6. *(Martin Rahe)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud $d = 12$, $b = 24$ ja $a + c = 26$: 2 p
  Sealhulgas:
  - Eeldatud neid arve ilma tõestuseta, leitud need vigasel meetodil või korrektselt leitud ainult osad arvud: *1 p*
- Põhjendatud, et Carmeni postitusele saab järgneda ainult Ardi postitus: 1 p
- Järeldatud (põhjendatult), et $a \geqslant 13$: 1 p
- Põhjendatud, et Ardi postitusele saab järgneda ainult Beni postitus: 1 p
- Näidatud, et Ardi ja Deivi postitusi on kokku rohkem kui Beni omasid, mistõttu neist igale ei saa järgneda Beni postitus: 1 p
- Järeldatud (põhjendatult), et Ardi postitus peab olema viimane: 1 p

Ülesanne osutus oodatust keerulisemaks ning täislahendusi või peaaegu täielikke lahendusi oli väga vähe.

Suur hulk lahendajatest olid korrektselt leidnud d, b ja $a+c$ väärtused. Edasi olid paljud lahendajad üritanud konstrueerida mingi konkreetse postituste järjestuse, mis vastaks ülesande tingimustele. Kuna nendes lahendustes ei olnud põhjendatud, miks nende leitud konstruktsioon on ainuõige (mida ei saa näidata, kuna õigeid konstruktsioone on mitu), siis sellised lahendused said üldjuhul vähe punkte. Levinuim selline konstruktsioon oli järjestuse CABDB kordamine 12 korda.

Osad lahendajad olid ka õige vastuse ära arvanud ilma mingite põhjendusteta või väärate põhjendustega. Sellised tööd said 1 punkti.

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Raul Kangro)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tuletatud vähemalt üks ainult kahe muutujaga võrrand: 1 p
- Ülesanne taandatud kahe tundmatu ja kahe võrrandiga süsteemi lahendamisele: 1 p
- Korrektselt teisendatud ühe tundmatuga võrrandiks: 1 p
- Võrrand korrektselt lahendatud: 1 p
- Võõrlahendid välistatud: 1 p
- Summa leidmiseks vajalikud liidetavad leitud: 1 p
- Lõppvastus sobivalt lihtsustatud kujul esitatud: 1 p

Viimase rea eest saadi punkte ka siis, kui kordajate summa oli esitatud mõistlikult lihtsal kujul mitte rohkem kui kahe tundmatu kaudu. Õige vastuse eest ilma põhjendusteta punkte ei antud.

2. *(Toomas Tennisberg)*

Anname kaks eraldi skeemi erinevate lähenemistega tööde hindamiseks.

Žürii lahendustega sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Koostatud kombinatsioonide arvude suhtes võrrand, mis vastab ülesande püstitusele: 5 p

  Sealhulgas:
  - Koostatud võrrand, kus osa liikmetest on selgelt õige võrrandi osad: *4 p*
- Näidatud (näiteks võrrandi lahendamise käigus) et 12 sobib vastuseks: 1 p
- Näidatud (näiteks võrrandi lahendamise käigus) et muud arvud peale 12 vastuseks ei sobi: 1 p

Tõenäosusteoreetilise lahendusega sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Märgitud, et ülesandes püstitatud sündmused on vastandsündmused ning seetõttu $P(\text{suurim on}) + P(\text{suurim ei ole}) = 1$: 3 p
- Tuletatud võrrand, mis kasutab ära saadud tulemust: 2 p

  Sealhulgas:

- Tuletatud võrrand, kus osa liikmetest on selgelt õige võrrandi osad: *1 p*

- Näidatud (näiteks võrrandi lahendamise käigus) et 12 sobib vastuseks: 1 p
- Näidatud (näiteks võrrandi lahendamise käigus) et muud arvud peale 12 vastuseks ei sobi: 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma ühegi täiendava selgituseta anti 1 punkt.

Ülesanne osutus võrdlemisi lihtsaks. Suur osa õpilastest taipasid, et ülesannet saab ümber tõlgendada tõenäosusteoreetilise ülesandena, kuna kogu võimaluste arv on mõlemal püstituses pakutud juhul sama. Sealt edasi kasutati ära fakt, et tõenäosus n palli hulgast m palli valimisel saada mingi kindel pall on $\frac{m}{n}$, kust tuletati võrrand, millest järeldati $n = 12$. Tüüpilised väärvastused olid $n = 9$ (mõistetud, et võimaluste arv valida kolm palli nii, et suurima numbriga pall on nende hulgas, on kolm korda väiksem võimaluste arvust võtta kolm mistahes palli) ning $n = 4$ (sassi aetud, kumb võimaluste arv on teisest kolm korda suurem).

3. *(Aleksandr Šved)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Lahendatud ülesande a-osa: 4 p

  Sealhulgas:
  - Leitud diskriminandi ruutjuur (lihtsustatud kujul ehk sulud avatud): *1 p*
- Lahendatud ülesande b-osa: 3 p

  Sealhulgas:
  - Leitud diskriminandi ruutjuur (lihtsustatud kujul ehk sulud avatud) või märgatud, et mõlemad arvud peavad olema paaris: *1 p*

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anti 0 punkti.

4. *(Härmel Nestra)*

Anname kaks eraldi skeemi erinevate lähenemistega tööde hindamiseks.

Žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Esitatud kaalutlus, mille järgi peab tahvlil olev arv koosnema viiest suurimast numbrist: 2 p
- Esitatud kaalutlus, mille järgi peab tahvlil olema vähim neist numbritest moodustatud arv: 4 p
- Toodud õige vastus: 1 p

Edasiviivate mõtete eest võis skeemi teise rea järgi saada üksikuid punkte.

Žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Avaldatud Juku arvutatav summa kujul (1) või ilmselgelt samaväärsel kujul: 3 p

  Sealhulgas:
  - Leitud kõigi ümberjärjestuste summa avaldise kujul, kus parameetriteks arvus esinevad numbrid: *2 p*
- Põhjendatud (nt ümberpaigutusvõrratusega), et suurima summa korral on arvu numbrid kasvavalt järjestatud: 2 p
- Märgitud, et suurima summa saamiseks tuleb kasutada viit suurimat numbrit: 1 p
- Toodud õige vastus: 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

Skeemi 2 teise rea eest anti punkte ainult juhul, kui ümberpaigutusvõrratust oli nimeliselt viidatud, sest tegu ei ole koolis õpitava teadmisega ja vaikiva kasutamise korral pole selge, kas õpilane teadis seda matemaatilist fakti või oletas kõhutunde järgi, et selline järeldus võiks kehtida.

Viie suurima numbri kaalutluse eest anti teises skeemis 1 punkt vähem kui esimeses skeemis, sest lahenduse 2 kontekstis on ilmsem, et suuremad numbrid annavad suurema ümberjärjestuste summa.

Hindamine oli selles ülesandes tavatult leebe. Skeemi 1 järgi võis täispunktid saada isegi ühelauselise lahenduse eest, mis skeemi kahel esimesel real olevad kaalutlused ilma täiendava põhjenduseta välja tõi. Selline hindamine polnud küll ülesande koostamisel plaanis, kuid töid lugedes ilmnes, et mujale piiride tõmbamine oleks liiga meelevaldne.

5. *(Artur Avameri)*

Anname kaks eraldi skeemi erinevate lähenemistega tööde hindamiseks.

Žürii lahendusega 1 sarnaste lahenduste allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tehtud kasulikke tähelepanekuid nelinurgas $ANOK$ (nt tõmmatud üks selle nelinurga diagonaalidest ja arvutatud saadud nelinurgas nurki, avaldatud nurga ANK tangens mingil moel nelinurgas $ANOK$ sisalduvate lõikude pikkuste kaudu vms): 1 p
- Edasi pandud tähele, et $ANOK$ on kõõlnelinurk, või märgatud kolmnurkade APK ja KPO sarnasus ja nurkade võrdsus (kus P on lõikude AO ja NK lõikepunkt): 2 p
- Lahendus edukalt lõpule viidud: 4 p

Žürii lahendusega 2 sarnaste lahenduste allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tehtud kasulikke tähelepanekuid nelinurgas $ANOK$ (nt tõmmatud üks selle nelinurga diagonaalidest ja arvutatud saadud nelinurgas nurki, avaldatud nurga ANK tangens mingil moel nelinurgas $ANOK$ sisalduvate lõikude pikkuste kaudu vms): 1 p

- Edasi leitud siinusteoreemi abil kolmnurgas KLN lõigu NK pikkus nurga ANK ja ringjoone raadiuse kaudu: 2 p
- Lahendus edukalt lõpule viidud: 4 p

Üldiselt anti vähegi sobivalt kirja pandud lahenduste eest täispunktid, kuid pisivigade/puudulike põhjenduste eest võeti 1 punkt maha.

Väga paljud lahendajad eeldasid, et ülesandes antud nelinurk peab olema ruut (või romb) ning lahendasid sel juhul ülesande sümmeetriakaalutlustel. Kuna selline lähenemine ei aita lahendada tegelikku ülesannet, siis selle eest punkte ei antud. Need, kes püüdsid seda eeldust „tõestada“, tõid üldjuhul põhjenduseks, et „tangens on defineeritud vaid täisnurkses kolmnurgas“, või et „muul juhul ei saa sobivat ringi nelinurga sisse joonistada“. Tasub meeles pidada, et tangens on defineeritud suvalise nurga korral peale 90° paaritute kordsete ega ole seotud konkreetse kolmnurgaga ning siseringjoont omavad nelinurgad võivad välja näha väga erisugused (vt nt ametliku lahenduse jooniseid).

Peamiseks takistuskiviks ülesande lahendamisel kujunes ebatäpse/ebatäieliku joonise tegemine, mille põhjal polnud võimalik tähelepanekuid teha. Kui teha suur, täpne, ruudust erinev joonis ning lisada sellele nelinurga $ANOK$ diagonaalid, muutub ülesande lahendamine oluliselt lihtsamaks.

6. *(Richard Luhtaru)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Õige vastus: 1 p
- Leitud näide, kus eesel vahetab n korda suunda: 2 p
- Tõestatud, suunavahetuste arv ei saa olla suurem kui n: 4 p

  Sealhulgas:
  - Märgatud, et eesel saab suunda vahetada ainult porgandi asetamise või porgandi söömise hetkel, mida juhtub kokku $2n$ korda: *2 p*

Hindamisskeemi kolmanda rea eest anti 1 punkt juhul, kui oli kirjas väide „üks porgand saab põhjustada maksimaalselt ühe suunavahetuse“ või midagi sarnast. 1 punkti võis teenida ka siis, kui oli olemas mingi tõestuse idee alge.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

Valdav enamus õpilasi kasutas näitena strateegiat, kus Shrek asetab porgandi eesli taha, ootab, kuni eesel porgandi ära sööb, ja kordab protsessi. Mõned õpilased leidsid näite, kus Shrek asetab kohe alguses kõik porgandid arvteljele (kõigepealt üks porgand ja siis kahekaupa), selle näite puhul oli aga keerulisem põhjendada, miks eesel n korda suunda vahetab, ja reeglina oli vaja eraldi uurida paaris ja paaritut juhtu. Kui strateegia polnud selge (näiteks kas eesel sööb porgandi enne uue porgandi asetamist) või oli keerulisema strateegia analüüs puudulik, siis sai hindamisskeemi teise rea eest 0–1 punkti.

Kuigi näite leidmisega said paljud õpilased hakkama, siis maksimaalsust üritasid tõestada vähesed. On raske öelda, kas põhjuseks oli see, et õpilased ei teadnud, et maksimaalsuse tõestamiseks ei piisa ainult näite leidmisest, või oli tõestus õpilaste jaoks liiga keeruline. Samuti tekitas tihti segadust see, et vastust oodati sõltuvana parameetrist n: paljud õpilased kirjutasid vastuseks „lõpmatus“ või „suurim positiivne täisarv“. Võimalik, et kui parameetri n asemel oleks olnud ülesandes mõni konkreetne arv (näiteks 1000), siis oleks segadust vähem olnud.

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Julia Polikarpus)*

Žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Õigesti koostatud lineaarvõrrand ühe ülesandes kirjeldatud suuruse leidmiseks koos ammendava selgitusega: 4 p
- Võrrand õigesti lahendatud: 1 p
- Võrrandi lahendi abil arvutatud Petsi kuulide koguarv ja vastast tabanud Petsi kuulide arv: 1 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Koostatud ülesandes kirjeldatud suuruste omavahelistest seostest lineaarvõrrandisüsteem, millest on võimalik leida Petsi kuulide koguarv või vastast tabanud Petsi kuulide arv: 3 p
- Leitud sellest võrrandisüsteemist kas Petsi kuulide koguarv või vastast tabanud Petsi kuulide koguarv: 2 p
- Leitud teine neist kahest suurusest: 1 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Arvutusvigade korral anti punkte proportsionaalselt lahenduse osaga, mis oli vigadest oluliselt mõjutamata.

Ainult õige vastuse (30) eest ilma selgituseta anti 1 punkt.

2. *(Andres Talts)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Võrrandi parem pool õigesti ümber kirjutatud geomeetrilise rea summa valemi abil: 3 p
- Saadud võrrand teisendatud samaväärseks ruutvõrrandiks: 2 p
- Ruutvõrrand õigesti lahendatud: 1 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Kui geomeetrilise rea summa valemi rakendamisel polnud kontrollitud, et tegur on absoluutväärtuselt väiksem kui 1, siis anti skeemi esimese rea järgi 1 punkt vähem.

Arvutusvigade korral anti punkte proportsionaalselt lahenduse osaga, mis oli vigadest oluliselt mõjutamata.

Ainult õige vastuse (60° või $\frac{\pi}{3}$) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt, kraadimärgi puudumisel 60 järelt anti 0 punkti.

3. *(Sandra Schumann)*

Žürii lahendusega sarnaste lahenduste allpool märgitud osade eest antud punktid liideti.

- Näidatud, kuidas kolme tehtemärgiga on võimalik tulemus saavutada, ja toodud välja vajaminevate tehtemärkide arv 3: 1 p
- Tõestatud, et 0 tehtemärgiga ei ole nõutud tulemus võimalik ja/või toodud välja, et esitatav täisarvu neljas aste lõppeb numbriga 0 või 6: 1 p
- Näidatud, et 1 plussmärgiga ei ole nõutud tulemus võimalik: 1 p
- Näidatud, et 1 miinusmärgiga ei ole nõutud tulemus võimalik: 1 p
- Näidatud, et 2 tehtemärgiga ei ole nõutud tulemus võimalik: 3 p

  Sealhulgas:
  - Tõestus väikeste puudujääkidega: *2 p*

Ülesanne osutus ootuspäraselt keeruliseks. Hindamine oli leebe 1 punkti andmise osas, kui vajaminevad tehtemärgid olid vähemalt õigesti kokku loetud ja näide leitud, kuid üpris range täispunktide andmise osas. Kahe tehtemärgi variandi võimatuse näitamine on ülesande üks keerulisemaid osi.

Mõned õpilased olid ülesannet valesti mõistnud ja jätnud vaatluse alt välja võimaluse, et mõnede neljade vahel ei ole tehtemärke. Idee eest, et Juku võiks kirjutada ühe neljadest tahvlile kohe astendajana, punkte ei saanud.

4. *(Oleg Košik)*

Erinevate lähenemistega tööde hindamiseks kasutati kaht eraldi skeemi. Kummagi skeemi kasutamisel lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem žürii lahendusega 1 sarnastele mõttekäikudele.

- Esitatud võrrand kujul $3^2 \cdot 3^{x-2} + 4^2 \cdot 4^{x-2} = 5^2 \cdot 5^{x-2}$: 2 p
- Märgitud, et $x = 2$ on lahend: 1 p
- Käsitletud juht $x > 2$: 2 p
- Käsitletud juht $x < 2$: 2 p

Skeem žürii lahendusega 2 sarnastele mõttekäikudele.

- Esitatud võrrand kujul $0{,}6^x + 0{,}8^x = 1$ (või analoogsel kujul, kui algse võrrandi mõlemad pooled jagati suurusega 3^x või 4^x): 2 p
- Märgitud, et $x = 2$ on lahend: 1 p

- Tuginedes funktsiooni kahanemisele või kasvamisele põhjendatud, miks rohkem lahendeid ei leidu: 4 p

Punkti tähelepaneku eest, et $x = 2$ on lahend, ei antud juhul, kui lisaks väideti, et mingi muu arv sobib veel lahendiks ning puudus seejuures arvuline kontroll $x = 2$ sobivuse kohta.

Ainult väite eest, et $x > 2$ korral on 5^x alati suurem ning $x < 2$ korral on 5^x alati väiksem, punkte ei antud, sest matemaatikaolümpiaadil tuleb väidetele esitada ka matemaatiliselt korrektsed põhjendused. Seejuures graafik selliseks põhjenduseks ei sobi, sest graafik on kõigest illustratsioon, mis konstrueeritud üksikute andmepunktide põhjal, ning graafik üksi üldjuhul midagi ei tõesta. Küll võib see aidata mõttekäike visualiseerida või pakkuda lahendajale ideid tõestuse jaoks.

Kuigi ülesandes küsiti lahendeid kõigi reaaarvude hulgast, piirduti mitnes töös üksnes naturaal- või täisarvuliste x väärtustega, võttes kasutusele näiteks Fermat' suurt või väikest teooremi. Kahjuks oli sellistest mõttekäikudest üldjuhul vähe kasu reaalarvuliste lahendite otsimisel, mistõttu polnud võimalik ka punkte nende eest anda.

5. *(Karl Paul Parmakson)*

Kasutame hindamisskeemis žürii lahenduste tähistusi. Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Lahendatud a-osa: 3 p

  Sealhulgas geomeetrilise lähenemise puhul:
  - Märgitud, et lõigu AB keskpunktist K lähtuvate puutujalõikude AK, BK, CK pikkused on võrdsed: *1 p*
  - Järeldatud, et K on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt: *1 p*
  - Thalese teoreemi põhjal järeldatud, et kolmnurk ABC on täisnurkne: *1 p*

  Sealhulgas nurkade arvutamisega lähenemise puhul:
  - Märgitud, et võrdhaarse kolmnurga CO_1A alusnurga ja nurga CAB suuruste summa on $90°$: *1 p*
  - Näidatud, et $\angle CAO_1 + \angle CAO_2 = 90°$: *1 p*
  - Järeldatud, et $\angle ACB = 90°$: *1 p*
- Lahendatud b-osa: 4 p

  Sealhulgas geomeetrilise lähenemise puhul:
  - Leitud lõigu AB pikkus: *1 p*
  - Leitud kolmnurga ABC küljele AB toetuv kõrgus: *2 p*
  - Arvutatud õige vastus: *1 p*

  Sealhulgas trigonomeetrilise lähenemise puhul:
  - Siinusteoreemi või koosinusteoreemi abil arvutatud ABC pindala kujul $S = r_1 r_2 \sqrt{(1 - \cos\angle AO_1C)(1 - \cos\angle BO_2C)}$: *1 p*

- Näidatud, et $S = r_1 r_2 \sin \angle BO_2C$: *1 p*
- Leitud täisnurkse kolmnurga kaudu lõigu AB pikkus ning seeläbi nurga BO_2C siinus: *1 p*
- Arvutatud õige vastus: *1 p*

Ülesannet lahendati valdavalt hästi.

Ülesande a-osas paljud õpilased arvasid, et kummagi ringi raadiused on omavahel ristí, mitte et puutuja ja raadius on risti. Mitmed õpilased pikendasid lõike O_1A ja BC ning väitsid, et lõikepunkt asub ringjoonel, millest triviaalselt lähtub a-osa väide. Lõikepunkti asumine ringjoonel on aga mittetriviaalne.

Ülesande b-osas osutus keeruliseks ringide kesknurkade siinuste arvutamine ning sarnaste kolmnurkade abil kolmnurga ABC küljele BC toetuva kõrguse avaldamine.

Vastuse eest ilma selgitusteta oli ette nähtud 1 punkt, kuid ükski õpilane ei saanud õiget vastust ilma õige lahenduskäiguta.

6. *(Kaur Aare Saar)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Toodud näide a-osa jaoks, mis vastab ülesande tingimustele: 2 p
- Toodud näide b-osa jaoks, mis vastab ülesande tingimustele: 5 p

Kui näitena oli toodud ülesande tingimustele vastav kate, mis ruudu jaoks oli asümmeetriline (nt erinevate ruudu külgede jaoks erinev arv seal paikneivad tippe) ja ei olnud näidatud, et kuus sellist ruutu saab tõepoolest paigutada kuubi tahkudele nii, et erinevate tahkude kattehulknurkade tipud on kohakuti, siis lahutati tulemusest 1 punkt.

Kui b-osa jaoks oli lahenduses ruudu jaoks töötav kate, kuid selle asümmeetria tõttu ei saa sellistest ruutudest moodustada ülesande tingimustele vastavat kuubi katet, siis sai b-osa eest vaid 1 punkti.

Ainult õigete vastuste eest punkte ei antud.

Ülesande a-osa oli hästi lahendatud, peamiselt jaotades iga tahu kaheks võrdhaarseks täisnurkseks kolmnurgaks, kuid eksisteeris lahendusi ka suurema arvu kolmnurkadega. Ülesande b-osa konstruktsiooni suutsid välja mõelda üksikud õpilased, enamus neist analoogse konstruktsiooniga nagu žürii lahenduses.