Piirkonnavoor 2021

Ülesanded **1**
- 7. klass 1
- 8. klass 3
- 9. klass 5
- 7. klass 7
- 8. klass 8
- 9. klass 9
- 10. klass 10
- 11. klass 11
- 12. klass 12

Ülesanded vene keeles **13**
- 7 класс 13
- 8 класс 15
- 9 класс 17
- 7 класс 19
- 8 класс 20
- 9 класс 21
- 10 класс 22
- 11 класс 23
- 12 класс 24

Lahendused **25**
- 7. klass 25
- 8. klass 27
- 9. klass 29
- 7. klass 31
- 8. klass 34
- 9. klass 37
- 10. klass 40
- 11. klass 46
- 12. klass 53

Põhikooli hindamisjuhised **59**
- Üldjuhend 59
- 7. klass 61
- 8. klass 62
- 9. klass 63
- 7. klass 64
- 8. klass 66
- 9. klass 68

Gümnaasiumi hindamisskeemid **70**
- 10. klass 70
- 11. klass 75
- 12. klass 79

Põhikooli kommentaarid **83**
- Kokkuvõte 83
- 7. klass 85
- 8. klass 86
- 9. klass 88

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Elts Abel
Kaarel Hänni
Maksim Ivanov
Raul Kangro
Urve Kangro
Oleg Košik
Aleksei Lissitsin
Richard Luhtaru
Härmel Nestra
Uve Nummert
Heiki Niglas
Markus Rene Pae
Erik Paemurru
Kaur Aare Saar
Hendrik Vija
Raili Vilt

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Arvuta:

$$1 - 2 - (3 - 4 - (5 - 6 - (7 - 8))) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Arvuta:

$$\frac{2021}{47} : \frac{43}{2021} - \frac{2020}{101} : \frac{20}{2020} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Sõites Karjakülast Marjaküllа, märkasid notsud rongi aknast teeviita „Marjaküllа 66 km“. Läbinud rongiga veel 7 km, märkasid nad teist teeviita „Karjaküllа 55 km“. Mitu kilomeetrit tuleb rongiga sõita, et jõuda Karjakülast Marjaküllа?

. . . . . .

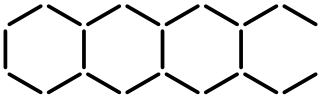
4. Leia vähim viiekohaline arv kujul $*3*4*$, mille numbrid on kõik erinevad ja mis jagub arvudega 3 ja 4. (Iga tärn tuleb asendada ühe numbriga.)

. . . . . .

5. Mitme erineva naturaalarvuga saab korrutada arvu 202,1 nii, et tulemuseks on 4-kohaline naturaalarv?

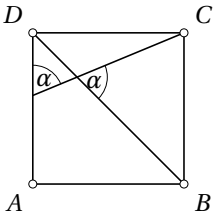
. . . . . .

6. Tikkudest moodustatud kuusnurkade rea algus on näidatud joonisel. Kokku on kasutatud 2021 tikku. Mitu kuusnurka on reas?



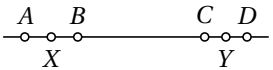
. . . . . .

7. Ruudu $ABCD$ tipust C on tõmmatud lõik, mis moodustab nii diagonaaliga BD kui ka küljega AD nurga suurusega α. Leia α.



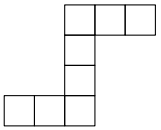
. . . . . .

8. Punktid A, B, C ja D asuvad ühel sirgel. Punkt X on lõigu AB keskpunkt, punkt Y aga lõigu CD keskpunkt. Leia lõigu XY pikkus, kui lõigu AD pikkus on 21 cm ja lõigu BC pikkus on 12 cm.



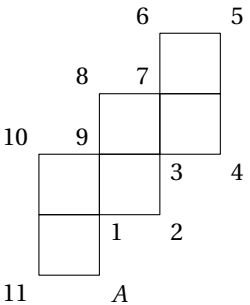
. . . . . .

9. Kujund koosneb 8 ühesuurusest ruudust. Selle kujundi ümbermõõt on 9 cm. Leia selle kujundi pindala.



. . . . . .

10. Joonisel on antud kuubi pinnalaotus, mille üks tipp on A ja ülejäänud tipud on tähistatud arvudega 1 kuni 11. Milliste arvudega tähistatud tipud ühtivad tipuga A, kui see pinnalaotus kuubiks kokku voltida?



. . . . . .

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Arvuta:

$$\frac{20 + 20 \cdot 20 - 21 \cdot 21 + 21}{20^2 + 21^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Leia arv, mis paikneb arvteljel arvude $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{2}$ vahel ja on arvule $\frac{1}{3}$ kaks korda lähemal kui arvule $\frac{1}{2}$.

. . . . . .

3. Leia $a - 2b$, kui $3(4b - 5) - 2(3a + 4) = 1$.

. . . . . .

4. Leia vähim algarv, mis on võrdne kolme erineva algarvu summaga.

. . . . . .

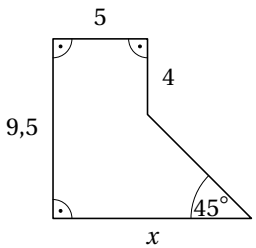
5. Kahe T-särgi hinnad erinevad 20 euro võrra. Nende keskmine hind on 21 eurot. Kui palju maksab neist odavam T-särk?

. . . . . .

6. Kui suur osa kõikidest neljakohalistest arvudest, mille numbriteks on 2, 0, 2 ja 1, jagub arvuga 4?

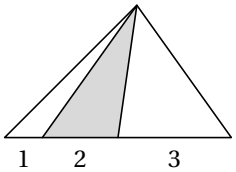
. . . . . .

7. Joonisel on märgitud viisnurga kolm täisnurka ja nurk suurusega 45° ning kolme külje pikkused sentimeetrites. Leia tähega x tähistatud külje pikkus.



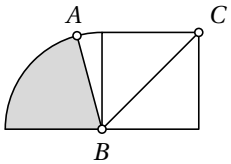
. . . . . .

8. Kolmnurga üks külgedest on jaotatud lõikudeks pikkustega 1 cm, 2 cm ja 3 cm. Leia tumedaks värvitud kolmnurga pindala, kui värvimata osade pindalade summa on 7 cm^2.



. . . . . .

9. Kujund koosneb ruudust küljepikkusega 1 cm ja veerandringist raadiusega 1 cm. Leia tumedaks värvitud osa täpne pindala, kui nurga ABC suurus on 60°.



. . . . . .

10. Kuubi üks tippudest on A. Kuubi mistahes kolm tippu on mingi kolmnurga tippudeks. Kui palju on nende kolmnurkade seas selliseid, mille üks tipp on A ning mis asuvad tervikuna kuubi mingil tahul?

. . . . . .

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia $x + y$, kui $x = \frac{2021}{2020} + \frac{2020}{2021} + \frac{2021}{2022}$ ja $y = \frac{1}{2022} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2020}$.

. . . . . .

2. Arvude m ja n summa on 90 ning vahe on 4. Leia arvude m ja n korrutis.

. . . . . .

3. Leia arv a, kui $\frac{a}{b} = 2$, $\frac{c}{a} = 3$ ja $\frac{ab}{c} = 4$.

. . . . . .

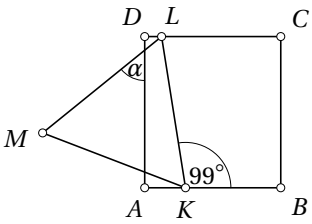
4. Arvu 260 kolm erinevat algtegurit kirjutatakse üksteise kõrvale nii, et moodustuks võimalikest suurim arv. Leia see arv.

. . . . . .

5. Poes oli kampaania: ostes kaks täishinnaga T-särki, saad odavama poole hinnaga. Kampaania ajal osteti kaks täishinnaga T-särki ja nende eest tuli maksta kokku 40 eurot. Neist ühe täishind oli 24 eurot. Leia teise ostetud T-särgi täishind.

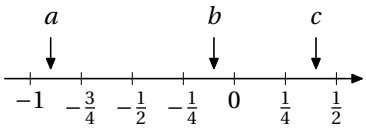
. . . . . .

6. Korrapärase kolmnurga KLM tipud K ja L asuvad ristküliku $ABCD$ vastaskülgedel AB ja CD. Nurga BKL suurus on 99°. Kui suur on joonisel tähega α märgitud nurk?



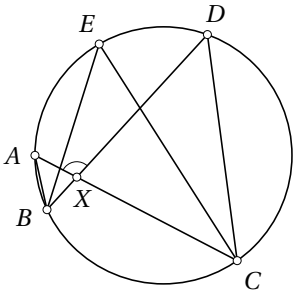
. . . . . .

7. Arvteljel on märgitud arvude a, b ja c asukohad. Järjesta avaldised $a+c$, $b-a$, ab ja $\dfrac{a}{c}$ väärtuse järgi alates väikseimast.



. . . . . .

8. Punktid A, B, C, D ja E asuvad ühel ringjoonel, kusjuures $\angle ABE = 30^\circ$, $\angle BEC = 50^\circ$ ja $\angle ECD = 25^\circ$. Sirged AC ja BD lõikuvad punktis X. Leia nurga DXA suurus.



. . . . . .

9. Ruudu üks vastastippudest ühtib ringjoone keskpunktiga ja teine asub ringjoonel. Leia selle ruudu täpne pindala, kui ringi pindala on 22π cm^2.

. . . . . .

10. Kuubi üks tippudest on A. Kuubi mistahes kolm tippu on mingi kolmnurga tippudeks. Kui palju on nende kolmnurkade seas selliseid, mille üks tipp on A ning mis ei asu tervikuna kuubi ühelgi tahul?

. . . . . .

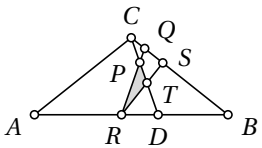
Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **7. klass**

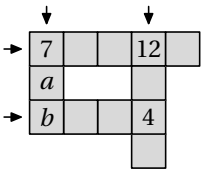
II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kolmeteistkümneaastane Kevin sai sõpradelt kolmekohalise arvu uusaastatervitusi. Ta pani tähele, et isegi siis, kui tervituste arv oleks olnud 3 korda suurem või 200 võrra väiksem, oleks see olnud ikka kolmekohaline. Lisaks ta märkas, et jagades saadud tervituste arvu oma vanusega, on tulemuseks mingi täisarvu ruut. Mitu uusaastatervitust sai Kevin?

2. Võrdhaarse kolmnurga ABC alusel AB valitakse punkt D nii, et $|AC| = |AD|$. Lõigul CD valitakse punkt P, haaral CB punkt Q ja alusel AB punkt R nii, et $|QB| = |RB|$ ning P asub lõigul QR. Haaral CB valitakse veel punkt S nii, et RS ja CB on risti. Sirged CD ja RS lõikuvad punktis T. Nurga BAC suurus on $38{,}5^\circ$. Leia kolmnurga PRT nurkade suurused.



3. Ruutudesse kirjutatakse erinevad naturaalarvud 1 kuni 12 nii, et igas ruudus on täpselt üks arv ning kõigis neljas noolega näidatud reas ja veerus on arvude summad võrdsed. Üheski kahes sellises ruudus, millel on ühine tipp või külg, ei ole arvude summa 8, 9 ega 10. Kolm arvu on juba ruutudesse kirjutatud.



a) Leia arvud a ja b.

b) Kuidas tuleks täita tühjad ruudud, et kõik tingimused oleksid täidetud? Leia kõik võimalused.

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **8. klass**

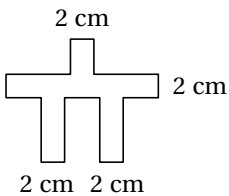
II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Pille ja Sille pidid kahe peale kokku tegema 220 küpsist. Tegelikult tegi Pille 120% ja Sille 110% oma planeeritud kogusest ja nüüd olid nad kahe peale kokku teinud 256 küpsist.

a) Mitu küpsist tegi Pille?

b) Kas on õige, et kui mõlemad oleks teinud 115% oma planeeritud küpsiste kogusest, siis kahe peale kokku oleks tehtud ikka 256 küpsist?

2. Ristkülikukujulisest paberilehest on välja lõigatud viis ühesugust ristkülikut. Joonisel on näidatud paberilehest alles jäänud osa, mille nelja külje pikkused on 2 cm. Ühe väljalõigatud ristküliku külgede pikkused erinevad teineteisest 7 cm võrra.



a) Leia esialgse paberilehe mõõtmed.

b) Kas paberilehest alles jäänud osa pindala on suurem, väiksem või niisama suur kui ühe väljalõigatud ristküliku pindala?

3. Tahvlil on arvud 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ben valib kaks tahvlil olevat arvu, kustutab need ja kirjutab juurde nende kahe arvu vähima ühiskordse. Seejärel valib Ben jälle mingid kaks tahvlil olevat arvu, kustutab need ja kirjutab juurde nende kahe arvu suurima ühisteguri. Edasi kordab Ben sarnaseid samme, kusjuures juurde kirjutatavateks arvudeks on vaheldumisi kustutatud arvude vähim ühiskordne ja suurim ühistegur. Nii jätkab Ben, kuni tahvlile jääb vaid üks arv. Leia:

a) suurim arv, mis saab lõpuks tahvlile jääda;

b) vähim arv, mis saab lõpuks tahvlile jääda.

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kas leiduvad sellised algarvud p ja q, et $p^2 - q^3 = 12$?

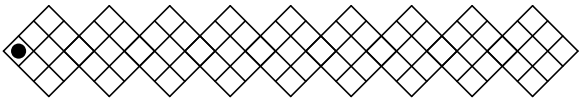
2. Võrdus $x^2(y+z) = y^2(z-x)$ on tõene muutujate x, y, z mingite positiivsete väärtuste korral. Leia kõik võimalused, milline muutuja saab seejuures olla neist kolmest vähima väärtusega.

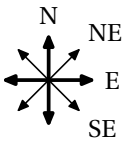
3. Kolmnurgas ABC on $|AB| = |AC|$. Tipu B juures oleva nurga poolitaja lõikab külge AC punktis D.

a) Kas võib kindlalt väita, et kolmnurk ABD on võrdhaarne, kui on teada, et kolmnurk CBD on võrdhaarne?

b) Kas võib kindlalt väita, et kolmnurk CBD on võrdhaarne, kui on teada, et kolmnurk ABD on võrdhaarne?

4. Anu ja Sipsik mängivad joonisel kujutatud mänguväljakul järgmist mängu. Algul asub nupp kõige läänepoolsemal ruudul (joonisel tähistatud musta ringikesega). Igal käigul tohib kumbki mängija nuppu liigutada lähimale ruudule põhja (N), kirde (NE), ida (E) või kagu (SE) suunas. Käiakse kordamööda, alustab Anu. Mängija, kes ei saa käiku teha, on kaotanud. Kas ühel mängijaist on võimalik võita vastase iga vastumängu korral ja kui jah, siis kummal?





Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. a) Kas koordinaattasandil leidub korrapärane hulknurk, mille kõik tipud on täisarvuliste koordinaatidega?

b) Kas koordinaattasandil leidub hulknurk, mille kõik tipud on täisarvuliste koordinaatidega ja kõik küljed võrdse pikkusega, kuid mis pole korrapärane?

2. Muutujate a, b, c suhtes kehtib seos $\frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{b^2}\cdot\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)$, kusjuures muutujate väärtused on positiivsed reaalarvud. Avalda muutuja a muutujate b ja c kaudu võimalikult lihtsal kujul.

3. Leia positiivse täisarvu p^2+239 vähim võimalik positiivsete tegurite arv, kui on teada, et p on algarv.

4. Leia kõik reaalarvude kolmikud (x, y, z), mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} xy + z^2 = x^2 + y^2, \\ yz + x^2 = y^2 + z^2, \\ zx + y^2 = z^2 + x^2, \\ xyz = 1 \end{cases}$$

5. Olgu E ja F vastavalt kolmnurga ABC külgede AC ja AB keskpunktid. Lõikude BE ja CF pikkused on võrdsed. Kas võib kindlalt väita, et kolmnurk ABC on võrdhaarne?

6. Olgu n positiivne täisarv, $n \geqslant 3$. Korrapärases n-nurgas märgitakse võimalikult suur arv selliseid diagonaale, mis mujal kui n-nurga tippudes omavahel ei lõiku. Leia vähim võimalik pikima märgitud diagonaali otspunktide vahele jäävate hulknurga külgede arv.

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Loomade varjupaigas on ainult koerad, kassid, küülikud ja hamstrid. Koeri on seal 20 võrra vähem kui kasse, kuid 15 võrra rohkem kui küülikuid. Hamstreid ja koeri on kokku 45. Mingit kahte liiki loomi on varjupaigas kokku niisama palju kui ülejäänud kahte liiki loomi kokku. Leia kõik võimalused, mitu looma võib olla selles varjupaigas.

2. Šokolaadipoe igal ostutšekil on 9 numbrist koosnev kood (see võib alata ka nullidega). Märt arvab, et ostutšeki kood on õnnelik, kui selles on vähemalt kaks numbrit 9. Kärt arvab, et ostutšeki kood on õnnelik, kui selles leidub kaks kõrvutiolevat numbrit, mille summa on 9. Kumma jaoks leidub rohkem õnnelikke ostutšeki koode?

3. Kas leiduvad sellised täisarvud x ja y, mille korral

$$\frac{20}{x} + \frac{21}{y} = \frac{2021}{x+y}?$$

4. Leia täisarvuliste kordajatega mittenullpolünoom, mille üks juur on $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.
Märkus. Polünoom on avaldis kujul $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, kus $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ on arvud; neid kutsutakse polünoomi *kordajateks*. Polünoomi *juureks* nimetatakse arvu x, mille korral polünoomi väärtus on 0.

5. Kolmnurgas ABC on külgede AC ja BC pikkused vastavalt 2 ja $\sqrt{7}$. Ringjoon diameetriga AB poolitab kolmnurga ABC tipust C tõmmatud kõrguse. Leia külje AB pikkus.

6. Arvutamisoskuste olümpiaadil antakse lahendada 6 ülesannet ja seal osaleb 360 õpilast. Väsimatu hindamiskomisjon koosneb 6 liikmest, kellest igaüks parandab mingi ühe ja sama ülesande kõigi osalejate võistlustöödes. On teada, et esimese ülesande parandajal kulub iga töö hindamiseks üks minut, teise ülesande parandajal kaks minutit, kolmanda ülesande parandajal kolm minutit jne. Et aga iga õpilase töö koosneb ühest paberist, millele ta on lahendanud kõik ülesanded, saab iga töö olla korraga ainult ühe parandaja käes. Kas on võimalik korraldada parandajate töö nii, et iga parandaja alustab parandamist kohe pärast võistluse lõppu ja saab vahepeal puhkamata oma ülesande kõigis töödes ära hinnata? Eeldame, et tööde algne jaotamine parandajate vahel ja nende üleandmine ühelt parandajalt teisele aega ei võta.

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia võrrandi

$$\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x} = 6\sqrt{x}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

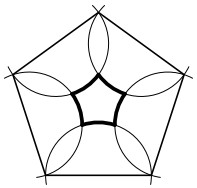
2. Kas arv $\log_{2,7} 2$ on suurem või väiksem arvust 0,7?

3. a) Tõesta, et iga naturaalarvu n korral jagub arv $n^{4040} + n^{4038} + \ldots + n^2 + 1$ arvuga $n^{2020} + n^{2019} + \ldots + n + 1$.

b) Kas väide jääb kehtima, kui esimesse avaldisse lisada liidetav n^{4042} ja teise avaldisse liidetav n^{2021}?

4. Milliste 1-st suuremate täisarvude n korral leidub positiivsete täisarvude komplekt $(a_1, \ldots, a_n)$, kus vähemalt kaks arvu on erinevad ja iga kahe arvu geomeetriline keskmine on selle komplekti mingite arvude (neid arve võib olla rohkem kui kaks) aritmeetiline keskmine?

5. Korrapärase viisnurga küljed on diameetriteks ringjoontele raadiusega 1 cm. Tõesta, et viisnurga keskele jääva viie ringjoone kaarega (joonisel jämeda joonega) piiratud kujundi pindala on $\left(5\tan 54^\circ - 5\sin 72^\circ - \frac{\pi}{2}\right)$ cm^2.



6. Võrdkülgse kolmnurga kujuline mängulaud küljepikkusega 2021 on jaotatud võrdkülgse kolmnurga kujulisteks väljadeks küljepikkusega 1. Algul asub mängunupp ühes suure võrdkülgse kolmnurga tipus. Kui nupp asub kahe ühise küljega välja poolt moodustatud rombi teravnurkses tipus, siis võib nupu käia selle rombi vastastippu. Teistsugused käigud pole lubatud. Mitmesse erinevasse punkti on võimalik nuppu viia?

68-я Олимпиада Эстонии по математике

27 января 2021 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Вычислить:

$$1 - 2 - (3 - 4 - (5 - 6 - (7 - 8))) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Вычислить:

$$\frac{2021}{47} : \frac{43}{2021} - \frac{2020}{101} : \frac{20}{2020} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Проезжая на поезде от деревни Красная до деревни Милая, Чебурашка увидел дорожный указатель „до Милой 66 км“. Проехав ещё 7 км, Чебурашка заметил знак „до Красной 55 км“. Сколько километров нужно проехать на поезде, чтобы добраться от деревни Красная до деревни Милая?

. . . . . .

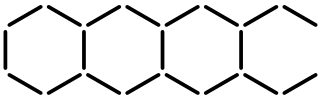
4. Найти наименьшее пятизначное число в виде $*3*4*$, все цифры которого различные и которое делится на числа 3 и 4. (Каждую звёздочку нужно заменить одной цифрой.)

. . . . . .

5. На сколько различных натуральных чисел можно умножить число 202,1 так, чтобы в результате получить 4-значное натуральное число?

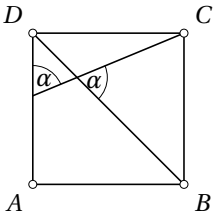
. . . . . .

6. Начало ряда шестиугольников, составленных из спичек, показано на рисунке. Всего использована 2021 спичка. Сколько всего шестиугольников в этом ряду?



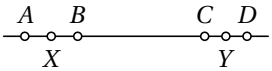
. . . . . .

7. Из вершины C квадрата $ABCD$ проведён отрезок, который образует как с диагональю BD, так и со стороной AD угол величиной α. Найти α.



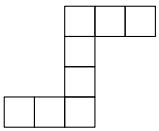
. . . . . .

8. Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Точка X является серединой отрезка AB, а точка Y серединой отрезка CD. Найти длину отрезка XY, если длина отрезка AD равна 21 см, а длина отрезка BC равна 12 см.



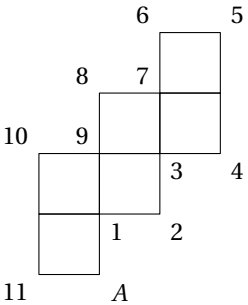
. . . . . .

9. Фигура составлена из 8-ми квадратов одинакового размера. Периметр этой фигуры равен 9 см. Найти площадь этой фигуры.



. . . . . .

10. На рисунке показана развёртка куба, одна из вершин которого обозначена A, а другие вершины числами от 1 до 11. Какими числами обозначены те вершины, которые совпадут с вершиной A после того, когда развёртку сложат в куб?



. . . . . .

68-я Олимпиада Эстонии по математике

27 января 2021 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Вычислить:

$$\frac{20 + 20 \cdot 20 - 21 \cdot 21 + 21}{20^2 + 21^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Найти число, которое лежит на числовой оси между числами $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$, и которое в два раза ближе к числу $\frac{1}{3}$, чем к числу $\frac{1}{2}$.

. . . . . .

3. Найти $a - 2b$, если $3(4b - 5) - 2(3a + 4) = 1$.

. . . . . .

4. Найти наименьшее простое число, равное сумме трёх различных простых чисел.

. . . . . .

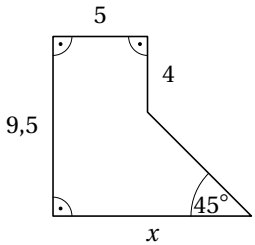
5. Цены двух футболок отличаются на 20 евро. Их средняя цена равна 21 евро. Сколько стоит более дешёвая из этих футболок?

. . . . . .

6. Какая часть всех четырёхзначных чисел, цифрами которых являются 2, 0, 2 и 1, делится на число 4?

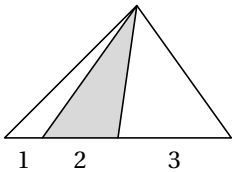
. . . . . .

7. На рисунке показан пятиугольник, в котором отмечены три прямых угла и угол величиной 45°, а также длины трёх сторон в сантиметрах. Найти длину стороны, обозначенной буквой x.



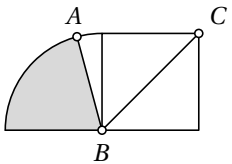
. . . . . .

8. Одна из сторон треугольника поделена на отрезки, длины которых 1 см, 2 см и 3 см. Найти площадь закрашенного в тёмный цвет треугольника, если сумма площадей незакрашенных частей равна 7 см^2.



. . . . . .

9. Фигура составлена из квадрата с длиной стороны 1 см и из четверти круга, радиус которого 1 см. Найти точное значение площади закрашенной части, если величина угла ABC равна 60°.



. . . . . .

10. Одна из вершин куба обозначена A. Любые три вершины куба являются вершинами некоторого треугольника. Сколько всего среди этих треугольников таких, у которых одна вершина A и которые целиком лежат на какой-либо грани куба?

. . . . . .

68-я Олимпиада Эстонии по математике

27 января 2021 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти $x + y$, если $x = \frac{2021}{2020} + \frac{2020}{2021} + \frac{2021}{2022}$ и $y = \frac{1}{2022} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2020}$.

. . . . . .

2. Сумма чисел m и n равна 90, а их разность равна 4. Найти произведение чисел m и n.

. . . . . .

3. Найти число a, если $\frac{a}{b} = 2$, $\frac{c}{a} = 3$ и $\frac{ab}{c} = 4$.

. . . . . .

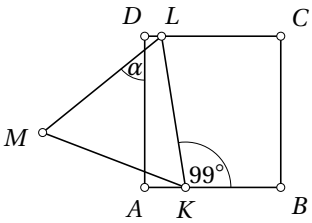
4. Три различных простых множителя числа 260 записывают рядом друг с другом так, чтобы образовалось наибольшее возможное число. Найти это число.

. . . . . .

5. В магазине кампания: покупая две футболки по полной цене, получаешь более дешёвую за полцены. Во время кампании купили две футболки по полной цене и заплатили за них всего 40 евро. Полная цена одной из них была 24 евро. Найти полную цену второй купленной футболки.

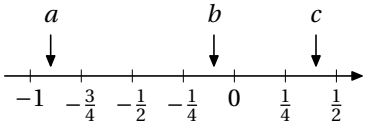
. . . . . .

6. Вершины K и L правильного треугольника KLM лежат на противоположных сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$. Величина угла BKL равна 99°. Какова величина угла, обозначенного на рисунке буквой α?



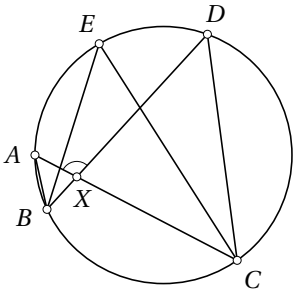
. . . . . .

7. На числовой оси обозначены местоположения чисел a, b и c. Расположить значения выражений $a + c$, $b - a$, ab и $\dfrac{a}{c}$ по порядку, начиная с наименьшего.



. . . . . .

8. Точки A, B, C, D и E лежат на одной окружности, причём $\angle ABE = 30^\circ$, $\angle BEC = 50^\circ$ и $\angle ECD = 25^\circ$. Прямые AC и BD пересекаются в точке X. Найти величину угла DXA.



. . . . . .

9. Одна из противоположных вершин квадрата совпадает с центром окружности, а другая лежит на этой же окружности. Найти точное значение площади этого квадрата, если площадь круга равна 22π см^2.

. . . . . .

10. Одна из вершин куба обозначена A. Любые три вершины куба являются вершинами некоторого треугольника. Сколько всего среди этих треугольников таких, у которых одна вершина A и которые целиком не лежат ни на одной грани куба?

. . . . . .

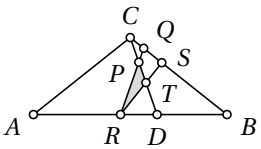
68-я Олимпиада Эстонии по математике

27 января 2021 г. Региональный тур **7 класс**

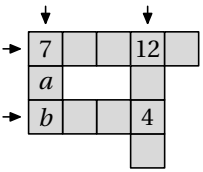
II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Тринадцатилетний Кевин получил от друзей трёхзначное число новогодних поздравлений. Он обратил внимание, что если бы число поздравлений было в 3 раза больше или на 200 меньше, то это число было бы по-прежнему трёхзначным. Также он заметил, что если разделить полученное число поздравлений на свой возраст, то частным будет квадрат некоторого целого числа. Сколько поздравлений получил Кевин?

2. На основании AB равнобедренного треугольника ABC выбирают точку D так, что $|AC| = |AD|$. На отрезке CD выбирают точку P, на стороне CB — точку Q, а на основании AB — точку R так, что $|QB| = |RB|$, причём P находится на отрезке QR. На стороне CB выбирают также точку S так, что отрезки RS и CB перпендикулярны. Прямые CD и RS пересекаются в точке T. Величина угла BAC равна $38{,}5^\circ$. Найти величины углов треугольника PRT.



3. В клетки записывают различные натуральные числа от 1 до 12 так, что в каждой клетке ровно одно число, а во всех четырёх обозначенных стрелкой рядах и столбцах суммы чисел равны. Ни для каких двух клеток, у которых имеется общая сторона или вершина, сумма чисел не равна 8, 9 или 10. Три числа в клетки уже записаны.



а) Найти числа a и b.

б) Как заполнить пустые клетки, чтобы все условия были выполнены? Найти все возможности.

68-я Олимпиада Эстонии по математике

27 января 2021 г. Региональный тур **8 класс**

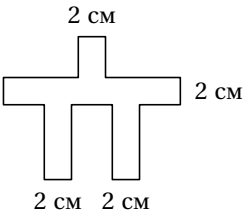
II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Полина и Соня должны были испечь на двоих 220 печенек. В действительности же Полина испекла 120%, а Соня 110% от своего запланированного количества печенек. На двоих они испекли всего 256 печенек.

а) Сколько печенек испекла Полина?

б) Верно ли, что если бы обе испекли 115% от своего запланированного количества печенек, то на двоих вышло бы всё равно 256 печенек?

2. Из прямоугольного листа бумаги вырезаны пять одинаковых прямоугольников. На рисунке показана оставшаяся часть листа бумаги, четыре стороны которой имеют длину 2 см. Длины сторон одного вырезанного прямоугольника различаются друг от друга на 7 см.



а) Найти размеры изначального листа бумаги.

б) Площадь оставшейся части листа бумаги больше, меньше или равна площади одного вырезанного прямоугольника?

3. На доске записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Боря выбирает два числа, записанные на доске, стирает их, и записывает взамен наименьшее общее кратное этих двух чисел. Затем Боря снова выбирает два числа, записанные на доске, стирает их, и записывает взамен наибольший общий делитель этих двух чисел. После этого Боря продолжает такие действия, причём приписываемые числа являются по очереди наименьшим общим кратным и наибольшим общим делителем стираемых чисел. Боря продолжает до тех пор, пока на доске не остаётся только одно число. Найти:

а) наибольшее число, которое может остаться в конце на доске;

б) наименьшее число, которое может остаться в конце на доске.

68-я Олимпиада Эстонии по математике

27 января 2021 г. Региональный тур **9 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найдутся ли такие простые числа p и q, что $p^2 - q^3 = 12$?

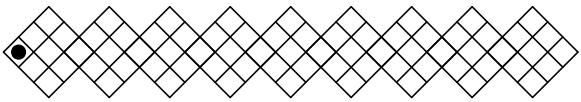
2. Равенство $x^2(y+z) = y^2(z-x)$ выполняется для каких-то положительных значений переменных x, y, z. Найти все возможности, какая переменная из этих трёх может иметь наименьшее значение.

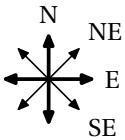
3. В треугольнике ABC известно, что $|AB| = |AC|$. Биссектриса угла при вершине B пересекает сторону AC в точке D.

а) Можно ли с уверенностью утверждать, что треугольник ABD равнобедренный, если известно, что треугольник CBD равнобедренный?

б) Можно ли с уверенностью утверждать, что треугольник CBD равнобедренный, если известно, что треугольник ABD равнобедренный?

4. Аня и Чебурашка играют на изображённом на рисунке игровом поле в следующую игру. Изначально фишка находится на самой западной клетке (на рисунке отмечена чёрным кружком). Каждым ходом может игрок подвинуть фишку на ближайшую клетку в направлении севера (N), северо-востока (NE), востока (E) или юго-востока (SE). Ходят по очереди, начинает Аня. Игрок, который не может больше сделать хода, проигрывает. Сможет ли кто-то из игроков выиграть при любой игре соперника, и если да, то кто?





68-я Олимпиада Эстонии по математике

27 января 2021 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. а) Найдётся ли на координатной плоскости правильный многоугольник, все вершины которого имеют целочисленные координаты?

б) Найдётся ли на координатной плоскости многоугольник, не являющийся правильным, все вершины которого имеют целочисленные координаты и все стороны которого равной длины?

2. Для переменных a, b, c выполняется $\frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{b^2}\cdot\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)$, причём значениями переменных являются положительные действительные числа. Выразить переменную a через переменные b и c в наиболее простом виде.

3. Найти наименьшее возможное число положительных делителей положительного целого числа p^2+239, если известно, что p — простое число.

4. Найти все тройки действительных чисел (x, y, z), удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} xy + z^2 = x^2 + y^2, \\ yz + x^2 = y^2 + z^2, \\ zx + y^2 = z^2 + x^2, \\ xyz = 1 \end{cases}$$

5. Обозначим середины сторон AC и AB треугольника ABC соответственно через E и F. Длины отрезков BE и CF равны. Можно ли с уверенностью утверждать, что треугольник ABC равнобедренный?

6. Дано целое положительное число n, $n \geqslant 3$. В правильном n-угольнике отмечается как можно больше таких диагоналей, которые не пересекаются друг с другом нигде кроме вершин n-угольника. Найти наименьшее возможное число сторон многоугольника между концами самой длинной из отмеченных диагоналей.

68-я Олимпиада Эстонии по математике

27 января 2021 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. В приюте для животных есть только собаки, кошки, кролики и хомяки. Собак там на 20 меньше, чем кошек, но на 15 больше, чем кроликов. Хомяков и собак вместе 45. Животных каких-то двух видов вместе в приюте столько же, сколько и животных оставшихся двух видов вместе. Найти все возможности, сколько животных может быть в этом приюте.

2. На каждом чеке из магазина шоколада есть код, состоящий из 9 цифр (он может начинаться и на ноль). Коля считает, что код чека счастливый, если в нём по крайней мере две цифры 9. Оля считает, что код чека счастливый, если в нём найдутся две стоящие рядом цифры, дающие в сумме 9. Для кого найдётся больше счастливых кодов?

3. Найдутся ли такие целые числа x и y, что

$$\frac{20}{x} + \frac{21}{y} = \frac{2021}{x+y}?$$

4. Найти ненулевой многочлен с целочисленными коэффициентами, который имеет корень $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Примечание. Многочлен имеет вид $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — числа; они называются *коэффициентами* многочлена. *Корнем* многочлена называется число x, при котором значение многочлена равно 0.

5. В треугольнике ABC стороны AC и BC имеют длины соответственно 2 и $\sqrt{7}$. Окружность с диаметром AB проходит через середину высоты треугольника ABC, проведенной из вершины C. Найти длину стороны AB.

6. На олимпиаде дают решать 6 задач, и в ней участвуют 360 учеников. Неустанная оценочная комиссия состоит из 6 членов, каждый из которых проверяет какую-то одну и ту же задачу во всех работах участников. Известно, что у проверяющего первой задачи на каждую работу уходит одна минута, у второго проверяющего — две минуты, у третьего — три и т. д. Однако так как работа каждого участника представляет собой одну бумажку, на которой он решал все задачи, то каждая работа в конкретный момент времени может быть только у одного проверяющего. Можно ли организовать работу проверяющих так, чтобы каждый проверяющий начал проверять сразу же после завершения соревнования и смог бы проверить свою задачу во всех работах, не отдыхая между делом? Будем считать, что как первичное рапределение работ между проверяющими, так и передача их от одного проверяющего другому времени не занимают.

68-я Олимпиада Эстонии по математике

27 января 2021 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти все действительные решения уравнения

$$\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}=6\sqrt{x}.$$

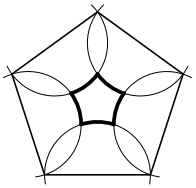
2. Больше ли число $\log_{2,7}2$, чем 0,7, или меньше?

3. а) Доказать, что $n^{4040}+n^{4038}+\ldots+n^2+1$ делится на $n^{2020}+n^{2019}+\ldots+n+1$ при каждом натуральном числе n.

б) Останется ли утверждение верным, если в первое выражение добавить слагаемое n^{4042}, а во второе — слагаемое n^{2021}?

4. Для каких больших 1 целых чисел n найдётся комплект целых положительных чисел $(a_1,\ldots,a_n)$, где по крайней мере два числа различны, а геометрическое среднее каждых его двух чисел является арифметическим средним каких-то чисел из этого комплекта (этих чисел может быть больше чем два)?

5. Стороны правильного пятиугольника являются диаметрами окружностей радиусом 1 см. Доказать, что фигура в центре пятиугольника, ограниченная дугами пяти окружностей (на рисунке выделены жирным), имеет площадь $\left(5\tan 54^\circ-5\sin 72^\circ-\frac{\pi}{2}\right)$ см^2.



6. Игровая доска в форме равностороннего треугольника с длиной стороны 2021 поделена на поля в форме равностороннего треугольника с длиной стороны 1. В начале фишка находится в одной из вершин большого равностороннего треугольника. Если фишка находится в остроугольной вершине ромба, образованного двумя полями с общей стороной, то этой фишкой можно пойти в противоположную вершину этого ромба. Другие шаги не разрешены. Во сколько различных точек можно переместить фишку?

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. 0.

2. 1.

3. 114.

4. 13248.

5. 4.

6. 404.

7. $67{,}5^\circ$.

8. 16,5 cm.

9. 2 cm^2.

10. 2 ja 4.

Lahendused

1. $1-2-(3-4-(5-6-(7-8))) = 1-(1-(1-1)) = 1-(1-0) = 1-1 = 0.$

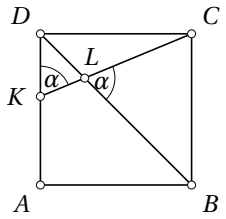
2. $\dfrac{2021}{47} : \dfrac{43}{2021} - \dfrac{2020}{101} : \dfrac{20}{2020} = \dfrac{2021^2}{47\cdot 43} - \dfrac{2020^2}{101\cdot 20} = \dfrac{2021^2}{2021} - \dfrac{2020^2}{2020} = 1.$

3. Olgu Karjakülast Marjaküllа x km. Siis esimese teeviida kohal on läbitud $x-66$ kilomeetrit ja veel 7 kilomeetri läbimisel juba $x-59$ kilomeetrit. Teise teeviida põhjal seega $x-59=55$, kust $x=114$.

4. Arv jagub 4-ga parajasti siis, kui tema kahest viimasest numbrist moodustatud arv jagub 4-ga. Seega üheliste number saab olla vaid 0 või 8, arvestades et numbrid ei tohi korduda.

Vähim võimalik kümnetuhandeliste number on 1. Vähim võimalik sajaliste number on 0, kuid sel juhul saaks üheliste number olla vaid 8, mis ei anna kokku 3-ga jaguvat arvu. Sajaliste number ei saa olla 1, kui kümnetuhandeliste number on 1. Suuruselt järgmine sajaliste number on 2. Proovimise teel leiame, et üheliste numbri 0 korral arv ei jagu 3-ga, kuid numbri 8 korral jagub.

5. Arvu 202,1 korrutamisel naturaalarvuliste teguritega tekib tulemusena naturaalarv ainult siis, kui tegur lõpeb nulliga. Seega samaväärne küsimus on, mitme erineva naturaalarvuga saab korrutada arvu 2021 nii, et tulemuseks on 4-kohaline naturaalarv. Sobivad tegurid 1, 2, 3 ja 4. Teguri 5 puhul on korrutis 5-kohaline, järelikult rohkem võimalusi ei ole.



Joonis 1

6. Üks kuusnurk koosneb 6 tikust, kuid kahel järjestikusel kuusnurgal on ühine tikk. Seega iga kuusnurk sisaldab 5 unikaalset tikku, arvestades ühised tikud alati parempoolse kuusnurga koosseisu. Siis 2020 tikuga saab joonistada $\frac{2020}{5}$ ehk 404 kuusnurka, kusjuures viimasel kuusnurgal on parempoolne tikk puudu. Selle tühimiku täidab viimane tikk.

7. Ruudu diagonaal poolitab nurgad, seega $\angle ADB = 45^\circ$. Olgu tipust C tõmmatud lõigu lõikepunktid küljega AD ja diagonaaliga BD vastavalt K ja L (joonis 1). Tippnurkadest saame $\angle KLD = \angle CLB = \alpha$. Kolmnurgast DKL nüüd $45^\circ + 2\alpha = 180^\circ$, kust $\alpha = \frac{135^\circ}{2} = 67{,}5^\circ$.

8. Lõik XY on lõigust AD niisama palju lühem kui lõik BC lõigust XY, sest üleminekul $AD \to XY \to BC$ lüheneb lõik kummaski otsas mõlemal sammul ühepalju. Seega lõigu XY pikkus on lõikude AD ja BC pikkuste keskmine ehk $|XY| = \frac{|AD| + |BC|}{2} = 16{,}5$ cm.

9. Olgu ühe ruudu küljepikkus a. Siis kujundi ümbermõõt on $18a$. Niisiis $18a = 9$ cm, millest $a = \frac{1}{2}$ cm. Järelikult ühe ruudu pindala on $\frac{1}{4}$ cm^2 ja kujundi pindala $8 \cdot \frac{1}{4}$ cm^2 ehk 2 cm^2.

10. Esimene voltimine tippu A sisaldava tahuga toimub piki serva, mille ühes tipus on 1 ja teine tipp on tähistamata, järgmine voltimine aga piki serva, mille tippudes on 9 ja 1. See viib tipu A kokku tipuga, milles on arv 2. Analoogselt jätkates saame selle tipu kokku viia ka tipuga, milles on arv 4. Et kuubi iga tipp kuulub kolmele tahule, siis rohkem pinnalaotuse tippe samasse kuubi tippu kokku sattuda ei saa.

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa vastused

1. 0.

2. $\frac{7}{18}$.

3. -4.

4. 19.

5. 11 eurot.

6. $\frac{1}{3}$.

7. 10,5 cm.

8. 3,5 cm^2.

9. $\frac{5}{24}\pi$ cm^2.

10. 9.

Lahendused

1. $\frac{20+20\cdot 20-21\cdot 21+21}{20^2+21^2}=\frac{20(1+20)-21(21-1)}{20^2+21^2}=\frac{20\cdot 21-21\cdot 20}{20^2+21^2}=0.$

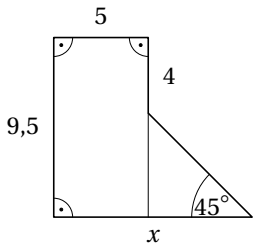
2. Arvu kirjeldusest saame võrrandi $\frac{1}{2}-x=2\left(x-\frac{1}{3}\right)$, mille lihtsustamisel saame $3x=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$, kust $x=\frac{7}{18}$.

3. Antud võrdus $3(4b-5)-2(3a+4)=1$ lihtsustub kujule $12b-6a=24$, kus võrduse poolte jagamisel arvuga -6 saame $a-2b=-4$.

4. Kolme erineva algarvu summa on ilmselt suurem kui ainus paaris algarv 2. Seega see summa on paaritu. Järelikult on kõik kolm liidetavat paaritud, sest ühe paaris ja kahe paaritu algarvu liitmisel tekiks paarisarv. Kolm vähimat paaritut algarvu 3, 5, 7 annavad summaks 15, mis pole algarv. Suuruselt järgmine summa tuleb, kui liidetava 7 asemel võtta järgmine algarv 11. Nüüd on summa 19, mis on algarv.

5. Olgu odavama särgi hind x eurot, siis kallima särgi hind on $x+20$ eurot. Saame võrrandi $\frac{x+(x+20)}{2}=21$, kust $x=11$.

6. Numbri 0 asukoha valikuks neljakohalises arvus on 3 võimalust, sest arv ei saa alata nulliga. Pärast seda on numbri 1 asukoha valikuks veel 3 võimalust. Sellega on antud numbritest moodustuv neljakohaline arv määratud,



Joonis 2

sest ülejäänud kohtadel peavad asuma numbrid 2. Kokkuvõttes on antud numbritest võimalik moodustada $3 \cdot 3$ ehk 9 erinevat neljakohalist arvu. Jagumaks arvuga 4, peab kahest viimasest numbrist moodustuv arv jaguma arvuga 4. Antud numbritest moodustatud sellised kahekohalised arvud on 12 ja 20. Esimesel juhul on kahe esimese numbri järjestus määratud, sest arv ei saa alata nulliga. Teisel juhul on kahe esimese numbri järjestuse valikuks 2 võimalust. Kokku saame 3 sobivat neljakohalist arvu. Nende osakaal kõigi moodustatavate neljakohaliste arvude seas on $\frac{3}{9}$ ehk $\frac{1}{3}$.

7. Pikendame külge pikkusega 4 sentimeetrit lõikumiseni küljega, mille pikkust küsitakse (joonis 2). Tekib ristkülik ja täisnurkne võrdhaarne kolmnurk, otsitav külg koosneb ristküliku lühemast küljest ja kolmnurga kaatetist. Ristküliku lühema külje pikkus on 5 sentimeetrit. Kolmnurga kaateti pikkus on $9{,}5 - 4$ ehk 5,5 sentimeetrit. Seega otsitava külje pikkus on $5 + 5{,}5$ ehk 10,5 sentimeetrit.

8. Kahe värvimata kolmnurga aluste pikkuste summa on 4 cm ehk 2 korda suurem värvitud kolmnurga aluse pikkusest 2 cm. Et kõigil kolmel kolmnurgal on ühine kõrgus, on ka värvimata kolmnurkade pindalade summa 2 korda suurem kui värvitud kolmnurga pindala. Järelikult värvitud kolmnurga pindala on pool värvimata alade pindalade summast ehk 3,5 cm^2.

9. Nurk ABC koosneb ruudu külje ja diagonaali vahelisest nurgast ning veerandringi värvimata sektori nurgast. Ruudu külje ja diagonaali vaheline nurk on 45°. Järelikult veerandringi värvimata sektori nurk on 15°. Värvitud sektori nurk on siis 75°. Sektori pindala on $\frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 1^2$ ehk $\frac{5}{24}\pi$ ruutsentimeetrit.

10. Kuubi tahul, mille üks tipp on A, on veel 3 tippu. Nende seast kolmnurga 2 tipu valikuks on 3 võimalust. Tipp A kuulub 3 tahule. Järelikult on otsitavaid kolmnurki $3 \cdot 3$ ehk 9 tükki.

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa vastused

1. 3.

2. 2021.

3. 24.

4. 5213.

5. 28 eurot.

6. 51°.

7. $\frac{a}{c}$, $a+c$, ab, $b-a$.

8. 105°.

9. $11\ \text{cm}^2$.

10. 12.

Lahendused

1. $x+y=\frac{2021-1}{2020}+\frac{2020+1}{2021}+\frac{2021+1}{2022}=1+1+1=3.$

2. Süsteemi

$$\begin{cases} m+n = 90, \\ m-n = 4 \end{cases}$$

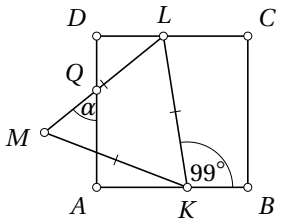
lahend on $m=47$, $n=43$. Seega $mn=47\cdot 43=2021$.

3. Antud kolme võrduse vastavate poolte korrutamisel saame $\frac{a^2bc}{abc}=24$. Et $\frac{a^2bc}{abc}=a$, siis $a=24$.

4. Arvu 260 kanooniline esitus on $2^2\cdot 5\cdot 13$. Suurima arvu moodustamiseks peab suurim number ehk 5 olema esimene. Ülejäänud tegurite järjestust varieerides saame kaks varianti 5213 ja 5132, millest esimene on suurem.

5. Kui särk hinnaga 24 eurot oleks kallim särk, siis oleks teise särgi täishind $(40-24)\cdot 2$ ehk 32 eurot. Kuid siis poleks särk hinnaga 24 eurot kallim särk. Seega särk hinnaga 24 eurot on odavam särk ning teise särgi täishind on $40-\frac{24}{2}$ ehk 28 eurot.

6. Olgu ristküliku külje AD ja kolmnurga külje LM lõikepunkt Q (joonis 3). Põiknurkadest saame $\angle DLK=\angle BKL=99^\circ$. Et võrdkülgse kolmnurga sisenurgad on suurusega 60°, siis $\angle QLD=99^\circ-60^\circ=39^\circ$. Kolmnurgast DLQ seega $\angle DQL=180^\circ-90^\circ-39^\circ=51^\circ$. Tippnurkade tõttu on niisama suur ka otsitav nurk.



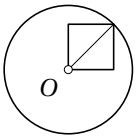
Joonis 3

7. Et $0 < c < 1$ ja $a < 0$, siis $\frac{a}{c} < a$. Et $c > 0$, siis $a + c > a$. Kokkuvõttes $\frac{a}{c} < a + c$. Et $a < -\frac{1}{2}$ ja $c < \frac{1}{2}$, siis $a + c < 0$. Et samas $a < 0$ ja $b < 0$, siis $ab > 0$. Kokkuvõttes $a + c < ab$. Et $|a| < 1$ ja $|b| < \frac{1}{2}$, siis $ab < \frac{1}{2}$. Et aga $b > -\frac{1}{4}$ ja $a < -\frac{3}{4}$, siis $b - a > \frac{1}{2}$. Kokkuvõttes $ab < b - a$.

8. Kuna

$$\angle XDC = \angle BDC = \angle BEC = 50^\circ,$$
$$\angle XCD = \angle ACD = \angle ACE + \angle ECD = \angle ABE + \angle ECD = 30^\circ + 25^\circ = 55^\circ,$$

siis kolmnurgast CDX saame $\angle CXD = 180^\circ - 50^\circ - 55^\circ = 75^\circ$. Järelikult $\angle DXA = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.



Joonis 4

9. Ringjoone raadius r võrdub ruudu diagonaaliga (joonisel 4 on ringi keskpunkt märgitud kui O). Ringi pindala on πr^2 ja ruudu pindala $\frac{1}{2}r^2$. Et $\pi r^2 = 22\pi$ cm^2, siis ruudu pindala on 22π cm$^2 : \pi \cdot \frac{1}{2}$ ehk 11 cm^2.

10. Kuubil on 8 tippu ehk peale A veel 7 tippu. Võimalusi nende 7 tipu hulgast valida 2 kolmnurga tippu on 21. Ühel tahul on 4 tippu ehk peale A veel 3 tippu. Võimalusi nende 3 tipu hulgast valida 2 kolmnurga tippu on 3. Tipp A kuulub 3 tahule. Seega võimalusi valida 2 tippu, mis kuuluvad koos tipuga A ühele ja samale tahule, on $3 \cdot 3$ ehk 9. Kolmnurki, kus kõik tipud ei kuulu ühele ja samale kuubi tahule, on järelikult $21 - 9$ ehk 12.

II osa lahendused

1. *(Olümpiaadižürii)*

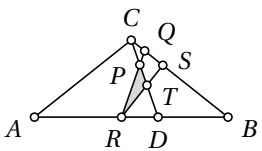
Kolmeteistkümneaastane Kevin sai sõpradelt kolmekohalise arvu uusaastatervitusi. Ta pani tähele, et isegi siis, kui tervituste arv oleks olnud 3 korda suurem või 200 võrra väiksem, oleks see olnud ikka kolmekohaline. Lisaks ta märkas, et jagades saadud tervituste arvu oma vanusega, on tulemuseks mingi täisarvu ruut. Mitu uusaastatervitust sai Kevin?

Vastus: 325.

Lahendus 1. Et kolmekordne tervituste arv on kolmekohaline ehk ülimalt 999, saab tervituste arv ise olla kõige rohkem 333. Et tervituste arvust 200 võrra väiksem arv on samuti kolmekohaline ehk vähemalt 100, peab tervituste arv olema vähemalt 300. Arv 300 annab 13-ga jagades jäägi 1, seega 13-ga jaguvad arvud 300 ja 333 vahel on 312 ja 325. Vastavad jagatised on 24 ja 25; ainult teine on täisarvu ruut. Seega Kevin sai 325 uusaastatervitust.

Lahendus 2. Täisarvude ruudud suurusjärjestuses on $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$. Nende 13-kordsed on vastavalt $0, 13, 52, 117, 208, 325, 468, \ldots$, millest kolm esimest pole kolmekohalised. Arvud 117 ja 208 ei sobi, sest neist 200 võrra väiksemad arvud pole kolmekohalised. Arv 325 sobib, sest temast 200 võrra väiksem arv 125 ja temast 3 korda suurem arv 975 on samuti kolmekohalised. Arv 468 ei sobi, sest temast 3 korda suurem arv 1404 on neljakohaline. Suuremad arvud ammugi ei sobi. Järelikult sai Kevin 325 uusaastatervitust.

2. *(Olümpiaadižürii)*



Võrdhaarse kolmnurga ABC alusel AB valitakse punkt D nii, et $|AC| = |AD|$. Lõigul CD valitakse punkt P, haaral CB punkt Q ja alusel AB punkt R nii, et $|QB| = |RB|$ ning P asub lõigul QR. Haaral CB valitakse veel punkt S nii, et RS ja CB on risti. Sirged CD ja RS lõikuvad punktis T. Nurga BAC suurus on $38{,}5^\circ$. Leia kolmnurga PRT nurkade suurused.

Vastus: $38{,}5^\circ$, $19{,}25^\circ$ ja $122{,}25^\circ$.

Lahendus. Et AB on võrdhaarse kolmnurga ABC alus, siis sisenurgad A ja B juures võrduvad ehk $\angle ABC = \angle BAC = 38{,}5^\circ$. Et $|AC| = |AD|$, siis ka kolmnurk ACD on võrdhaarne, kust $\angle ADC = \dfrac{180^\circ - 38{,}5^\circ}{2} = 70{,}75^\circ$.

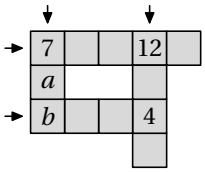
Kuna ka $|QB| = |RB|$, siis võrdhaarne on ka kolmnurk BQR, millest saame $\angle BRQ = \dfrac{180^\circ - 38{,}5^\circ}{2} = 70{,}75^\circ$. Seega $\angle PDR = \angle PRD = 70{,}75^\circ$, mis annab $\angle DPR = 180^\circ - 2 \cdot 70{,}75^\circ = 38{,}5^\circ$.

Võrdhaarses kolmnurgas BQR aga saame veel $\angle RQB = 70{,}75^\circ$. Et RS ja CB on risti ja $\angle RQS = 70{,}75^\circ$, siis täisnurksest kolmnurgast QRS saame $\angle QRS = 90^\circ - 70{,}75^\circ = 19{,}25^\circ$.

Lõpuks saame $\angle PTR = 180^\circ - 38{,}5^\circ - 19{,}25^\circ = 122{,}25^\circ$.

3. *(Olümpiaadižürii)*

Ruutudesse kirjutatakse erinevad naturaalarvud 1 kuni 12 nii, et igas ruudus on täpselt üks arv ning kõigis neljas noolega näidatud reas ja veerus on arvude summad võrdsed. Üheski kahes sellises ruudus, millel on ühine tipp või külg, ei ole arvude summa 8, 9 ega 10. Kolm arvu on juba ruutudesse kirjutatud.



a) Leia arvud a ja b.

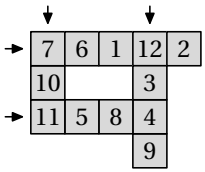
b) Kuidas tuleks täita tühjad ruudud, et kõik tingimused oleksid täidetud? Leia kõik võimalused.

Vastus: a) $a = 10$, $b = 11$; b) vt joonis 5.

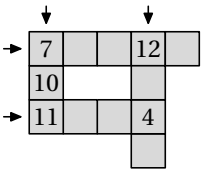
Lahendus.

a) Olgu igas noolega näidatud reas ja veerus arvude summa s. Arvude $1, 2, \ldots, 12$ summa on 78. Et noolega näidatud ridade ja veergude summades on arvud 7, 12, 4 ja b arvestatud kaks korda ja kõik ülejäänud arvud ühe korra, siis $4s = 78 + 7 + 12 + 4 + b = 101 + b$. Arv $101 + b$ jagub 4-ga, kui $b = 3$, $b = 7$ või $b = 11$. Juht $b = 7$ ei sobi, sest 7 on kasutatud mujal. Kui $b = 3$, siis $s = 26$ ning vasakpoolsest veerust $a = 26 - 7 - 3 = 16$, mis pole samuti võimalik. Järelikult $b = 11$, $s = 28$ ning $a = 28 - 7 - 11 = 10$ (joonis 6).

b) Arvu 7 naabriks ei saa olla arvud 1, 2 ega 3, muidu tekiks summa 8, 9 või 10. Seega arvu 7 parempoolne naaber peab olema vähemalt 5, sest 4 on kasutatud mujal. Järelikult ülemise rea ülejäänud kahe tühja ruudu arvude summa on ülimalt $28 - 7 - 12 - 5$ ehk 4.



Joonis 5



Joonis 6

Teisalt ei saa arvu 4 naabriks olla 5 ega 6, muidu tekiks summa 9 või 10. Arvud 5 ja 6 ei saa olla ka ülemises reas arvu 12 naabrid, sest nende ruutude arvude summa on eelneva põhjal ülimalt 4. Järelikult 5 ja 6 asuvad vasakult teise veeru ruutudes.

Kui 6 oleks 11 kõrval, peaks 6 ja 4 vahel olema $28 - 11 - 6 - 4$ ehk 7, mis on juba kasutatud. Seega ülalt kolmandas reas on 11 järel 5 ja 8 ning ülemises reas 7 järel 6. Ülemise rea kahes ülejäänud tühjas ruudus peavad olema 1 ja 2, muidu läheks summa lõhki; et 6 ja 2 ei saa olla kõrvuti, on ülemise rea arvud vasakult paremale 7, 6, 1, 12, 2. Vasakult neljanda veeru tühjades ruutudes peavad olema kasutamata arvud 3 ja 9; et 1 ja 9 ei saa olla nurkapidi kokkupuutuvates ruutudes, siis neljanda veeru arvud ülalt alla on 12, 3, 4, 9. Kokkuvõttes joonisel 5 kujutatud variant on ainus võimalus.

II osa lahendused

1. *(Olümpiaadižürii)*

Pille ja Sille pidid kahe peale kokku tegema 220 küpsist. Tegelikult tegi Pille 120% ja Sille 110% oma planeeritud kogusest ja nüüd olid nad kahe peale kokku teinud 256 küpsist.

a) Mitu küpsist tegi Pille?

b) Kas on õige, et kui mõlemad oleks teinud 115% oma planeeritud küpsiste kogusest, siis kahe peale kokku oleks tehtud ikka 256 küpsist?

Vastus: a) 168; b) ei.

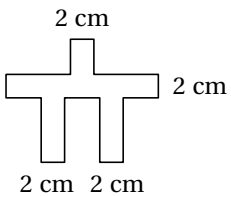
Lahendus.

a) Olgu Pille planeeritud küpsiste arv x. Siis Sille planeeritud küpsiste arv on $220 - x$. Tegelikult tegi Pille küpsiseid 120% arvust x ehk $1{,}2x$ ja Sille 110% arvust $220 - x$ ehk $1{,}1(220 - x)$. Ülesande tingimustest tulenevalt $1{,}2x + 1{,}1(220 - x) = 256$. Et $1{,}2x + 1{,}1(220 - x) = 0{,}1x + 242$, siis saame võrrandi $0{,}1x + 242 = 256$, kust $0{,}1x = 14$. Seega $x = 140$ ehk Pille pidi tegema 140 küpsist. Tegelikult tegi Pille $1{,}2 \cdot 140$ ehk 168 küpsist.

b) Kui kumbki oleks teinud 115% oma planeeritud küpsiste kogusest, oleks nad ka kokku teinud 115% oma kahe peale planeeritud küpsiste kogusest. Seega nad oleks teinud $1{,}15 \cdot 220$ ehk 253, mitte 256 küpsist.

2. *(Olümpiaadižürii)*

Ristkülikukujulisest paberilehest on välja lõigatud viis ühesugust ristkülikut. Joonisel on näidatud paberilehest alles jäänud osa, mille nelja külje pikkused on 2 cm. Ühe väljalõigatud ristküliku külgede pikkused erinevad teineteisest 7 cm võrra.



a) Leia esialgse paberilehe mõõtmed.

b) Kas paberilehest alles jäänud osa pindala on suurem, väiksem või niisama suur kui ühe väljalõigatud ristküliku pindala?

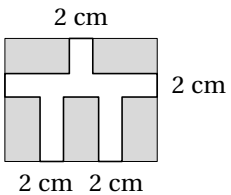
Vastus: a) 40 cm × 33 cm; b) väiksem.

Lahendus 1.

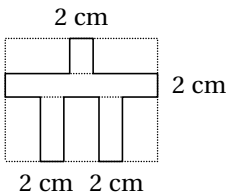
a) Olgu väljalõigatud ristküliku lühema külje pikkus a cm ja pikema külje pikkus b cm. Olgu algse paberilehe (joonis 7) mõõtmed joonise horisontaalsihis x cm ja vertikaalsihis y cm.

Saame $2b+2 = x = 3a+4$, kust $b = \dfrac{3a+2}{2} = 1{,}5a+1$, ning $a+b+2 = y$. Et ülesande tingimuste põhjal $b = a+7$, siis $1{,}5a+1 = a+7$, kust $a = 12$ ja $b = 19$. Seega $x = 2 \cdot 19 + 2 = 40$ ja $y = 12 + 19 + 2 = 33$. Niisiis algse ristküliku mõõtmed on 40 cm × 33 cm.

b) Eelneva põhjal koosneb allesjäänud osa ühest ristkülikust mõõtmetega 2 cm × 12 cm, ühest ristkülikust mõõtmetega 2 cm × 40 cm ja kahest ristkülikust mõõtmetega 2 cm × 19 cm (joonis 8). Seega allesjäänud osa pindala on $2 \cdot (12 + 40 + 19 + 19)$ ehk 180 ruutsentimeetrit. Ühe väljalõigatud ristküliku pindala on aga $12 \cdot 19$ ehk 228 ruutsentimeetrit. Seega allesjäänud osa pindala on väiksem.



Joonis 7



Joonis 8

Lahendus 2.

a) Nagu lahenduses 1 olgu algse paberilehe mõõtmed joonise horisontaalsihis x cm. Paberilehe ülemise serva jaotuse põhjal näeme, et väljalõigatud ristküliku pikem külg on pikkusega $\dfrac{x-2}{2}$ cm, alumise serva jaotuse põhjal aga näeme, et väljalõigatud ristküliku lühem külg on pikkusega $\dfrac{x-4}{3}$ cm. Et ülesande tingimuste põhjal erinevad väljalõigatud ristküliku külgede pikkused 7 cm võrra, saame võrrandi $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{x-4}{3} + 7$. Selle lahend on $x = 40$. Et nii vasak kui ka ülemine serv koosnevad kolmest lõigust, millest üks langeb kokku väljalõigatud ristküliku pikema küljega ja teine on pikkusega 2 cm, kuid kolmas lõik langeb vasakus servas kokku väljalõigatud ristküliku lühema ja ülemises servas pikema küljega, siis algse paberilehe mõõtmed erinevad niisama palju kui väljalõigatud ristküliku mõõtmed. Järelikult on paberilehe mõõtmed 40 cm × 33 cm.

b) Algse ristküliku pindala on $40 \cdot 33$ ehk 1320 ruutsentimeetrit. Osas a) tehtu põhjal on väljalõigatud ristküliku pikema külje pikkus $\dfrac{40-2}{2}$ ehk 19 ja lühema külje pikkus $\dfrac{40-4}{3}$ ehk 12 sentimeetrit. Seega väljalõigatud ristküliku pindala on $19 \cdot 12$ ehk 228 ruutsentimeetrit. Järelejäänud kujundi pindala on $1320 - 5 \cdot 228$ ehk 180 ruutsentimeetrit, mis on väiksem kui väljalõigatud ristküliku pindala.

3. *(Härmel Nestra)*

Tahvlil on arvud 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ben valib kaks tahvlil olevat arvu, kustutab need ja kirjutab juurde nende kahe arvu vähima ühiskordse. Seejärel valib Ben jälle mingid kaks tahvlil olevat arvu, kustutab need ja kirjutab juurde nende kahe arvu suurima ühisteguri. Edasi kordab Ben sarnaseid samme, kusjuures juurde kirjutatavateks arvudeks on vaheldumisi kustutatud arvude vähim ühiskordne ja suurim ühistegur. Nii jätkab Ben, kuni tahvlile jääb vaid üks arv. Leia:

a) suurim arv, mis saab lõpuks tahvlile jääda;

b) vähim arv, mis saab lõpuks tahvlile jääda.

Vastus: a) 840; b) 1.

Lahendus.

a) Valigu Ben vaheldumisi kaks suurimat ja kaks vähimat tahvlil olevat arvu. Protsess kulgeb järgnevalt:

Samm	Tahvlil olevad arvud	Viimatine operatsioon
0	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$	
1	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 56$	VÜK$(7, 8)$
2	$1, 3, 4, 5, 6, 56$	SÜT$(1, 2)$
3	$1, 3, 4, 5, 168$	VÜK$(6, 56)$
4	$1, 4, 5, 168$	SÜT$(1, 3)$
5	$1, 4, 840$	VÜK$(5, 168)$
6	$1, 840$	SÜT$(1, 4)$
7	840	VÜK$(1, 840)$

Saadud arv 840 on kõigi algsete arvude $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ vähim ühiskordne. Suuremat arvu pole võimalik saada, sest kõik arvud, mida Ben võib oma tegevuses saada, on VÜK$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ tegurid.

b) Valigu Ben arve nagu a-osas selle erinevusega, et algselt tahvlil olev arv 1 jäägu kõrvale kuni viimase sammuni. Protsess on siis järgmine:

Samm	Tahvlil olevad arvud	Viimatine operatsioon
0	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$	
1	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 56$	VÜK$(7, 8)$
2	$1, 1, 4, 5, 6, 56$	SÜT$(2, 3)$
3	$1, 1, 4, 5, 168$	VÜK$(6, 56)$
4	$1, 1, 5, 168$	SÜT$(1, 4)$
5	$1, 1, 840$	VÜK$(5, 168)$
6	$1, 1$	SÜT$(1, 840)$
7	1	VÜK$(1, 1)$

Väiksemat arvu kui 1 pole võimalik saada, sest kasutatavate operatsioonidega on võimalik saada ainult positiivseid arve.

II osa lahendused

1. *(Erik Paemurru)*

Kas leiduvad sellised algarvud p ja q, et $p^2 - q^3 = 12$?

Vastus: jah.

Lahendus. Sobib võtta näiteks $p = 47$ ja $q = 13$, sest $47^2 = 2209$ ja $13^3 = 2197 = 2209 - 12$ ning 47 ja 13 on algarvud.

Märkus. Sobivate arvudeni võib kergesti jõuda, vaadates järjest läbi algarvude kuupe ja kontrollides, kas 12 liitmisel tekib algarvu ruut. Kontrollide arvu võib vähendada, pannes tähele, et q^3 peab andma 8-ga jagamisel jäägi 5, sest 12 liitmisel peab tekkima paaritu arvu ruut, mis annab 8-ga jagamisel jäägi 1; siis ka q ise peab andma 8-ga jagamisel jäägi 5. Samuti võib tähele panna, et q^3 peab andma 3-ga jagamisel jäägi 1, sest 12 liitmisel peab tekkima 3-ga mitte jaguva arvu ruut, mis annab 3-ga jagamisel jäägi 1; seega ka q ise peab andma 3-ga jagamisel jäägi 1.

2. *(Maksim Ivanov)*

Võrdus $x^2(y+z) = y^2(z-x)$ on tõene muutujate x, y, z mingite positiivsete väärtuste korral. Leia kõik võimalused, milline muutuja saab seejuures olla neist kolmest vähima väärtusega.

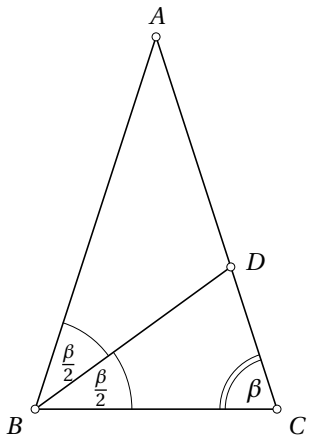
Vastus: x.

Lahendus. Kuna muutujate väärtused on eelduse põhjal positiivsed, on võrduse $x^2(y+z) = y^2(z-x)$ vasak pool positiivne. Järelikult peab positiivne olema ka parem pool. See on võimalik ainult siis, kui $z - x > 0$ ehk $z > x$. Seega z väärtus ei saa olla vähim. Et samas $y + z > z - x$, sest arvule z positiivse arvu liitmisel on tulemus suurem kui samast arvust positiivse arvu lahutamisel, siis antud võrduse kehtimiseks peab olema $y^2 > x^2$. Sellest tulenevalt $y > x$. Seega ka y väärtus ei saa olla vähim. Kokkuvõttes ainult x saab olla vähima väärtusega.

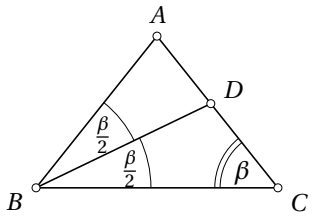
Märkus. Antud võrdus on tõene nt juhul $x = 1$, $y = z = 2$.

3. *(Härmel Nestra)*

Kolmnurgas ABC on $|AB| = |AC|$. Tipu B juures oleva nurga poolitaja lõikab külge AC punktis D.



Joonis 9



Joonis 10

a) Kas võib kindlalt väita, et kolmnurk ABD on võrdhaarne, kui on teada, et kolmnurk CBD on võrdhaarne?

b) Kas võib kindlalt väita, et kolmnurk CBD on võrdhaarne, kui on teada, et kolmnurk ABD on võrdhaarne?

Vastus: a) jah; b) ei.

Lahendus. Olgu $\angle CBA = \beta$. Et $|AB| = |AC|$, siis ka $\angle BCA = \beta$, ning et BD on nurgapoolitaja, siis $\angle CBD = \angle DBA = \frac{1}{2}\beta$ (joonis 9). Kolmnurga CBD nurkade suurused on β, $\frac{1}{2}\beta$ ja $180^\circ - \frac{3}{2}\beta$ ning kolmnurga ABD nurkade suurused on $180^\circ - 2\beta$, $\frac{1}{2}\beta$ ja $\frac{3}{2}\beta$.

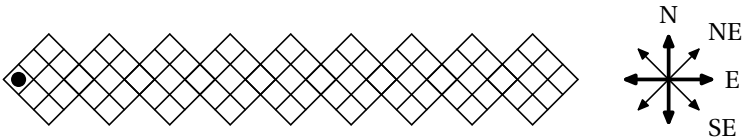
a) Olgu kolmnurk CBD võrdhaarne. Ilmselt ei saa olla $\frac{1}{2}\beta = \beta$. Samuti ei saa olla $\frac{1}{2}\beta = 180^\circ - \frac{3}{2}\beta$, sest sellest tuleneks $\beta = 90^\circ$, kuid võrdhaarse kolmnurga alusnurk on alati terav. Seega $\beta = 180^\circ - \frac{3}{2}\beta$, kust $\beta = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ$. Et $180^\circ - 2\beta = 36^\circ = \frac{1}{2}\beta$, siis on ka kolmnurk ABD võrdhaarne.

b) Kui $\beta = \frac{1}{7} \cdot 360^\circ$ (joonis 10), siis $180^\circ - 2\beta = \frac{7 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 360^\circ}{7} = \frac{3}{7} \cdot 180^\circ$ ja ka $\frac{3}{2}\beta = \frac{3}{7} \cdot 180^\circ$, mis tähendab, et kolmnurk ABD on võrdhaarne. Kolmnurk CBD aga ei ole võrdhaarne, sest a-osas tehtu põhjal on kolmnurk CBD võrdhaarne ainult siis, kui $\beta = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ$. Seega eeldusel,

et kolmnurk ABD on võrdhaarne, ei või kindlalt väita, et ka kolmnurk CBD on võrdhaarne.

4. *(Maksim Ivanov)*

Anu ja Sipsik mängivad joonisel kujutatud mänguväljakul järgmist mängu. Algul asub nupp kõige läänepoolsemal ruudul (joonisel tähistatud musta ringikesega). Igal käigul tohib kumbki mängija nuppu liigutada lähimale ruudule põhja (N), kirde (NE), ida (E) või kagu (SE) suunas. Käiakse kordamööda, alustab Anu. Mängija, kes ei saa käiku teha, on kaotanud. Kas ühel mängijaist on võimalik võita vastase iga vastumängu korral ja kui jah, siis kummal?

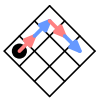


Vastus: jah, Sipsikul.

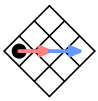
Lahendus. Võidab mängija, kes oma käigul asetab nupu idapoolseimale ruudule, sest teistelt ruutudelt on võimalik vähemalt ühes suunas käik sooritada, idapoolseimalt ruudult aga mitte. Mäng kindlasti lõpeb, sest lubatud käikudega pole võimalik seise korrata.

Vaatleme mängu käiku suvalisel 3×3 ruudustiku kujulisel mänguväljaku osal. Olgu Anu käigul nupp vaadeldava osa läänepoolseimal ruudul. On lihtne näha, et Sipsik saab mängida nii, et nupp jõuab vaadeldava osa idapoolseimale ruudule Sipsiku käiguga; selleks võib Sipsik käia nupu alati samas suunas, milles vahetult eelneval käigul käis Anu (kõik võimalikud variandid on kujutatud joonistel 11, 12, 13 ja 14; Anu käigud on näidatud punase ja Sipsiku omad sinise noolega).

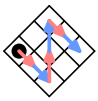
Idapoolseim ruut iga 3×3 ruudustiku kujulises osas peale viimase on aga ühtlasi järgmise samakujulise osa läänepoolseim ruut, kus käigu peab eelneva põhjal tegema jällegi Anu. Seega Sipsik saab kirjeldatud strateegiat igas 3×3 ruudustiku kujulises osas korrata, mille tulemusel jõuab nupp kogu mänguväljaku idapoolseimale ruudule Sipsiku käiguga. Seega Sipsik saab võita Anu iga vastumängu korral.



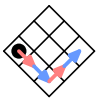
Joonis 11



Joonis 12



Joonis 13



Joonis 14

Lahendused

1. *(Kaarel Hänni, Oleg Košik)*

a) Kas koordinaattasandil leidub korrapärane hulknurk, mille kõik tipud on täisarvuliste koordinaatidega?

b) Kas koordinaattasandil leidub hulknurk, mille kõik tipud on täisarvuliste koordinaatidega ja kõik küljed võrdse pikkusega, kuid mis pole korrapärane?

Vastus: a) jah; b) jah.

Lahendus 1.

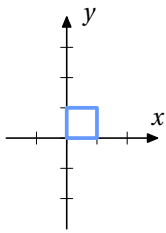
a) Sobib näiteks ruut tippudega $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$ ja $(1;0)$ (joonis 15).

b) Sobib näiteks 12-nurk tippudega $(1;0)$, $(1;1)$, $(0;1)$, $(0;2)$, $(1;2)$, $(1;3)$, $(2;3)$, $(2;2)$, $(3;2)$, $(3;1)$, $(2;1)$, $(2;0)$ (joonis 16).

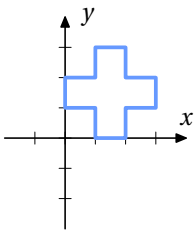
Lahendus 2.

a) Sobib näiteks ruut tippudega $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$ ja $(0;-1)$ (joonis 17).

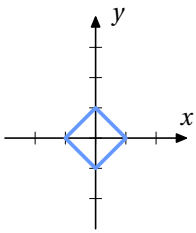
b) Sobib näiteks romb tippudega $(-1;0)$, $(0;2)$, $(1;0)$ ja $(0;-2)$ (joonis 18).



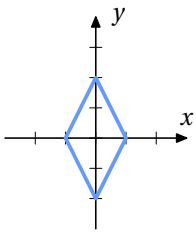
Joonis 15



Joonis 16



Joonis 17



Joonis 18

2. *(Maksim Ivanov, Härmel Nestra)*

Muutujate a, b, c suhtes kehtib seos $\frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{b^2}\cdot\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)$, kusjuures muutujate väärtused on positiivsed reaalarvud. Avalda muutuja a muutujate b ja c kaudu võimalikult lihtsal kujul.

Vastus: $a=b+c$.

Lahendus 1. Pärast sulgude avamist ja ühisele nimetajale viimist mõlemal pool saame $\frac{b+c}{a^2bc} = \frac{a-c}{ab^2c}$, kust $\frac{b+c}{a} = \frac{a-c}{b}$. Murdudest vabanemisel saame $b(b+c) = a(a-c)$ ehk $b^2+bc = a^2-ac$. Viies kõik liikmed ühele poole, saame $a^2-ac-(b^2+bc) = 0$. Käsitledes seda seost ruutvõrrandina a suhtes, saame $a = \frac{c \pm \sqrt{c^2+4(b^2+bc)}}{2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2+4bc+4b^2}}{2} = \frac{c \pm (c+2b)}{2}$. Juht $a = \frac{c-(c+2b)}{2} = -b$ pole võimalik, sest a ja b on positiivsed. Jääb üle variant $a = \frac{c+(c+2b)}{2} = b+c$.

Lahendus 2. Avades antud võrduses sulud ja viies kõik liikmed ühele poole, saame $\frac{1}{a^2b} + \frac{1}{a^2c} - \frac{1}{b^2c} + \frac{1}{ab^2} = 0$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2b} + \frac{1}{a^2c} - \frac{1}{b^2c} + \frac{1}{ab^2} &= \frac{1}{ab}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{c}\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right) = \\
&= \frac{1}{ab}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{c}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \\
&= \frac{1}{ab}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{ac}-\frac{1}{bc}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}-\frac{1}{bc}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \\
&= \frac{c+b-a}{abc}\cdot\frac{a+b}{ab}.
\end{aligned}$$

Järelikult $\frac{1}{a^2b} + \frac{1}{a^2c} - \frac{1}{b^2c} + \frac{1}{ab^2} = 0$ parajasti siis, kui $\frac{c+b-a}{abc}\cdot\frac{a+b}{ab} = 0$, mis omakorda leiab aset parajasti siis, kui $(c+b-a)(a+b) = 0$ ehk parajasti siis, kui $c+b-a = 0$ või $a+b = 0$. Esimesel juhul $a = b+c$. Teisel juhul $a = -b$, mis pole võimalik, sest a ja b on positiivsed.

3. *(Maksim Ivanov)*

Leia positiivse täisarvu p^2+239 vähim võimalik positiivsete tegurite arv, kui on teada, et p on algarv.

Vastus: 6.

Lahendus 1. Kui $p = 2$, siis $p^2+239 = 243 = 3^5$; sel arvul on 6 tegurit $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$. Kui $p = 3$, siis $p^2+239 = 248 = 2^3\cdot 31$; sel arvul on 8 tegurit $1, 2, 2^2, 2^3, 31, 2\cdot 31, 2^2\cdot 31, 2^3\cdot 31$.

Näitame, et juhul $p > 3$ on arvul p^2+239 vähemalt 8 tegurit. Märkame, et

$$p^2+239 = p^2-1+240 = (p+1)(p-1)+240.$$

Kuna p ei jagu 3-ga, siis kas $p-1$ või $p+1$ peab jaguma 3-ga. Seega $(p+1)(p-1)$ jagub 3-ga. Samas on $p+1$ ja $p-1$ kaks järjestikust paarisarvu,

mistõttu $(p+1)(p-1)$ jagub 8-ga, sest kahest järjestikusest paarisarvust üks jagub ka 4-ga. Kokkuvõttes $(p+1)(p-1)$ jagub 24-ga. Et ka 240 jagub 24-ga, siis p^2+239 jagub 24-ga ja ühtlasi kõigi 24 teguritega. Kuna 24-l on 8 tegurit $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$, siis arvul $p^2 + 239$ on vähemalt 8 tegurit. Järelikult arvu $p^2 + 239$ vähim võimalik tegurite arv on 6 juhul $p = 2$.

Lahendus 2. Tähistame $p^2 + 239 = a$. Nagu lahenduses 1 kontrollime, et juhul $p = 2$ on arvul a täpselt 6 tegurit. Kui $p > 2$, siis p on paaritu; olgu $p = 2k+1$, siis $a = (2k+1)^2-1+240 = 4k^2+4k+240 = 4k(k+1)+8\cdot 30$. Kahest järjestikusest arvust üks on paaris, seega $k(k+1)$ on paaris ja $4k(k+1)$ jagub 8-ga. Järelikult ka arv a jagub 8-ga. Et ilmselt $a > 64$ ehk $\frac{a}{8} > 8$, on arvul a erinevad tegurid $1, 2, 4, 8, \frac{a}{8}, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}, a$. Kokkuvõttes on arvu p^2+239 vähim võimalik tegurite arv 6.

4. *(Urve Kangro)*

Leia kõik reaalarvude kolmikud (x, y, z), mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} xy + z^2 = x^2 + y^2, \\ yz + x^2 = y^2 + z^2, \\ zx + y^2 = z^2 + x^2, \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Vastus: $(1, 1, 1)$.

Lahendus 1. Liites kokku kolme esimese võrrandi vastavad pooled, saame pärast sarnaste liikmete koondamist

$$xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2.$$

Viinud kõik liikmed paremale ja korrutanud pooled 2-ga, saame sobiva rühmitamisega anda sellele võrrandile samaväärse kuju

$$0 = (y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2.$$

Ruutude summa võrdub nulliga ainult siis, kui kõik liidetavad on nullid. Seega $y = z$, $z = x$ ja $x = y$ ehk kokkuvõttes $x = y = z = t$, kus t on mingi reaalarv. Algse süsteemi viimane võrrand saab seega kuju $t^3 = 1$, kust $t = 1$.

Lahendus 2. Viimasest võrrandist on näha, et ükski muutujatest ei saa olla 0. Liites kaks esimest võrrandit, saame pärast koondamist $xy + yz = 2y^2$. Jagades y-ga läbi, saame $x + z = 2y$. Avaldame siit $z = 2y - x$ ja asendame esimesse võrrandisse, mis annab $xy + (2y - x)^2 = x^2 + y^2$. Siin pärast sulgude avamist, sarnaste liikmete koondamist ja läbijagamist y-ga saame $x + 4y - 4x = y$, kust $y = x$. Võrdusest $z = 2y - x$ seega ka $z = x$. Nüüd viimane võrrand omandab kuju $x^3 = 1$, kust $x = y = z = 1$.

Märkus. Lahendus 2 näitab, et kolmest esimesest võrrandist ühte pole vaja.

5. *(Härmel Nestra)*

Olgu E ja F vastavalt kolmnurga ABC külgede AC ja AB keskpunktid. Lõikude BE ja CF pikkused on võrdsed. Kas võib kindlalt väita, et kolmnurk ABC on võrdhaarne?

Vastus: jah.

Lahendus 1. Olgu M sirgete BE ja CF lõikepunkt ning D sirgete AM ja BC lõikepunkt (joonis 19). Et BE ja CF on kolmnurga ABC mediaanid, on M kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt. Seega AD on kolmnurga ABC kolmas mediaan ning M jaotab mh lõigud BE ja CF suhtes $2:1$. Eelduse põhjal $|BE| = |CF|$, mistõttu ka $|BM| = \frac{2}{3}|BE| = \frac{2}{3}|CF| = |CM|$. Mediaan AD poolitab lõigu BC; sellest tulenevalt on MD kolmnurga MBC mediaan. Et $|MB| = |MC|$, siis $MD \perp BC$, sest võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud mediaan ja kõrgus ühtivad. Seega ka $AD \perp BC$ ehk kolmnurga ABC tipust A tõmmatud mediaan ja kõrgus ühtivad. Järelikult kolmnurk ABC on võrdhaarne.

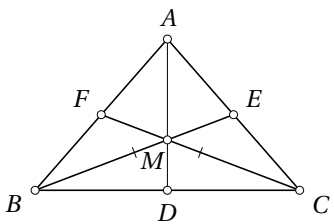
Lahendus 2. Olgu $a = |BC|$, $b = |CA|$ ja $c = |AB|$ ning $m = |BE|$, $n = |CF|$. Mediaani pikkuse valemi põhjal

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^2, \\ n^2 &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2. \end{aligned}$$

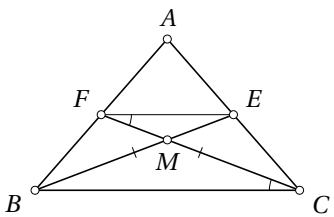
Lahutades esimesest võrrandist teise ja koondades sarnased liikmed, arvestades, et ülesande tingimuste põhjal $m = n$, saame

$$0 = \frac{3}{4}c^2 - \frac{3}{4}b^2.$$

Seega $\frac{3}{4}c^2 = \frac{3}{4}b^2$, kust $c = b$. Järelikult on kolmnurk võrdhaarne.



Joonis 19



Joonis 20

Märkus. Mediaani pikkuse valemit on lihtne tuletada koosinusteoreemi kaudu. Tähistame $\angle CFA = \delta$. Koosinusteoreemist kolmnurkades CFA ja CFB saame vastavalt

$$\begin{aligned} b^2 &= n^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}cn\cos\delta, \\ a^2 &= n^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}cn\cos(180^\circ - \delta). \end{aligned}$$

Liites need võrrandid ja koondades sarnased liikmed, võttes seejuures arvesse, et $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, saame $a^2 + b^2 = 2n^2 + \frac{1}{2}c^2$. Seega $n^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$.

Lahendus 3. Olgu M sirgete BE ja CF lõikepunkt. Sarnaselt lahendusega 1 tõestame, et $|BM| = |CM|$. Võrdhaarsest kolmnurgast BCM saame $\angle BCM = \angle CBM$. Seega kolmnurgad EBC ja FCB on sarnased tunnuse KNK põhjal ($|BE| = |CF|$ ja külg BC on ühine). Järelikult ka $|BF| = |CE|$. Seega $|AB| = 2|BF| = 2|CE| = |BC|$, millest tulenevalt on kolmnurk ABC võrdhaarne.

Lahendus 4. Olgu M sirgete BE ja CF lõikepunkt. Ülesande tingimuste põhjal on EF kolmnurga ABC küljega BC paralleelne kesklõik (joonis 20). Seega $BCEF$ on trapets ja M tema diagonaalide lõikepunkt ning eelduse põhjal on selle trapetsi diagonaalid võrdse pikkusega.

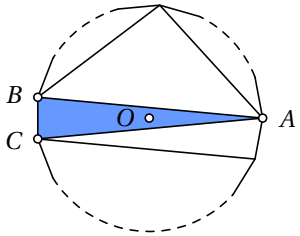
Näitame, et trapets $BCEF$ on võrdhaarne. Aluste paralleelsusest tulenevalt $\angle BCM = \angle EFM$, tippnurkadest aga saame $\angle BMC = \angle EMF$. Seega tunnuse NN põhjal on kolmnurgad BCM ja EFM sarnased. Et $|BC| = 2|EF|$, siis $|BM| = 2|EM|$ ja $|CM| = 2|FM|$. Saame

$$\begin{aligned} |BE| &= |BM| + |EM| = 2|EM| + |EM| = 3|EM|, \\ |CF| &= |CM| + |FM| = 2|FM| + |FM| = 3|FM|. \end{aligned}$$

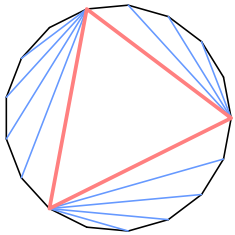
Ülesande tingimuste põhjal $|BE| = |CF|$, millest eelneva põhjal järeldub $|EM| = |FM|$. Võrdhaarsest kolmnurgast EFM nüüd $\angle MEF = \angle MFE$. Järelikult $\angle BEF = \angle BCF$, mistõttu punktid B, C, E, F on ühel ringjoonel. Võrduse $\angle BEF = \angle CFE$ põhjal on selle ringjoone kaared BF ja CE võrdsed, millest tulenevalt on ka kõõlud BF ja CE võrdse pikkusega.

Nüüd saame $|AB| = 2|BF| = 2|CE| = |AC|$, kust järeldub kolmnurga ABC võrdhaarsus.

Märkus. Lahenduse 4 keskmises lõigus läbi viidud arutlus väldib mediaani omaduste kasutamist. Selle asemel tõestab see kolmnurkade sarnasuse abil, et mistahes trapetsi diagonaalide lõikepunkt jaotab mõlemad diagonaalid aluste pikkuste suhtes. Et antud juhul aluste pikkuste suhe on kesklõigu omaduse põhjal 2, saame tuntud fakti, et mediaanide lõikepunkt jaotab mediaanid suhtes $2:1$, siit soovi korral vahetult järeldada.



Joonis 21



Joonis 22

6. *(Härmel Nestra)*

Olgu n positiivne täisarv, $n \geqslant 3$. Korrapärases n-nurgas märgitakse võimalikult suur arv selliseid diagonaale, mis mujal kui n-nurga tippudes omavahel ei lõiku. Leia vähim võimalik pikima märgitud diagonaali otspunktide vahele jäävate hulknurga külgede arv.

Vastus: $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

Lahendus. Võimalikult suur hulk mittelõikuvaid diagonaale tükeldab n-nurga kolmnurkadeks. Olgu ABC neist kolmnurkadest selline, mille sisse või küljele jääb n-nurga keskpunkt (joonisel 21 märgitud O-ga). Sisaldagu lühim tippude B ja C vaheline tee mööda n-nurga piirjoont täpselt x külge, lühim tippude C ja A vaheline analoogne tee täpselt y külge ja lühim tippude A ja B vaheline selline tee täpselt z külge; siis $x + y + z = n$. Eeldades üldisust kitsendamata $x \geqslant y \geqslant z$, saame $3x \geqslant n$, kust $x \geqslant \frac{n}{3}$. Seega pikima märgitud diagonaali otspunktide vahele jääb vähemalt $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ külge, kus $\lceil t \rceil$ tähistab vähimat täisarvu, mis pole väiksem kui t.

Teisalt saame iga külgede arvu $n \geqslant 3$ esitada kolme võimalikult ühesuuruse täisarvulise liidetava summana kujul $x+y+z$. Siis $\max(x, y, z) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Märgime tsükliliselt 3 diagonaali, mille otspunktide vahele jääb mööda n-nurga piirjoont lugedes täpselt x, y ja z külge, ning tükeldame iga märgitud diagonaali poolt korrapärasest n-nurgast ära lõigatud väiksema hulknurga maksimaalse arvu mittelõikuvate diagonaalidega (joonis 22 näitab üht võimalust $n = 17$ korral; kolm esimesena valitud diagonaali on märgitud jämeda punasega ja järgnevad sinisega). Need diagonaalid on kõik lühemad kui algselt tõmmatud kolmest diagonaalist pikim. Nii saame n-nurga tükelduse võimalikult suure arvu mittelõikuvate diagonaalidega, millest pikima otspunktide vahel on täpselt $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ hulknurga külge.

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendused

1. *(Maksim Ivanov)*

Loomade varjupaigas on ainult koerad, kassid, küülikud ja hamstrid. Koeri on seal 20 võrra vähem kui kasse, kuid 15 võrra rohkem kui küülikuid. Hamstreid ja koeri on kokku 45. Mingit kahte liiki loomi on varjupaigas kokku niisama palju kui ülejäänud kahte liiki loomi kokku. Leia kõik võimalused, mitu looma võib olla selles varjupaigas.

Vastus: 90 või 130.

Lahendus. Olgu varjupaigas olevate koerte arv x. Siis kasside arv on $x + 20$, küülikute arv $x - 15$ ja hamstrite arv $45 - x$. Loomade koguarv varjupaigas on $x + (x + 20) + (x - 15) + (45 - x)$ ehk $2x + 50$.

Teades, et kahte liiki loomi on varjupaigas kokku niisama palju kui ülejäänud kahte liiki loomi kokku, vaatame läbi kõik kolm võimalust.

- Kui koeri ja kasse on kokku niisama palju kui küülikuid ja hamstreid, siis $2x+20 = 30$, kust $x = 5$. Siis aga oleks küülikute arv negatiivne, mis pole võimalik.
- Kui koeri ja küülikuid on kokku niisama palju kui kasse ja hamstreid, siis $2x - 15 = 65$, kust $x = 40$. See rahuldab tingimusi. Loomade koguarv sel juhul on $2 \cdot 40 + 50$ ehk 130.
- Kui koeri ja hamstreid on kokku niisama palju kui kasse ja küülikuid, siis $45 = 2x + 5$, kust $x = 20$. Ka see variant rahuldab tingimusi. Loomade koguarv sel juhul on $2 \cdot 20 + 50$ ehk 90.

2. *(Maksim Ivanov)*

Šokolaadipoe igal ostutšekil on 9 numbrist koosnev kood (see võib alata ka nullidega). Märt arvab, et ostutšeki kood on õnnelik, kui selles on vähemalt kaks numbrit 9. Kärt arvab, et ostutšeki kood on õnnelik, kui selles leidub kaks kõrvutiolevat numbrit, mille summa on 9. Kumma jaoks leidub rohkem õnnelikke ostutšeki koode?

Vastus: Kärdi jaoks.

Lahendus. Koode, milles number 9 ei esine kordagi, on kokku 9^9 tükki. Koode, milles number 9 esineb täpselt ühe korra, on $9 \cdot 9^8$ ehk samuti 9^9, sest numbri 9 asukoha valikuks on 9 võimalust ja ülejäänud 8 numbri valikuks 9^8 võimalust. Kokku on niisiis $2 \cdot 9^9$ koodi, mis pole Märdi jaoks õnnelikud.

Loendame nüüd koode, mis ei ole Kärdi jaoks õnnelikud. Esimese numbri valikuks on 10 võimalust. Iga järgmise numbri valikuks on 9 võimalust, sest täpselt üks valik annaks eelmisele numbrile liites summaks 9. Seega leidub $10 \cdot 9^8$ koodi, mis pole Kärdi jaoks õnnelikud.

Et $2 \cdot 9^9 = 18 \cdot 9^8 > 10 \cdot 9^8$, on koode, mis pole Märdi jaoks õnnelikud, rohkem kui koode, mis pole Kärdi jaoks õnnelikud. Järelikult Kärdi jaoks õnnelikke koode on rohkem kui Märdi jaoks õnnelikke koode.

3. *(Härmel Nestra)*

Kas leiduvad sellised täisarvud x ja y, mille korral

$$\frac{20}{x} + \frac{21}{y} = \frac{2021}{x+y}?$$

Vastus: ei.

Lahendus 1. Viies võrrandi vasakul pool murrud ühisele nimetajale, saame

$$\frac{20y + 21x}{xy} = \frac{2021}{x+y}.$$

Murdudest vabanemisel saame võrrandi $(20y + 21x)(x + y) = 2021xy$, mis lihtsustub kujule

$$21x^2 - 1980xy + 20y^2 = 0. \tag{1}$$

Näitame, et võrrandil (1) ei leidu nullist erinevaid lahendeid; et $x = 0$ ja $y = 0$ ei sobi algsesse võrrandisse, siis järeldub sellest, et algsel võrrandil lahendid puuduvad.

Vaatleme algarvu 3 astendajaid liidetavate absoluutväärtuste kanoonilises esituses. Olgu 3^α ja 3^β suurimad 3 astmed, millega vastavalt x ja y jaguvad. Siis 3 astendajad arvude $21x^2$, $1980xy$ ja $20y^2$ kanoonilises esituses on vastavalt $2\alpha + 1$, $2 + \alpha + \beta$ ja 2β. Olgu k neist kolmest astendajast vähim ja l väiksuselt järgmine. Kui $k < l$, siis jagades võrrandi (1) arvuga 3^k, tekib vasakule poole kahe 3-ga jaguva ja ühe 3-ga mitte jaguva arvu summa, mis ei saa võrduda 3-ga jaguva arvuga 0. Järelikult $k = l$. Kuna astendajad $2\alpha + 1$ ja 2β ei saa olla võrdsed, siis üks kahest vähimast astendajast peab olema $2 + \alpha + \beta$, ehk $2 + \alpha + \beta \leqslant 2\alpha + 1$ ja $2 + \alpha + \beta \leqslant 2\beta$. Viimaste võrratuste liitmisel saame $4 + 2\alpha + 2\beta \leqslant 1 + 2\alpha + 2\beta$, kust $4 \leqslant 1$, vastuolu. Seega kaks vähimat astendajat ei saa olla ei võrdsed ega ka mittevõrdsed, mis näitab, et antud võrrandil lahendeid ei leidu.

Lahendus 2. Korrutades antud võrrandi läbi parema poole nimetajaga $x+y$, saame võrrandi

$$20\left(1 + \frac{y}{x}\right) + 21\left(\frac{x}{y} + 1\right) = 2021, \tag{2}$$

mida rahuldavad kõik need arvud mis algset võrrandit. Tähistame $\frac{y}{x} = t$; siis $\frac{x}{y} = \frac{1}{t}$. Võrrand (2) omandab kuju $20(1+t) + 21\left(1+\frac{1}{t}\right) = 2021$, mis pärast poolte korrutamist t-ga teisendub ruutvõrrandiks

$$20t^2 - 1980t + 21 = 0. \tag{3}$$

Olgu D selle võrrandi diskriminant, st $D = 1980^2 - 4 \cdot 20 \cdot 21 = 1980^2 - 1680$. Et $(1980-1)^2 = 1980^2 - 2 \cdot 1980 + 1 < 1980^2 - 1680$, siis D on suuruselt kahe järjestikuse täisruudu vahel ega saa ise olla täisruut. Järelikult $\sqrt{D}$ on irratsionaalarv, mistõttu võrrandi (3) lahendid on irratsionaalarvud. Kuid täisarvuliste x ja y korral oleksid $\frac{y}{x}$ ja $\frac{x}{y}$ ratsionaalarvud. Vastuolu näitab, et algsel võrrandil täisarvulised lahendid puuduvad.

Märkus. Muutujavahetus $t = \frac{y}{x}$ või seose vaatlemine ruutvõrrandina muutujate jagatise suhtes pole lahenduses 2 tingimata vajalik. Selle asemel võib alguses viia võrrandi kujule (1) nagu lahenduses 1 ja käsitleda seda ruutvõrrandina näiteks x suhtes. Diskriminant on sel juhul $D = 1980^2 y^2 - 1680y^2$. Eeldusel, et y on täisarv, oleks D täisruut parajasti siis, kui $1980^2 - 1680$ oleks täisruut; et see aga nii ei ole, peab $\sqrt{D}$ olema irratsionaalarv, mistõttu x ei saa olla täisarv.

4. *(Heiki Niglas)*

Leia täisarvuliste kordajatega mittenullpolünoom, mille üks juur on $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Märkus. Polünoom on avaldis kujul $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, kus $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ on arvud; neid kutsutakse polünoomi *kordajateks*. Polünoomi *juureks* nimetatakse arvu x, mille korral polünoomi väärtus on 0.

Lahendus 1. Olgu $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. Siis $\sqrt[3]{3} = x - \sqrt{2}$, mis kuupi tõstes annab $3 = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2}$ ehk

$$x^3 + 6x - 3 = \left(3x^2 + 2\right)\sqrt{2}.$$

Tõstes viimase võrduse mõlemad pooled ruutu, saame pärast liikmete viimist ühele poole ja sarnaste liikmete koondamist

$$x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0.$$

Viimase võrduse vasakul pool ongi sobiv polünoom.

Lahendus 2. Olgu $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. Avades sulud avaldistes $x^0, \ldots, x^6$, saame kõik need astmed avaldada liikmete $1, \sqrt{2}.\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3^2}, \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}, \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3^2}$ summana, kus kordajad avalduvad järgmiselt:

	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{3^2}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3^2}$
x^0	1					
x^1		1	1			
x^2	2			1	2	
x^3	3	2	6			3
x^4	4	12	3	12	8	
x^5	60	4	20	3	15	20
x^6	17	120	90	60	24	18

Paneme tähele, et polünoom $ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g$ on lahend, kui kehtib võrrandisüsteem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
17a & + & 60b & + & 4c & + & 3d & + & 2e & & & + & g & = & 0\\
120a & + & 4b & + & 12c & + & 2d & & & + & f & & & = & 0\\
90a & + & 20b & + & 3c & + & 6d & & & + & f & & & = & 0\\
60a & + & 3b & + & 12c & & & + & e & & & & & = & 0\\
24a & + & 15b & + & 8c & & & + & 2e & & & & & = & 0\\
18a & + & 20b & & & + & 3d & & & & & & & = & 0
\end{array}$$

Võrrandeid omavahel kombineerides ja muutujaid elimineerides on võimalik leida, et $b=0$. Valides seejärel üldisust kitsendamata $a=1$ (sest kui mingi polünoom on lahend, siis see on ka lahend kõigi kordajate korrutamisel nullist erineva arvuga), saame leida, et $a=1$, $b=0$, $c=-6$, $d=-6$, $e=12$, $f=-36$, $g=1$ rahuldab võrrandisüsteemi. Seega $x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$ on sobiv polünoom.

Märkus. Žürii vea tõttu puudus võistlusel esitatud ülesande tekstis täiend „mittenull“, mille tagajärjel leidus ülesandel triviaalne lahend, nullpolünoom (kõik kordajad nullid). Nullpolünoomi juured on kõik arvud, kaasa arvatud $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

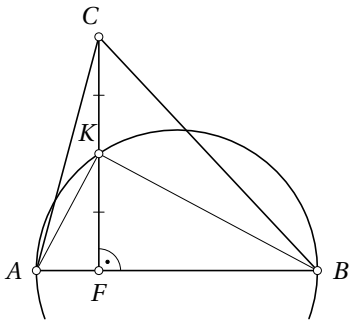
5. *(Maksim Ivanov)*

Kolmnurgas ABC on külgede AC ja BC pikkused vastavalt 2 ja $\sqrt{7}$. Ringjoon diameetriga AB poolitab kolmnurga ABC tipust C tõmmatud kõrguse. Leia külje AB pikkus.

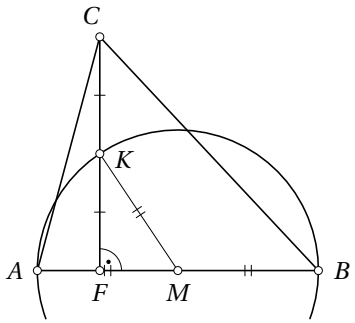
Vastus: $\dfrac{3\sqrt{15}}{5}$.

Lahendus 1. Olgu tipust C tõmmatud kõrgus CF ning lõikugu kõrgus ringjoonega punktis K (joonis 23). Kuna AKB on diameetrile toetuv piirdenurk, siis Thalese teoreemi põhjal $\angle AKB=90^\circ$.

Olgu $|CF|=h$, $|AF|=x$ ning $|BF|=y$. Kuna kolmnurgad ACF ja BCF on täisnurksed, siis saame kirja panna võrrandid $x^2+h^2=4$ ja $y^2+h^2=7$, kust vastavalt $x^2=4-h^2$ ja $y^2=7-h^2$. Kasutades kolmnurgas ABK teoreemi



Joonis 23



Joonis 24

täisnurkse kolmnurga kõrgusest, saame $\left(\frac{h}{2}\right)^2 = xy$, kust $x^2y^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^4 = \frac{h^4}{16}$. Kokkuvõttes $\left(4-h^2\right)\left(7-h^2\right) = \frac{1}{16}h^4$, millest $\frac{15}{2}h^4 - 88h^2 + 224 = 0$. Käsitledes viimast seost ruutvõrrandina h^2 suhtes, saame

$$h^2 = \frac{88 \pm \sqrt{88^2 - 2\cdot 15\cdot 224}}{15} = \frac{88 \pm \sqrt{1024}}{15} = \frac{88 \pm 32}{15}.$$

Juht $h^2 = \frac{88+32}{15} = 8$ ei sobi, sest siis $x^2 = 4 - h^2 = -4$. Teine lahend $h^2 = \frac{88-32}{15} = \frac{56}{15}$ annab $x^2 = 4 - h^2 = \frac{4}{15}$ ja $y^2 = 7 - h^2 = \frac{49}{15}$. Siit saame

$$|AB| = x + y = \frac{2}{\sqrt{15}} + \frac{7}{\sqrt{15}} = \frac{9}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{5}.$$

Lahendus 2. Olgu tipust C tõmmatud kõrgus CF ning lõikugu kõrgus ringjoonega punktis K; olgu M külje AB keskpunkt (joonis 24). Tähistades $|MA| = |MB| = |MK| = r$, $|KF| = |KC| = x$ ja $|MF| = y$, saame Pythagorase teoreemist täisnurksetes kolmnurkades AFC, BFC ja KFM võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 4x^2 + (r-y)^2 = 4, \\ 4x^2 + (r+y)^2 = 7, \\ x^2 + y^2 = r^2. \end{cases}$$

Asendades selle süsteemi kaks esimest võrrandit nende liitmisel ja lahutamisel saadavate võrranditega, saame samaväärse süsteemi

$$\begin{cases} 8x^2 + 2r^2 + 2y^2 = 11, \\ 4ry = 3, \\ x^2 + y^2 = r^2. \end{cases} \tag{4}$$

Asendades süsteemis (4) x^2 kolmandast võrrandist esimesse, saame võrrandi $8r^2 - 8y^2 + 2r^2 + 2y^2 = 11$, mis lihtsustub kujule

$$10r^2 - 6y^2 - 11 = 0. \tag{5}$$

Süsteemi (4) teise võrrandi poolte ruututõstmisel aga saame $16r^2y^2 = 9$ ehk

$$r^2y^2 = \frac{9}{16}. \tag{6}$$

Korrutades võrrandi (5) pooled suurusega r^2 ja asendades r^2y^2 võrrandist (6), saame võrrandi $10r^4 - 11r^2 - \frac{27}{8} = 0$. Lahendades selle r^2 suhtes, saame

$$r^2 = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 135}}{20} = \frac{11 \pm 16}{20}.$$

Et $r^2 > 0$ ja $r > 0$, siis $r = \sqrt{\frac{11+16}{20}} = \sqrt{\frac{27}{20}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{15}}{10}$. Järelikult $|AB| = 2r = \frac{3\sqrt{15}}{5}$.

6. *(Markus Rene Pae)*

Arvutamisoskuste olümpiaadil antakse lahendada 6 ülesannet ja seal osaleb 360 õpilast. Väsimatu hindamiskomisjon koosneb 6 liikmest, kellest igaüks parandab mingi ühe ja sama ülesande kõigi osalejate võistlustöödes. On teada, et esimese ülesande parandajal kulub iga töö hindamiseks üks minut, teise ülesande parandajal kaks minutit, kolmanda ülesande parandajal kolm minutit jne. Et aga iga õpilase töö koosneb ühest paberist, millele ta on lahendanud kõik ülesanded, saab iga töö olla korraga ainult ühe parandaja käes. Kas on võimalik korraldada parandajate töö nii, et iga parandaja alustab parandamist kohe pärast võistluse lõppu ja saab vahepeal puhkamata oma ülesande kõigis töödes ära hinnata? Eeldame, et tööde algne jaotamine parandajate vahel ja nende üleandmine ühelt parandajalt teisele aega ei võta.

Vastus: jah.

Lahendus 1. Jaotame 360 tööd 6 pakki, igaühes 60 tööd. Algul saab iga parandaja ühe neist pakkidest. Edasi korraldame töö 60-minutiliste perioodide kaupa. Iga sellise perioodi jooksul hinnaku iga parandaja tema käes olevas pakis niipalju seni tema poolt veel hindamata töid, kui ta jõuab. Pärast tunni möödumist vahetagu parandajad pakke tsükliliselt: esimene parandaja annab kõik tema käes olnud tööd teisele, teine kõik tema käes olnud tööd kolmandale jne, kuni kuues parandaja annab kõik tema käes olnud tööd esimesele. Selline töökorraldus on ülesande nr n parandaja seisukohast samaväärne sellega, kui ta parandab järgemööda igas pakis $\frac{60}{n}$ tööd, alustab siis

jälle algsest pakist järgmise $\frac{60}{n}$ töö parandamisega jne. Niisuguse ajakava korral ei pea parandaja enne puhkama, kui ta on kõik tööd ära hinnanud.

Lahendus 2. Nummerdame tööd naturaalarvudega 1 kuni 360 ja teeme järgmise ajagraafiku (tabeli lahtrites on tööde numbrid):

Minut	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	...
1. parandaja	1	2	3	4	5	6	7	8	...
2. parandaja	360	360	1	1	2	2	3	3	...
3. parandaja	359	359	359	360	360	360	1	1	...
4. parandaja	358	358	358	358	359	359	359	359	...
5. parandaja	357	357	357	357	357	358	358	358	...
6. parandaja	356	356	356	356	356	356	357	357	...

Piisab näidata, et ühegi töö number ei esine üheski veerus korduvalt (siis ei pea ükski töö olema korraga mitme parandaja käes). Väide kehtib tööde $1, 2, \ldots, 355$ korral, sest parandaja nr i lõpetab töö nr n lugemise pärast $(i-1)i + ni$ minuti möödumist parandamise algusest, parandaja nr $i+1$ aga alustab sama töö lugemist alles pärast $i(i+1) + (n-1)(i+1)$ minuti möödumist algusest ning

$$(i(i+1) + (n-1)(i+1)) - ((i-1)i + ni) = 2i + n - i - 1 = i + n - 1 > 0.$$

Sarnasel põhjusel kehtib väide töö nr 360 kohta 2.–6. ülesande parandajate osas; et see töö saab nende poolt parandatud pärast 30 minuti möödumist algusest, pole selle töö parandamisjärg veel 1. ülesande parandajani jõudnud, mistõttu kehtib väide ka 1. ülesande parandaja osas. Analoogselt põhjendame väite ülejäänud tööde kohta.

Lahendused

1. *(Heiki Niglas)*

Leia võrrandi

$$\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}=6\sqrt{x}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

Vastus: $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{9}$.

Lahendus 1. Antud võrrandi poolte läbikorrutamisel arvuga $\sqrt{x}-x$ saame $\sqrt{x}+x=6x-6x\sqrt{x}$ ehk $\sqrt{x}(6x+1)=5x$. Viimase võrduse poolte ruututõstmisel saame $x(36x^2+12x+1)=25x^2$ ehk samaväärselt

$$x(36x^2-13x+1)=0.$$

Et $x=0$ ei rahulda algset võrrandit, jääb järele juht $36x^2-13x+1=0$. Selle ruutvõrrandi lahendid on $x=\frac{1}{4}$ ja $x=\frac{1}{9}$. Kontroll näitab, et mõlemad lahendid rahuldavad algset võrrandit.

Lahendus 2. Tähistades $\sqrt{x}=t$, omandab võrrand kuju

$$\frac{t+t^2}{t-t^2}=6t,$$

millele otsime mittenegatiivseid reaalarvulisi lahendeid. Kuna $t=0$ pole lahend, siis saame vasakul taandades samaväärse võrrandi

$$\frac{1+t}{1-t}=6t. \tag{7}$$

Korrutades võrrandi pooled suurusega $1-t$, saame $1+t=6t(1-t)$, kust sulgude avamisel ja liikmete viimisel ühele poole tekib ruutvõrrand $6t^2-5t+1=0$ ehk $(2t-1)(3t-1)=0$. Selle lahendid on $t=\frac{1}{2}$ ja $t=\frac{1}{3}$. Kuna mõlemal juhul $1-t\neq 0$, siis rahuldavad need lahendid ka võrrandit (7). Seega algse võrrandi lahendid on $x=\frac{1}{4}$ ja $x=\frac{1}{9}$.

2. *(Härmel Nestra)*

Kas arv $\log_{2,7} 2$ on suurem või väiksem arvust 0,7?

Vastus: väiksem.

Lahendus. Näitame, et $\log_{2,7} 2 < 0{,}7$. Logaritmi definitsioonist tulenevalt $2{,}7^{\log_{2,7} 2} = 2$, mistõttu $\log_{2,7} 2 < 0{,}7$ kehtib parajasti siis, kui $2 < 2{,}7^{0,7}$, st parajasti siis, kui $2 < \left(\frac{27}{10}\right)^{\frac{7}{10}}$. Viimane võrratus kehtib parajasti siis, kui $2^{10} < \left(\frac{27}{10}\right)^7$. Et $\left(\frac{27}{10}\right)^7 = \frac{27^7}{10^7} = \frac{3^{21}}{10^7}$, siis vajalik võrratus kehtib parajasti siis, kui $2^{10} \cdot 10^7 < 3^{21}$. Viimane võrratus aga kehtib, sest

$$\begin{aligned} 3^{21} = \left(\left(3^5\right)^2\right)^2 \cdot 3 &= \left(243^2\right)^2 \cdot 3 = 59049^2 \cdot 3 = 3486784401 \cdot 3 = \\ &= 10460353203 > 10240000000 = 2^{10} \cdot 10^7. \end{aligned}$$

Märkus 1. Võrratust $2^{10} \cdot 10^7 < 3^{21}$ saab näidata ka väiksema arvutusvaevaga, kui esitada 3^{21} kujul $\left(3^4\right)^5 \cdot 3 = 81^5 \cdot 3$ ja kasutada binoomvalemist saadavat hinnangut

$$81^5 = (80+1)^5 > 80^5 + 5 \cdot 80^4 = 80^4 \cdot 85 = \left(2^4 \cdot 5\right)^4 \cdot 5 \cdot 17 = 2^{16} \cdot 5^5 \cdot 17.$$

Saaksime

$$3^{21} > 2^{16} \cdot 5^5 \cdot 17 \cdot 3 = 2^{10} \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 3 = 2^{10} \cdot 10^5 \cdot 102 > 2^{10} \cdot 10^7.$$

Märkus 2. Kuna $e > 2{,}7$ ja 1-st suurema arvu logaritmi aluse suurendamisel logaritmi väärtus väheneb, saab antud ülesandest järeldada, et $\ln 2 < 0{,}7$. Hindamine vastupidises suunas pole korrektne, st teadmist, et $\ln 2 < 0{,}7$, ei saa kasutada antud ülesande lahendamiseks.

3. *(Kaur Aare Saar)*

a) Tõesta, et iga naturaalarvu n korral jagub arv $n^{4040} + n^{4038} + \ldots + n^2 + 1$ arvuga $n^{2020} + n^{2019} + \ldots + n + 1$.

b) Kas väide jääb kehtima, kui esimesse avaldisse lisada liidetav n^{4042} ja teise avaldisse liidetav n^{2021}?

Vastus: b) ei.

Lahendus. Paneme tähele, et $1, n^2, \ldots, n^{4038}, n^{4040}, \ldots$ on geomeetriline jada teguriga n^2 ning $1, n, \ldots, n^{2019}, n^{2020}, \ldots$ on geomeetriline jada teguriga n. Geomeetrilise jada summa valemist $n^{2k} + n^{2k-2} + \ldots + n^2 + 1 = \frac{n^{2k+2} - 1}{n^2 - 1}$

ja $n^k + n^{k-1} + \ldots + n + 1 = \dfrac{n^{k+1}-1}{n-1}$, mistõttu iga $n \neq 1$ ja k korral

$$\frac{n^{2k} + n^{2k-2} + \ldots + n^2 + 1}{n^k + n^{k-1} + \ldots + n + 1} = \frac{\left(n^{2k+2}-1\right)(n-1)}{\left(n^2-1\right)\left(n^{k+1}-1\right)} =$$
$$= \frac{\left(n^{k+1}-1\right)\left(n^{k+1}+1\right)(n-1)}{(n-1)(n+1)\left(n^{k+1}-1\right)} = \frac{n^{k+1}+1}{n+1}.$$

a) Eespool tehtu põhjal $\dfrac{n^{4040} + n^{4038} + \ldots + n^2 + 1}{n^{2020} + n^{2019} + \ldots + n + 1} = \dfrac{n^{2021}+1}{n+1}$. Märkame, et vahelduvate märkidega jada $1, -n, \ldots, -n^{2019}, n^{2020}, \ldots$ on geomeetriline teguriga $-n$ ning geomeetrilise jada summa valemi põhjal $n^{2020} - n^{2019} + \ldots - n + 1 = \dfrac{n^{2021}+1}{n+1}$. Järelikult $\dfrac{n^{2021}+1}{n+1}$ on täisarv. Seega juhul $n \neq 1$ arv $n^{4040} + n^{4038} + \ldots + n^2 + 1$ tõepoolest jagub arvuga $n^{2020} + n^{2019} + \ldots + n + 1$. Kui aga $n = 1$, siis leiame $n^{4040} + n^{4038} + \ldots + n^2 + 1 = n^{2020} + n^{2019} + \ldots + n + 1 = 2021$, mistõttu nõutud jaguvus kehtib samuti.

b) Alguses tehtu põhjal $\dfrac{n^{4042} + n^{4040} + n^{4038} + \ldots + n^2 + 1}{n^{2021} + n^{2020} + n^{2019} + \ldots + n + 1} = \dfrac{n^{2022}+1}{n+1}$. Märkame, et arv $2^{2022} + 1$ ehk $\left(2^{1011}\right)^2 + 1$ annab 3-ga jagades jäägi 2, sest 3-ga mitte jaguva arvu ruut annab 3-ga jagades jäägi 1. Seega juhul $n = 2$ ei jagu murru $\dfrac{n^{2022}+1}{n+1}$ lugeja 3-ga, nimetaja aga jagub 3-ga, mistõttu jagatis ei ole täisarv.

4. *(Oleg Košik)*

Milliste 1-st suuremate täisarvude n korral leidub positiivsete täisarvude komplekt $(a_1, \ldots, a_n)$, kus vähemalt kaks arvu on erinevad ja iga kahe arvu geomeetriline keskmine on selle komplekti mingite arvude (neid arve võib olla rohkem kui kaks) aritmeetiline keskmine?

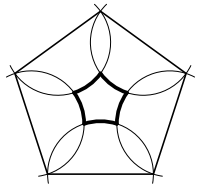
Vastus: kõigi naturaalarvude $n \geqslant 3$ korral.

Lahendus 1. Kui $n = 2$, siis eelduse põhjal $a_1 \neq a_2$. Sel juhul arvude a_1 ja a_2 geomeetriline keskmine on suuruselt nende arvude vahel, kuid nende arvude aritmeetilisest keskmisest alati väiksem. Seega ei saa geomeetriline keskmine võrduda mingite selle komplekti arvude aritmeetilise keskmisega. Juhul $n \geqslant 3$ valime $a_1 = 4$ ja $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 1$. Kui nüüd $2 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, siis on arvude a_i ja a_j aritmeetiline ja geomeetriline keskmine võrdsed. Kui aga $i = 1$ ja $2 \leqslant j \leqslant n$, siis on arvude a_i ja a_j geomeetriline keskmine $\sqrt{4 \cdot 1}$ ehk 2, samas kui arvude a_1, a_2, a_3 aritmeetiline keskmine on $\dfrac{4+1+1}{3}$ ehk samuti 2.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 näitame, et $n = 2$ korral sellist komplekti ei leidu. Kui $n = 3$, siis võtame $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = n - 1$ ja $a_n = (n-1)^3$. Kui $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n - 1$, siis a_i ja a_j aritmeetiline ja geomeetriline keskmine on mõlemad $n-1$. Kui aga $1 \leqslant i \leqslant n-1$ ja $j = n$, siis a_i ja a_j geomeetriline keskmine on $\sqrt{(n-1)(n-1)^3}$ ehk $(n-1)^2$, arvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmeetiline keskmine on aga $\dfrac{(n-1)^2 + (n-1)^3}{n}$ ehk samuti $(n-1)^2$.

5. *(Kaur Aare Saar)*

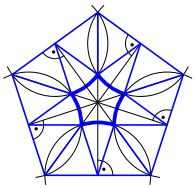
Korrapärase viisnurga küljed on diameetriteks ringjoontele raadiusega 1 cm. Tõesta, et viisnurga keskele jääva viie ringjoone kaarega (joonisel jämeda joonega) piiratud kujundi pindala on $\left(5\tan 54^\circ - 5\sin 72^\circ - \dfrac{\pi}{2}\right)$ cm^2.



Lahendus. Tähistagu Υ meie korrapärast viisnurka ja olgu K viisnurga keskele jääv viie ringjoone kaarega piiratud kujund. Olgu Σ kujundi K ühe kaare poolt vastavas ringjoones määratud sektor; olgu Δ kolmnurk, mille tippudeks on viisnurga külje keskpunkt ning selle külje otspunkte läbiva ringjoone lõikepunktid naaberkülje otspunkte läbiva ringjoonega. Siis

$$S_{\mathrm{K}} = S_\Upsilon - 10S_\Delta - 5S_\Sigma,$$

kus $S_{\mathscr{F}}$ tähistab kujundi $\mathscr{F}$ pindala (joonis 25).



Joonis 25

Olgu kujundi ringjoonte raadius r. Võrdhaarse kolmnurga Δ alus asub viisnurga Υ sisenurga poolitajal; et korrapärase viisnurga sisenurga suurus on 108°, on kolmnurga Δ alusnurga suurus 54° ja tipunurga suurus järelikult 72°. Sektori Σ nurga suurus on seega 36°. Saame

$$S_\Upsilon = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r\tan 54^\circ = 5\tan 54^\circ \cdot r^2,$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sin 72^\circ \cdot r^2,$$

$$S_\Sigma = \frac{36^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi}{10} \cdot r^2.$$

Seega $S_K = \left(5\tan 54^\circ - 5\sin 72^\circ - \frac{\pi}{2}\right) r^2 = \left(5\tan 54^\circ - 5\sin 72^\circ - \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{cm}^2$.

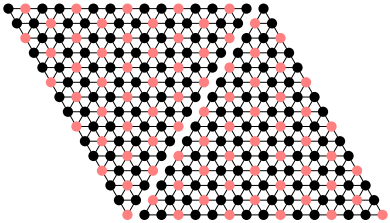
6. *(Kaarel Hänni)*

Võrdkülgse kolmnurga kujuline mängulaud küljepikkusega 2021 on jaotatud võrdkülgse kolmnurga kujulisteks väljadeks küljepikkusega 1. Algul asub mängunupp ühes suure võrdkülgse kolmnurga tipus. Kui nupp asub kahe ühise küljega välja poolt moodustatud rombi teravnurkses tipus, siis võib nupu käia selle rombi vastastippu. Teistsugused käigud pole lubatud. Mitmesse erinevasse punkti on võimalik nuppu viia?

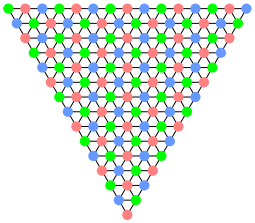
Vastus: 681751.

Lahendus 1. Tähistame nupu algustipu O ja olgu võrdkülgse kolmnurga kujuline mängulaud küljepikkusega $3k - 1$ (ülesandes $k = 674$) paigutatud tipuga O allapoole. Väikeste kolmnurkade tipud paiknevad kolmnurkase tabelina, mille esimeses reas on $3k$ tippu, teises $3k - 1$, kolmandas $3k - 2$ jne kuni viimases 1 tipp. Paigutame kõrvale teise niisama suure mängulaua tipuga ülespoole; koos algse mängulauaga paiknevad väikeste kolmnurkade tipud rööpkülikuna, mille ühe (horisontaalse) külje sihis asuvad nad sirgetel liinidel $(3k + 1)$-kaupa ja teise külje sihis $3k$-kaupa. Värvime punaseks kõik tipud igal kolmandal tippude liinil, mis kulgeb paralleelselt tipu O kaht rööpkülikukujulise mängulaua serval paiknevat naabertippu läbiva sirgega, alustades liinist, millel asub vaid tipp O (joonis 26 kujutab olukorda $k = 5$ jaoks). Kahest ühise küljega kolmnurgast moodustuva rombi asendite lihtne läbivaatus näitab, et nupp, asudes värvitud tipus, saab käia ainult värvitud tippudesse. Samuti on lihtne näha, et kõik värvitud tipud on kättesaadavad, sh algse mängulaua värvitud tipud on kättesaadavad ilma lisaala tippe külastamata. Igal rööpküliku lühema külje sihis kulgeval tippude liinil on iga kolmas tipp ehk kokku k tippu värvitud; et selliseid liine on kokku $3k + 1$, on kogu rööpkülikukujulisel mängulaual $k \cdot (3k + 1)$ värvitud tippu. Alumise rea parempoolseim tipp lisatud võrdkülgse kolmnurga kujulisel alal on värvitud, sest asub tipust O täpselt $3k$ diagonaalliini kaugusel; seega sümmeetria põhjal on nii algsel kui ka lisatud võrdkülgse kolmnurga kujulisel alal ühepalju ehk $\frac{k \cdot (3k + 1)}{2}$ värvitud tippu. Juhul $k = 674$ saame värvitud tippude arvuks 681751.

Lahendus 2. Olgu võrdkülgse kolmnurga kujuline mängulaud küljepikkusega $3k - 1$ paigutatud tipuga allapoole. Väikeste kolmnurkade tipud paiknevad kolmnurkse tabelina, mille esimeses reas on $3k$ tippu, teises $3k - 1$, kolmandas $3k - 2$ jne kuni viimases 1 tipp. Värvime väikeste kolmnurkade tipud kolme värviga nii, et esimeses reas vahelduvad esimene, teine ja kolmas värv samas järjestuses ning iga järgmise rea iga tipu värv on see, mida kahe tema kohal oleva naabertipu värvide seas ei esine (joonis 27 kujutab olukorda $k = 5$ jaoks). Siis on mängulaua iga välja kolm tippu värvitud



Joonis 26



Joonis 27

erinevate värvidega ning igal mängulaua mõne servaga paralleelsel punktide liinil on iga kolm järjestikust punkti samuti eri värvi. Ilmselt saab ülesandes kirjeldatud käiguga liigutada nuppu ainult üht ja sama värvi tippude vahel, suvalisest tipust nupuga alustades on aga kõik sama värvi tipud kättesaadavad. Esimese rea äärmised tipud on värvitud esimese ja kolmanda värviga (sest nad on teineteisest kaugusel $3k-1$) ning mängulaua kolmas tipp on värvitud teise värviga (sest värvid piki ridade viimaseid tippe vahelduvad samas järjestuses). Sümmeetria tõttu on igat värvi tippe ühepalju ehk $\frac{1+2+\ldots+3k}{3}$, aritmeetilise jada summa valemi põhjal on see arv $\frac{3k(3k+1)}{6}$. Juhul $3k=2022$ saame üht värvi tippude arvuks 681751.

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning on näidatud iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

   Mõnes skeemis on mõne etapi kirjelduse all („*Sealhulgas:*“ järel) alapunktidena välja toodud konkreetse etapi väiksemate osade eest antavad punktid – need lähevad käiku juhul, kui lahenduse see etapp on ebatäielik või vigane ja selle osa täispunkte seetõttu ei saa anda. Alamosade punktid tuleb omavahel samuti liita.

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud

vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala …?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Teistes ühikutes väljendatud sama suurus tuleb lugeda õigeks, näiteks vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ on samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu …?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Teistes ühikutes antud vastus tuleb aga lugeda valeks, vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole siin samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa hindamisjuhised

1.	∘ Antud õige vastus 0:	2 p
2.	∘ Antud õige vastus 1:	2 p
3.	∘ Antud õige vastus 114 (või 114 km):	2 p
4.	∘ Antud õige vastus 13248:	2 p
5.	∘ Antud õige vastus 4:	2 p
6.	∘ Antud õige vastus 404:	2 p
7.	∘ Antud õige vastus 67,5°:	2 p
	∘ Antud vastuseks 67,5 ilma kraadimärgita:	1 p
8.	∘ Antud õige vastus 16,5 cm:	2 p
	∘ Antud vastuseks 16,5 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
9.	∘ Antud õige vastus 2 cm^2:	2 p
	∘ Antud vastuseks 2 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
10.	∘ Loetletud õiged arvud 2 ja 4 ükskõik kummas järjestuses ning ei ühtki valet arvu:	2 p

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa hindamisjuhised

1. ∘ Antud õige vastus 0: 2 p

2. ∘ Antud õige vastus $\frac{7}{18}$: 2 p

3. ∘ Antud õige vastus -4: 2 p

4. ∘ Antud õige vastus 19: 2 p

5. ∘ Antud õige vastus 11 €: 2 p
∘ Antud vastuseks 11 ilma ühikuta: 1 p

6. ∘ Antud õige vastus $\frac{1}{3}$: 2 p
∘ Antud õige vastus taandamata kujul (nt $\frac{3}{9}$): 1 p

7. ∘ Antud õige vastus 10,5 cm: 2 p
∘ Antud vastuseks 10,5 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8. ∘ Antud õige vastus 3,5 cm^2: 2 p
∘ Antud vastuseks 3,5 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

9. ∘ Antud õige vastus $\frac{5}{24}\pi$ cm^2: 2 p
∘ Antud vastuseks $\frac{5}{24}\pi$ ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
∘ Antud vastuseks $\frac{75}{360}\pi$ vm taandamata kuju ühikuga või ilma: 1 p
∘ Antud vastuseks 0,654 või täpsem lähend ühikuga või ilma: 1 p

10. ∘ Antud õige vastus 9: 2 p

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa hindamisjuhised

1. ∘ Antud õige vastus 3: 2 p

2. ∘ Antud õige vastus 2021: 2 p

3. ∘ Antud õige vastus 24: 2 p

4. ∘ Antud õige vastus 5213: 2 p

5. ∘ Antud õige vastus 28 €: 2 p
∘ Antud vastuseks 28 ilma ühikuta: 1 p

6. ∘ Antud õige vastus 51°: 2 p
∘ Antud vastuseks 51 ilma kraadimärgita: 1 p

7. ∘ Loetletud avaldised $\frac{a}{c}$, $a+c$, ab, $b-a$ selles järjestuses: 2 p
∘ Loetletud kolm avaldist õiges järjestuses, neljas vales kohas või puudu: 1 p

8. ∘ Antud õige vastus 105°: 2 p
∘ Antud vastuseks 105 ilma kraadimärgita: 1 p

9. ∘ Antud õige vastus 11 cm^2: 2 p
∘ Antud vastuseks 11 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

10. ∘ Antud õige vastus 12: 2 p

II osa hindamisjuhised

1. Anname kaks hindamisskeemi kahe erineva lähenemise puhuks.

Skeem lahendusele, mis lähtub 13*-ga jaguvusest (žürii lahendus 1).*

- Põhjendatud, et tervituste arv on ülimalt 333: 1 p
- Põhjendatud, et tervituste arv on vähemalt 300: 1 p
- Leitud 13-ga jaguvad arvud 300 ja 333 vahel: 2 p
- Kontrollitud, et 312 : 13 pole täisarvu ruut: 2 p
- Antud õige vastus: 1 p

Skeem lahendusele, mis lähtub täisruutudest (žürii lahendus 2).

- Leitud positiivsete täisarvude ruutude 13-kordsed vähemalt arvuni $13 \cdot 6^2$: 2 p
- Põhjendatud, et $13 \cdot 3^2$ ja $13 \cdot 4^2$ ei sobi: 1 p
- Põhjendatud, et $13 \cdot 6^2$ ei sobi: 1 p
- Põhjendatud, et suuremad variandid ei sobi: 2 p
- Antud õige vastus: 1 p

Ainult õige vastuse (325) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

2.
- Märgitud, et $\angle ABC = 38{,}5^\circ$: 1 p
- Põhjendatud, et $\angle ADC = 70{,}75^\circ$ (või et $\angle ACD = 70{,}75^\circ$): 1 p
- Põhjendatud, et $\angle BRQ = 70{,}75^\circ$ (või et $\angle BQR = 70{,}75^\circ$): 1 p
- Järeldatud, et $\angle DPR = 38{,}5^\circ$: 1 p
- Põhjendatud, et $\angle QRS = 19{,}25^\circ$: 1 p
- Leitud ka $\angle PTR = 122{,}25$: 1 p
- Antud täielik õige vastus: 1 p

Skeemi kõigi ridade eest peale viimase anda punkt ka siis, kui vastava nurga suurus on esitatud väljaarvutamata avaldisena, mille väärtus on õige.

Ainult täieliku õige vastuse ($38{,}5^\circ$, $19{,}25^\circ$, $122{,}25^\circ$ suvalises järjestuses) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult kahe õige nurga eest anda 1 punkt, ainult ühe õige nurga eest 0 punkti. Täieliku õige vastuse eest, kus kraadimärgid puuduvad, anda 1 punkt.

3.
- Lahendatud osa a): 3 p

  Sealhulgas:

- Arvutatud nelja noolega märgitud rea ja veeru arvude summade summa $101 + b$: *1 p*
- Põhjendatud, et sobib ainult $b = 11$: *1 p*
- Järeldatud, et $a = 10$: *1 p*

Lahendatud osa b): 4 p

Sealhulgas:

- Põhjendatud, et arvu 7 naaber peab olema vähemalt 5 ja arvu 4 naaber ei saa olla 5 ega 6: *1 p*
- Põhjendatud, et 5 ja 6 peavad olema vasakult teise veeru ruutudes: *1 p*
- Läbivaatusega välistatud kõik variandid peale õige: *2 p*

Ainult täieliku õige vastuse (õiged arvud kõigis tühjades ruutudes) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult a-osas või ainult b-osas küsitud ruutude õige täitmise korral anda 1 punkt.

II osa hindamisjuhised

1.

- Lahendatud osa a): 5 p

  Sealhulgas:
  - Koostatud õige lineaarvõrrand, millest saab leida küpsiste arvu, mille Pille (või Sille) pidi tegema: *2 p*
  - Võrrand õigesti lahendatud: *2 p*
  - Arvutatud tegelik Pille tehtud küpsiste arv: *1 p*
- Lahendatud osa b): 2 p

  Sealhulgas:
  - Välja arvutatud, et Pille ja Sille oleksid kokku teinud 253 küpsist: *2 p*

Kui osas a) on võrrand koostatud küpsiste arvu suhtes, mille Pille tegelikult valmistas, siis anda võrrandi koostamise eest 1 punkt rohkem.

Ainult mõlema osa täieliku õige vastuse (168, ei) või a-osa õige vastuse (168) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult b-osa õige vastuse eest anda 0 punkti.

2.

- Lahendatud osa a): 4 p

  Sealhulgas:
  - Koostatud õige lineaarvõrrand kas algse paberilehe või väljalõigatud ristküliku ühe küljepikkuse suhtes: *1 p*
  - Võrrand õigesti lahendatud: *1 p*
  - Leitud algse paberilehe mõõtmed: *2 p*
- Lahendatud osa b): 3 p

  Sealhulgas:
  - Leitud ühe väljalõigatud ristküliku pindala: *1 p*
  - Arvutatud allesjäänud kujundi pindala: *2 p*

Kui osas a) on koostatud lineaarvõrrandite süsteem väljalõigatud ristküliku-te pikkuste suhtes, siis anda süsteemi koostamise eest 2 punkti, lahendamise eest 1 punkt ning algse paberilehe mõõtmete leidmise eest 1 punkt.

Ainult mõlema osa täieliku õige vastuse (40 cm × 33 cm, väiksem) või ainult a-osa õige vastuse (40 cm × 33 cm) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult b-osa õige vastuse eest anda 0 punkti.

3. ◦ Lahendatud osa a): 4 p

Sealhulgas:

- Näidatud, kuidas Ben võib viimase arvuna tahvlile saada 840: *2 p*
- Põhjendatud, miks ei ole võimalik saada suuremat arvu: *2 p*

◦ Lahendatud osa b): 3 p

Sealhulgas:

- Näidatud, kuidas Ben võib viimase arvuna tahvlile saada 1: *2 p*
- Põhjendatud, miks ei ole võimalik saada väiksemat arvu: *1 p*

Ainult mõlema osa õige vastuse (840, 1) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, ainult ühe osa õige vastuse eest anda 1 punkt.

II osa hindamisjuhised

1. ∘ Toodud näide sobivatest algarvudest p ja q ning arvutatud õigesti välja p^2 ja q^3: 7 p

Sealhulgas:

- Arvutatud kas p või q kohale sobiva algarvu jaoks vastavalt ruut või kuup: *3 p*

Arvude p^2 ja q^3 väljaarvutamine arvestada tehtuks ka siis, kui töös ei ole näidatud arvutuskäiku (kirjalikku korrutamist vms).

Kui töös on ära toodud ainult sobivad p ja q, kuid arvu p^2 ega arvu q^3 pole leitud, siis anda 2 punkti.

Ainult õige vastuse (jah) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2. ∘ Ammendavalt põhjendatud, et $z > x$: 2 p

∘ Ammendavalt põhjendatud, et $y > x$: 4 p

Sealhulgas:

- Teisendatud võrdus kujule, kust võrratus $y > x$ on hõlpsamini läbi nähtav, nt $xy(x+y) = (y^2 - x^2)z$ või $xy = (y-x)z$: *2 p*

∘ Järeldatud, et x on vähima väärtusega: 1 p

Ainult õige vastuse (x) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3. ∘ Avaldatud kolmnurga CBD nurkade suurused mingi ühe ja sama nurga kaudu: 1 p

∘ Avaldatud kolmnurga ABD nurkade suurused sellesama nurga kaudu: 1 p

∘ Kasutades eelnevat, lahendatud osa a): 3 p

Sealhulgas:

- Tehtud kindlaks, et kui kolmnurk CBD on võrdhaarne, siis $\angle CDB = \angle DCB$: *2 p*
- Arvutustega näidatud, et kolmnurgas ABD on kaks nurka võrdse suurusega: *1 p*

∘ Kasutades eelnevat, lahendatud osa b): 2 p

Skeemi viimase rea järgi anda 1 punkt, kui on leitud baasnurga (st nurga, mille kaudu teised avaldati) suurus juhu jaoks, kui $\angle ADB = \angle DAB$, kuid pole selgitatud, miks sel juhul kolmnurk CDB ei ole võrdhaarne.

Ainult mõlema osa õige vastuse (jah, ei) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4.

- Märgitud, et võidab mängija, kes käib idapoolseimale ruudule: 1 p
- Esitatud idee vaadelda mängu ühe 3×3 ala raames või seda ideed kasutatud: 1 p
- Väidetud, et kui nupu asetsedes 3×3 ala läänepoolseimal ruudul on käigul Anu, siis Sipsik saab mängida nii, et tema käiguga jõuab nupp sama 3×3 ala idapoolseimale ruudule: 1 p
- See väide põhjendatud (veenva arutluse või juhtude ammendava läbivaatusega): 2 p

  Sealhulgas:

  - Kirjeldatud sõnadega Sipsiku õige mängustrateegia eesmärgile jõudmiseks ilma põhjenduseta: *1 p*
- Märgitud, et Sipsik saab oma strateegiat igal 3×3 alal korrata: 1 p
- Eelnevast järeldatud, et Sipsik saab võita kogu mängu: 1 p

Ainult õige vastuse (jah, Sipsikul) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Toomas Roosma)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Osa a) lahendus: 3 p
- Osa b) lahendus: 4 p

Kummagi osa lahenduseks piisas sobiva näite esitamisest, kui tegu oli lihtsa hulknurgaga, mille vastavus ülesande tingimustega on ilmne (nagu žürii lahenduste näidetes). Keerulisemate hulknurkade puhul nõuti ka põhjendamist (nt arvutustega), et ülesande tingimused on tõesti täidetud. Juhul, kui lisaks õigele näitele toodi ka mõni vale, võeti selle osa eest üks punkt maha.

Kui sobiv hulknurk oli esitatud ainult joonisel, mitte tippude koordinaatide loeteluna, siis arvestati seda niivõrd, kuivõrd tippude koordinaadid olid jooniselt üheselt välja loetavad.

Kui a-osas oli näite toomise asemel väidetud vaid „Sobib ruut“ ja b-osas „Sobib romb“ või oli neile väidetele lisatud vaid üldsõnaline jutt, kust ei selgunud, kuidas ülesande tingimused täita, siis anti kummagi osa eest 2 punkti.

Ainult mõlema osa õige vastuse (jah, jah) eest ilma selgitusteta anti 0 punkti.

2. *(Ehtel Timak)*

Ruutvõrrandiga lahenduse (žürii lahendus 1) allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Viidud seos kujule $a^2 - ac - (b^2 + bc) = 0$ või sellega ilmselgelt samaväärsele kujule, kus kõik liikmed on võrduse ühel pool: 3 p
- Rakendatud saadud seosel ruutvõrrandi (või taandatud ruutvõrrandi) lahendivalemit: 1 p
- Leitud sellele ruutvõrrandile kaks lahendit ja lihtsustatud: 2 p
- Põhjendatud, et $a = -b$ ei sobi: 1 p

Tegurdamisega lahenduse (žürii lahendus 2) allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Viidud seos kujule $(c + b - a)(a + b) = 0$: 5 p
- Järeldatud, et $a = b + c$ või $a = -b$: 1 p
- Põhjendatud, et $a = -b$ ei sobi: 1 p

Mõlema lahenduse puhul võis algne võrduse teisendamine käia väga erinevaid radu pidi, mistõttu skeemides pole seda osa detailselt lahti kirjutatud. Näiteks võidi tegurdamisega lahenduses viia võrdus alguses ruutvõrrandi kujule, seejärel aga liikmed rühmitada ja tegurdada. Sel juhul anti ruutvõrrandi kuju eest 3 punkti vastavalt esimesele skeemile (kui tegurdamisel oli vigu, mis ei võimaldanud teise skeemi alusel 5 punkti anda).

Ainult õige vastuse ($a = b + c$) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

3. *(Nikita Leo)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Antud vastuseks 6 ning on selge, et see on saadud tegurite loendamisest juhu $p = 2$ jaoks: 1 p
- Näidatud, et $p > 2$ korral jagub arv $p^2 + 239$ neljaga: 3 p

  Sealhulgas tüüpiliste osaliste mõttekäikude eest:
  - Arvu $p^2 + 239$ jaguvus 4-ga mainitud: *1 p*
  - Arvu $p^2 + 239$ jaguvus 4-ga tõestatud puudulikult: *2 p*
  - Arvu $p^2 + 239$ jaguvust 4-ga pole mainitud, kuid tõestatud jaguvus 2-ga, kusjuures on mainitud, et see kehtib vaid juhul $p > 2$: *1 p*
- Näidatud, et 4-ga jaguvusest järeldub, et tegureid on vähemalt 6: 3 p

  Sealhulgas tüüpiliste osaliste mõttekäikude eest:
  - Järeldus tegurite arvu kohta mainitud, kuid tõestamata: *1 p*
  - Võimalikud tegurid välja kirjutatud, kuid põhjendamata, et need on erinevad: *2 p*

Kui õige vastuseni jõuti juhuslikult, siis skeemi esimese rea järgi punkti ei antud. Kui vastust polnud selgelt välja toodud, kuid $p = 2$ korral olid tegurid õigesti loendatud, siis anti skeemi esimese rea järgi 1 punkt.

Üksikud poolikud lahendused, mida polnud võimalik hinnata ülaltoodud skeemist lähtudes, võidi hinnata teiste kriteeriumide järgi.

Paljud õpilased ei tunne algarvu mõistet. Algarv on ühest erinev positiivne täisarv, mis jagub vaid ühe ja iseendaga (ühte ei loeta algarvuks). Paljud võistlejad lugesid ühte algarvuks. Mitmed õpilased ei lugenud algarvuks kahte.

Suur osa õpilastest luges tegureid valesti. Selle asemel, et lugeda arvu positiivsete tegurite arvu, loeti tegurite arvu tema algteguriteks lahutuses (näiteks $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ tõttu arvati, et arvul 12 on kolm tegurit, tegelikult on kuus tegurit 1, 2, 3, 4, 6 ja 12).

4. *(Urve Kangro)*

Erinevate lahenduste jaoks kasutati kaht eri skeemi; kummagi skeemi puhul selles märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Žürii lahendusele 1 vastav skeem.

- Kokku liidetud esimesed kolm võrrandit ja lihtsustatud: 2 p
- Rühmitatud tulemus ruutude summaks: 3 p
- Järeldatud, et $x = y = z$: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

Žürii lahendusele 2 vastav skeem.

- Kokku liidetud mingid kaks võrrandit esimesest kolmest: 2 p
- Ühe muutujaga läbi jagatud: 1 p
- Asendatud ühte võrrandisse: 1 p
- Järeldatud, et kaks muutujat on omavahel võrdsed: 1 p
- Järeldatud, et kõik muutujad on võrdsed: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

Enamuses töödest oli lahend ära arvatud, kuid polnud näidatud, et rohkem lahendeid ei leidu. Kui neis lahendustes ühelegi skeemi reale vastavaid teisendusi polnud tehtud, siis sellised lahendused said reeglina 1 punkti.

Mitmetes töödes oli läbi jagatud muutujaid sisaldavate suurustega ilma kontrollimata, ega need suurused juhuslikult nullid ei või olla. Näiteks suurusega $x - y$ läbi jagamisel võib niimoodi lahendi kaotada. Kui sellest hoolimata oli kuidagi lõpuni jõutud, siis sellise vea eest kaotati üks punkt. Esines ka lahendusi, kus näiteks esimesest võrrandist avaldati $z = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$, võtmata arvesse, et z võib ka negatiivne olla. Kuna sellest veast eriti midagi ei sõltunud, sest hiljem võeti see ruutjuur jälle ruutu, siis ka sellise vea eest kaotati üks punkt. Sarnaselt võeti punkt maha näiteks vea eest, kus võrrandist $x^6 = 1$ järeldati, et $x = 1$.

Mitmetes töödes oli püütud lahendada antud võrrandisüsteemi nagu lineaarset võrrandisüsteemi, kasutades Crameri reeglit. Sellist võrrandisüsteemi ei saa Crameri reegli abil lahendada. Põhimõtteliselt võib küll Crameri reegli abil (vaadeldes osasid muutujaid kui muutujaid ja teisi kui võrrandisüsteemi kordajaid) antud võrranditest uusi võrrandeid tuletada, kuid see on mõttetult keeruline ja midagi põhimõtteliselt uut niimoodi ei saa. Enamasti olid ka determinandid vigaselt arvutatud. Sel juhul sellise lahenduse eest punkte ei saanud.

Esines ka vigaseid lihtsustusi, näiteks $\sqrt{x^2 + y^2 - xy} = x+y-\sqrt{xy}$ või vigast murdude liitmist.

Tundus, et osad õpilased olid arvanud, et küsitakse täisarvulisi lahendeid, või arvati, et reaalarvud ongi ainult täisarvud. Sellised tööd said reeglina õige lahendi äraarvamise eest 1 punkti. Samuti oli töid, kus põhjendati lahendi ühesust stiilis „kui üks muutujatest on suurem, siis peab mingi teine muutuja olema murdarv, ja siis on mõnes võrrandis ühel pool murdarv ja teisel pool täisarv“. See ei ole korrektne põhjendus: kõik muutujad võivad põhimõtteliselt olla murdarvud või ka irratsionaalarvud.

5. *(Karl Paul Parmakson)*

Erinevate lahenduste jaoks kasutati kolme eri skeemi; iga skeemi puhul selles märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem võrdhaarse kolmnurga omadusi kasutava lahenduse jaoks (žürii lahendus 1).

- Väidetud või eeldatud, et lõigud BE ja CF on kolmnurga ABC mediaanid: 1 p
- Väidetud või eeldatud, et mediaanide lõikepunkt jagab mediaanid osadeks pikkuste suhtega $2:1$: 1 p
- Tõestatud, et $|BM| = |CM|$: 1 p
- Tõestatud või väidetud, et mediaanil AD asuv lõik MD on kolmnurga BMC mediaan: 1 p
- Tõestatud, et MD ja BC on risti: 2 p
- Tõestatud, et kolmnurk ABC on võrdhaarne: 1 p

Skeem kolmnurkade sarnasust kasutava lahenduse jaoks (žürii lahendus 3).

- Väidetud või eeldatud, et lõigud BE ja CF on kolmnurga ABC mediaanid: 1 p
- Väidetud või eeldatud, et mediaanide lõikepunkt jagab mediaanid osadeks pikkuste suhtega $2:1$: 1 p
- Tõestatud, et $|BM| = |CM|$: 1 p
- Tõestatud KNK tunnusega kas kolmnurkade EMC ja FMB või kolmnurkade EBC ja FCB võrdsus: 2 p
- Näidatud, et $|CE| = |FB|$: 1 p
- Tõestatud, et kolmnurk ABC on võrdhaarne: 1 p

Skeem trapetsit $BCEF$ kasutava lahenduse jaoks (žürii lahendus 4).

- Väidetud, et EF on kolmnurga ABC kesklõik: 1 p
- Tõestatud, et $BCEF$ on võrdhaarne trapets: 5 p
- Tõestatud, et kolmnurk ABC on võrdhaarne: 1 p

Ainult õige vastuse (jah) eest ilma selgitusteta anti 0 punkti.

Ülesannet lahendati võrdlemisi hästi. Enamik õpilasi jõudsid järeldusele, et kolmnurk ABC peab olema võrdhaarne, kuid tõestused olid tihti puudulikud. Paljud õpilased vahetasid punktide E ja F asukohad, mis muutis ülesande triviaalseks ning andis ka õige vastuse, aga sellise lahenduse eest punkte ei antud. Lisaks arvasid mitmed õpilased vääralt, et võrdkülgne kolmnurk ei ole võrdhaarne. Samuti peeti vääralt mediaane BE ja CF kolmnurga kõrgusteks, keskristsirgeteks või nurgapoolitajateks. Lahendustes ei antud punkte põhjendamata väite eest, et võrdsete pikkustega diagonaalidega trapets on võrdhaarne (seda saab tõestada sarnaselt žürii lahenduse 4 keskmises lõigus läbi viidud mõttekäiguga, tuleb ainult arvestada, et aluste suhe pole tingimata 2, vaid võib olla suvaline positiivne reaalarv k).

6. *(Toomas Tennisberg)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Märgitud õige vastus $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$: 1 p
- Pakutud konstruktsioon, kus keskele tõmmatakse võimalikult võrdkülgne kolmnurk: 2 p
- Veenvalt põhjendatud, et väiksema vastusega konstruktsiooni ei leidu: 4 p

Ülesanne osutus üllatavalt keeruliseks. Enamik lahendajaid ei saanud aru, et vastust tahetakse arvuna, mis sõltub n-ist, ning leidsid, et vastus on 2, sest ruudu puhul on vastus 2 ning külgede arvu suurendamisel suureneb ka vastus. See on küll tehniliselt õige väide ning kui ülesanne oleks seda nõudnud, oleksid need lahendused 7 punkti väärilised. Kahjuks aga ei olnud see, mida ülesandes taheti. Üks lihtne rusikareegel, mis tavaliselt (ka antud ülesandes) töötab, on see, et kui ülesandes on defineeritud mingi muutuja (antud juhul n) ning pole selgelt välja öeldud, et lahendaja võib seda vabalt muuta (nt küsimusega „Leia vähim võimalik n...“), siis on see muutuja nn parameeter ning vastust tahetakse sellest sõltuvana.

Nendest, kes esimest arusaamatust suutsid vältida, sattus enamik aga teise lõksu, mis ülesandes tekkis. Nimelt eeldati, et pikim märgitud diagonaal on sama, mis pikim diagonaal, mida on võimalik märkida, ning saadi vastuseks $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Mõni üritas seda väidet ka põhjendada, näiteks öeldes, et maksimaalne diagonaalide arv $n-3$ on saavutatav parajasti siis, kui kõik diagonaalid on ühest kohast tõmmatud. (Tegelikkuses on maksimaalne diagonaalide arv alati $n-3$ hoolimata nende tõmbamise strateegiast. Tõestus jääb ülesandena lugejale, kuid soovitan sisenurkade summat uurida.)

Need, kes suutsid neist kahest veast mööda pääseda, suutsid üldiselt õige vastuse ja konstruktsiooni kätte saada, kuid ammendavalt põhjendamine, et kuidagi väiksemat vastust saavutada ei ole võimalik, osutus nii mõnelegi valukohaks.

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **11. klass**

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Ülle Hüva)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Avaldatud kõigi loomade arvud koerte arvu kaudu: 3 p
- Avaldatud loomade koguarv koerte arvu kaudu: 1 p
- Vaadatud läbi variant, kus koeri ja kasse on kokku niisama palju kui küülikuid ja hamstreid, ja saadud vastuolu: 1 p
- Vaadatud läbi variant, kus koeri ja küülikuid on kokku niisama palju kui kasse ja hamstreid, ja saadud loomade koguarvuks 130: 1 p
- Vaadatud läbi variant, kus koeri ja hamstreid on kokku niisama palju kui kasse ja küülikuid, ja saadud loomade koguarvuks 90: 1 p

Kui kõigi loomade arvud olid avaldatud mitte koerte, vaid mõne teise loomaliigi esindajate arvu kaudu, siis rakendati analoogilist hindamisskeemi.

Ainult täieliku õige vastuse (90 ja 130 mistahes järjestuses) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt. Ainult osalise õige vastuse eest (mõni õige variant puudu või vale variant juures) anti 0 punkti.

2. *(Kerli Orav-Puurand)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Õigesti loendatud koodid, mis pole Märdi jaoks õnnelikud: 2 p
- Õigesti loendatud koodid, mis pole Kärdi jaoks õnnelikud: 2 p
- Õigesti võrreldud saadud arvud või leitud nii Märdi kui ka Kärdi jaoks tema õnnelike koodide arv ja need arvud lihtsustatud: 2 p
- Eelneva põhjal tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Ainult õige vastuse (Kärdi jaoks) eest ilma selgitusteta anti 0 punkti.

3. *(Härmel Nestra)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Vabanetud murdudest ja sulgudest ning saadud kätte võrdus $21x^2 - 1980xy + 20y^2 = 0$ või midagi ilmselgelt samaväärset: 2 p
- Vaadeldud saadud seost ruutvõrrandina ühe või teise muutuja suhtes või nende jagatise suhtes: 1 p
- Õigesti rakendatud lahendivalemit: 1 p
- Põhjendatud, et diskriminant ei ole täisruut: 2 p

- Veenvalt põhjendatud, et sellest tulenevalt täisarvulised lahendid puuduvad: 1 p

Skeemi viimase rea eest punkti saamiseks ei piisanud põhjendusest, et ruutjuure võtmisel on tulemuseks murdarv. Siin on tähtis irratsionaalsus, sest kui ruutjuur oleks ratsionaalarv, võiksid x ja y olla sellegipoolest mõlemad täisarvud.

Selle ülesande hindamisel arvestati ka mustandeid. Ainult õige vastuse (ei) eest ilma selgitusteta anti 0 punkti.

Täpselt žürii lahenduse 1 moodi ei lähenenud keegi. Üks õpilane jõudis sihile sarnaselt, vaadeldes liikmete jaguvust 5-ga ja näidates, et võrrandit saab lõpmatuseni 5-ga taandada. Veel mõned õpilased vaatlesid jaguvust erinevate teguritega, kuid ei märganud, et taandamisel hakkab võrrandi kuju korduma. Arvudega 3, 5 või 10 jaguvuse vaatlemise eest sai 1 lisapunkti (koos skeemi esimese reaga 3 punkti).

Küll aga oli terve hulk õpilasi, kes tegid nagu žürii lahenduses 2. Umbes samapalju oli neid, kes tuletasid võrduse (1) nagu žürii lahenduses 1 ja käsitlesid seda ruutvõrrandina x või y suhtes. Lahenduse etapid sellest üldjoontes ei muutu, mõlemal juhul taandub väide arvu $\sqrt{1980^2 - 1680}$ irratsionaalsusele. Huvitav on märkida, et Tartu õpilased järgisid valdavalt žürii lähenemist (muutujavahetus), samas kui ülejäänud piirkondade õpilased eelistasid lahendada võrrandit (1).

Osa õpilasi oli püüdnud täisarvuliste lahendite puudumist põhjendada suuruskaalutlustega. Tüüpiliselt vaadati juhtu, kus mõlema muutuja väärtus on väike, ja juhtu, kus mõlema muutuja väärtus on suur, kuid jäeti vaatlemata võimalus, et ühe muutuja väärtus on väike ja teise väärtus suur. Ootamatult palju eksiti murdudega opereerimisel, nt terves reas töödes eeldati, et kui murrud on võrdsed, siis lugejad ja nimetajad on vastavalt võrdsed või on ühe murru lugeja ja nimetaja teise murru omadest täisarv kordi suuremad (viimane väide oleks korrektne, kui esimene murd oleks taandatud). Üsna mitmes töös väideti, et 2021 on algarv, mis ei vasta samuti tõele.

4. *(Richard Luhtaru)*

Skeem žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude jaoks.

- Idee tõsta võrduse $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ liikmeid ümber ja tõsta pooli omavahel ruutu või kuupi: 2 p
- Võrduse $x - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3}$ pooled kuupi tõstetud: 1 p
- Viidud võrrand kujule $x^3 + 6x - 3 = (3x^2 + 2)\sqrt{2}$: 2 p
- Võrduse pooled ruutu tõstetud: 1 p
- Leitud õige polünoom: 1 p

Skeem žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude jaoks.

- Avaldatud $x^0, \ldots, x^6$: 1 p
- Idee, et sobiva polünoomi leidmiseks piisab $x^0 \ldots, x^6$ kordajate leidmisest, mille korral igat tüüpi liikmed välja koonduvad: 2 p
- Ilmutatud kujul võrrandisüsteem kordajate leidmiseks: 1 p
- Võrrandisüsteem lahendatud: 3 p

Skeem nullpolünoomi leidmise eest.

- Märgitud, et polünoomiks sobib 0 või et sobib polünoom, kus kõik kordajad on nullid: 7 p

  Sealhulgas:

  - Märgitud, et üks kordajatest on 0, kuid pole selgelt aru saada, et see käib kogu polünoomi või kõigi kordajate kohta: *4 p*

Täislahendused, kus oli tehtud näpuviga, said 6 punkti. Mitme näpuveaga lahendused said 5 punkti.

Ainult sobiva mittenullpolünoomi eest ilma selgitusteta anti 2 punkti. Esimese skeemi esimese rea alusel ei antud punkte lihtsalt $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ ruutu või kuupi tõstmise eest. 2 punkti anti juhul, kui leiti mittetriviaalseid seoseid x erinevate astmete vahel.

Olgugi et ülesanne oligi mõeldud 11. klassi komplekti üheks raskemaks ülesandeks, oli see ilmselt piirkonnavooru jaoks liiga raske. Positiivse arvu punkte said ainult 20 õpilast. Seetõttu võis olla isegi mingil määral hea, et žürii vea tõttu nullpolünoom lahendiks sobis: enamik täislahendusi leidsid nullpolünoomi, žürii lahendust järgisid ainult mõned õpilased. Üheks suureks põhjuseks võis olla polünoomi mõiste, mis oli võõras ja võis paljud õpilased ära hirmutada. Kuigi ülesanne ei eeldanud teadmisi polünoomide kohta, oli märgata, et ülesandes antud definitsioon jäi mitmetele õpilastele segaseks.

Mõned õpilased üritasid ülesannet lahendada aritmeetilise ja/või geomeetrilise jada valemite abil. Kuigi polünoom sarnaneb geomeetrilise jada summaga, siis üldjuhul on polünoomis liikmete ees erinevad kordajad ja geomeetrilise jada omadustest pole sel puhul erilist kasu.

Mitmed õpilased tulid idee peale avada sulud liikmete $x^0, \ldots, x^6$ jaoks ja koostada vastavate kordajate jaoks võrrandisüsteem, millega saadi üllataval kombel isegi edukalt hakkama. Tülikat võrrandisüsteemi lahendada aga kellelgi paraku ei õnnestunud.

5. *(Artur Avameri)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Rakendatud Pythagorase teoreemi kolmnurgas ACF, BCF või FKM (kus M on külje AB keskpunkt), või tähele pandud, et kolmnurgad AKF ja BKF on sarnased: 1 p
- Edasi kirja pandud 3 muutuja suhtes 3 võrrandit, mida saab võrrandsüsteemina lahendada: 2 p

- Võrrandisüsteemi lahendamisega jõutud biruutvõrrandini mõne muutuja suhtes: 2 p
- Lahendus edukalt lõpule viidud: 2 p

Punkte ei võetud maha, kui saadud vastus oli õige, kuid täielikult lihtsustamata või žürii vastusest erineval kujul (näiteks $\frac{9}{\sqrt{15}}$ või $\sqrt{\frac{27}{5}}$). Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

Vaid vähesed täislahendused kasutasid žürii lahendusmeetodit. Suurem osa täislahenduseni jõudjaid kasutasid Pythagorase teoreemi kolmes eri kolmnurgas (tavaliselt ACF, BCF ja FKM), koostasid võrrandsüsteemi kolme muutuja suhtes (sageli CF, AM ja FM), ning lahendasid selle ja viisid lahenduse lõpule.

Mitmed õpilased eeldasid, et $|CF| = |AB|$, tuues põhjenduseks võrdused $|CF| = 2|KF| = 2r = |AB|$. Seda viga saab vältida, kui teha joonlauda kasutades suur, täpne joonis, kust on kohe näha, et $|KF| \neq r$. Samuti eeldasid mõned lahendajad, et kolmnurk ABC on täisnurkne. Tasub meeles pidada, et ülesande lahendamisel tohib kasutada vaid ülesande tekstis olevat infot ning muid väiteid eeldada ei tohi.

Ülesanne osutus suhteliselt binaarseks – enamik õpilasi, kes tulid ideele võrrandsüsteem koostada, suutsid lahenduse ka lõpule viia (sageli arvutusvigadega), kuid need, kes võrrandsüsteemi ei koostanud, tavaliselt esmastest tähelepanekutest kaugemale ei jõudnud. Siiski oli hea meel näha, et enamik õpilasi oli proovinud ülesannet lahendada ning paljud olid kirja pannud Pythagorase teoreemid kolmnurkades ACF ja BCF, mis on eduka lahenduse esimene samm ning mille eest sai ühe punkti.

6. *(Tähvend Uustalu)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Toodud toimiv konstruktsioon: 7 p

Ainult õige vastuse (jah) eest punkte ei antud. Punkte ei antud ülesannete seisukohalt kasutute arvutuste nagu „viies parandaja parandab 6 minutiga 1,2 tööd“ eest.

Ülesande lahendamine tähendab üldjuhul selgitamist, kuidas komisjoni töö täpselt korraldada. See tähendab: tuleb väga konkreetselt määrata, kes täpselt mis hetkel mis ülesannet parandab. Üks võimalus selleks on tuua konkreetne algoritm, mille alusel töid jagatakse. (Põhimõtteliselt on ka võimalik, et ülesannet saab lahendada ilma konkreetset konstruktsiooni toomata, tõestades selle asemel konstruktsiooni mingite kaudsete meetoditega. Ühtki niisugust korrektset lahendust siiski ei esitatud.)

Väga paljudes töödes oli toodud mingi konstruktsioon, mis oli väga umbmäärane – teksti oli võimalik mitmeti lugeda ja teksti lugemisel ei olnud võimalik välja selgitada, kes mis tööd täpselt mis hetkel parandab. Seetõttu ei olnud võimalik ka kontrollida, kas konstruktsioon vastab ülesande tingimustele või mitte.

Eesti 68. matemaatikaolümpiaad

27. jaanuar 2021 Piirkonnavoor **12. klass**

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Ave Külter)*

Erinevate lahenduste jaoks kasutati kaht eri skeemi; kummagi skeemi puhul selles märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem otsese lahenduse jaoks (žürii lahendus 1).

- Viidud võrrand kujule $\sqrt{x}(6x+1) = 5x$: 2 p
- Taandatud võrrand ruutvõrrandile $36x^2 - 13x + 1 = 0$: 2 p
- Leitud lahendid $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{9}$: 2 p
- Kontrollitud, et lahendid rahuldavad algset võrrandit: 1 p

Skeemi teise rea eest 2 punkti saamine eeldas kontrollimist, et $x = 0$ ei rahulda algset võrrandit (piisas mainimisest). Ilma selle kontrollita anti selle rea eest maksimaalselt 1 punkt. Võrreldes žürii lahendusega võis samme teha teises järjestuses: kõigepealt välistada $x = 0$, misjärel jagada pooled läbi $\sqrt{x}$-ga ja alles seejärel tõsta ruutu.

Skeemi neljanda rea eest punkti saamiseks piisas mainimisest, et lahendid rahuldavad algset võrrandit.

Skeem muutujavahetusega lahenduse jaoks (žürii lahendus 2).

- Taandatud antud võrrand ruutvõrrandile $6t^2 - 5t + 1 = 0$: 4 p
- Leitud selle võrrandi lahendid $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{2}$: 1 p
- Leitud algse võrrandi lahendid $\frac{1}{9}$ ja $\frac{1}{4}$: 1 p
- Lahendid kontrollitud: 1 p

Skeemi esimese rea all anti 1 punkt muutujavahetuse $t = \sqrt{x}$ tegemise eest.

Skeemi esimese rea järgi anti 1 punkt vähem, kui $t = 0$ oli kontrollimata.

Ainult täieliku õige vastuse ($\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{9}$ mistahes järjestuses) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt. Ainult osalise õige vastuse eest (mõni õige lahend puudu või mõni võõrlahend lisaks) anti 0 punkti.

2. *(Andres Talts)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Taandatud ülesanne arvude 2^{10} ja $2{,}7^7$ võrdlemisele: 4 p

- Teostatud korrektsed arvutused ja saadud õige tulemus: 3 p

Ainult õige vastuse (väiksem) eest ilma selgitusteta anti 0 punkti.

3. *(Kaur Aare Saar)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Viidud avaldis kujule $\frac{\left(n^{2k+2}-1\right)(n-1)}{\left(n^2-1\right)\left(n^{k+1}-1\right)}$: 2 p
- Viidud avaldis kujule $\frac{n^{k+1}+1}{n+1}$: 1 p
- Põhjendatud, et $\frac{n^{2021}+1}{n+1}$ on iga n korral täisarv: 2 p
- Põhjendatud, et $\frac{n^{2022}+1}{n+1}$ ei ole mingi n korral täisarv: 2 p

Õpilased, kes olid vaadanud väikseid juhte ning nende põhjal püsitanud hüpoteesi, et jaguvus sõltub k paarsusest, said 1 punkti.

Paljud õpilased, kes olid korretselt lihtsustanud jagatise kujule $\frac{n^{k+1}+1}{n+1}$, olid ekslikult eeldanud, et see on alati täisarv. Tegelikult sõltub see aga $k+1$ paarsusest ning viimase kahe hindamisskeemi rea eest anti punkte ainult siis, kui need olid ammendavalt põhjendatud.

Ainult b-osa õige vastuse (ei) eest ilma selgitusteta anti 0 punkti. Juhu $n = 1$ mittekäsitlemise punkte maha ei võetud.

Ülesanne oli keskmiselt halvasti lahendatud. Väga paljude õpilaste jaoks osutus keeruliseks astmeid sisaldavate avaldiste teisendamine. Kasutati igasuguseid vigaseid teisendusi: hulkliikmete jagamise asemel leiti hoopis nende üksliikmete jagatise summa, astmete korrutamisel mitte ei liidetud astendajaid, vaid korrutati, hulkliikme astendamisel leiti üksikute liikmete astmete summa jpm. Palju oli ka matemaatiliselt õigeid teisendusi, mis lahendusele lähemale ei viinud. Nende eest punkte ei antud.

4. *(Oleg Košik)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestus, et $n = 2$ pole võimalik: 3 p

  Sealhulgas tüüpiliste lahenduste eest:
  - Pandud kirja võrdus $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}$: *1 p*
- Konstruktsioon koos tõestusega iga $n \geqslant 3$ jaoks: 4 p

  Sealhulgas tüüpiliste lahenduste eest:
  - Näide konkreetse naturaalarvu n jaoks, mis ei üldistu lihtsal viisil kõigile naturaalarvudele $n \geqslant 3$: *1 p*
  - Näide konkreetse naturaalarvu n jaoks, mis üldistub lihtsal viisil kõigile naturaalarvudele $n \geqslant 3$: *2 p*

- Näide lõpmata paljude naturaalarvude n jaoks, mis lihtsal viisil ei üldistu kõigile naturaalarvudele $n \geqslant 3$: *2 p*

Ainult õige vastuse (kõik naturaalarvud $n \geqslant 3$) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

Ülesanne oli oodatust üksjagu raskem, suur osa õpilasi seda ülesannet üldse ei proovinudki. Tuli üllatusena, et väga paljud ei tunne geomeetrilise keskmise mõistet. Mõned lahendajad ajasid segi geomeetrilise keskmise ja ruutkeskmise.

Vahel tehti arvude kohta põhjendamata eeldusi, et näiteks kõik komplekti kuuluvad arvud peavad olema mingi naturaalarvu astmed või et vähim komplekti kuuluv arv peab olema 1. Sellistel kitsendavatel eeldustel oli tihti võimalik küll konstrueerida näited $n \geqslant 3$ jaoks, kuid juhtu $n = 2$ korrektselt tõestada ei saa.

5. *(Karolina Tammemaa)*

Erinevate lahenduste jaoks kasutati kaht eri skeemi; kummagi skeemi puhul selles märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem žürii lahenduse jaoks.

- Leitud viisnurga pindala kujul $5\tan 54^\circ$ cm^2: 2 p
- Leitud kolmnurga Δ pindala kujul $\frac{1}{2}\sin 72^\circ$ cm^2: 2 p
- Leitud sektori Σ pindala kujul $\frac{\pi}{10}$ cm^2: 2 p
- Kõik korrektselt kokku pandud: 1 p

Skeem poolringide lõigete pindala kasutava lahenduse jaoks.

- Leitud viisnurga pindala kujul $5\tan 54^\circ$ cm^2: 2 p
- Leitud kõigi poolringide pindalade summa $\frac{5\pi}{2}$ cm^2: 1 p
- Leitud kahe poolringi lõike pindala kujul $\left(\frac{2\pi}{5} - \sin 72^\circ\right)$ cm^2: 3 p
- Kõik korrektselt kokku pandud: 1 p

Poolringide ühise pindala leidise eest anti punkte ainult juhul, kui oli selge, et selle kasutamiseks on ka idee olemas. Kui viisnurga pindala leiti, aga see oli valel kujul, sai selle rea eest 1 punkti vähem. Sama põhimõte kehtis ka teiste pindalade puhul. Ainult sisenurga leidmise eest punkte ei antud. Ühikute ärakaotamise eest punkte maha ei võetud.

Tüüpveaks töödes oli, et kui jagati viisnurk viieks võrdseks kolmnurgaks, siis oletati, et nad on võrdkülgsed ja nende kõrgus on $\sqrt{3}$.

6. *(Kaarel Hänni)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Esitatud lihtne definitsioon/kirjeldus nende punktide hulgale, kuhu saab nuppu viia: 3 p

  Sealhulgas:

  - Tehtud joonis, mis sisaldab piisavalt palju kolmnurki mõne kasuliku tähelepaneku tegemise lihtsustamiseks ja millele on õigesti või peaaegu õigesti märgitud nende punktide hulk, millele nupp saab jõuda: *1 p*
  - Lisaks tehtud mõni kasulik (eelistatult sõnaline, aga mõnel juhul ka joonisele tehtud märgetest ilmnev) tähelepanek/idee selle punktihulga kirjeldamiseks: *1 p*
- Põhjendatud, et kõigile selle hulga punktidele saab nuppu viia: 1 p
- Põhjendatud, et ühelegi teisele punktile ei saa nuppu viia: 1 p
- Punktihulgas olevad punktid õigesti või pisiveaga loendatud: 2 p

Skeemi esimese rea eest punktide saamiseks peab tööst välja paistma, et õpilane kirjeldab punktihulka just selliste punktide hulgana, kuhu saab nupu viia. Näiteks piisab siit täispunktide saamiseks lausest „Värvime mängulaua punktid vaheldumisi kolme värviga (standardviisil); ma väidan, et nupu saab viia täpselt nendele ruutudele, mis on sama värvi algpunktiga.“

Selle ülesande parandamisel arvestati ka mustandeid.

Paljudes töödes oli mõõduka suurusega kolmnurga jaoks õigesti joonistatud nende punktide hulk, kuhu nupuga jõuda saab, ent seda hulka ei olnud kuidagi lihtsamalt kirjeldatud, mis on ilmselt vajalik edasiseks argumentatsiooniks (näiteks põhjendamiseks, miks just nendele punktidele saab jõuda, kui palju selliseid punkte mingis reas või reakolmikus on jne). See tegi ka väga keeruliseks eristamise, kas õpilane oli lihtsalt järjest erinevaid käike proovides selle hulga joonistanud või siis näinud mingit mustrit, mille abil seda hulka saab lihtsamini joonistada/kirjeldada/analüüsida. Ekstreemse näitena võib õige vastuse saada ka lihtsalt siis, kui väikeste näidete proovimise põhjal pakkuda ära õige reegel ridades olevate punktide arvude jaoks ja seejärel aritmeetilise jada summa arvutada. (Seda saaks vabalt teha isegi omamata mingit arusaama, milline nupu jaoks saavutatavate punktide hulk välja näeb.) Vaatamata õigele vastusele on sellise lahenduse puhul põhjendatud väga vähe ja täislahendusest siiski suurem osa puudu. (Kui midagi lisaks põhjendatud polnud, siis sai sellise töö eest üldiselt 1 punkti joonise ja 1 punkti loendamise eest.) Kokkuvõttes: väikeste näidete läbiproovimisel leitud arvude põhjal mustrite pakkumine on muidugi hea samm ülesande lahendamise suunas, kuid vastuse matemaatiliselt korrektseks põhjendamiseks on oluline tõestada, et pakutud muster tõepoolest esineb.

Paljud õpilased said tekstist valesti aru.

Kokkuvõte

Üleriigiline žürii küsis hindamise ühtlustamiseks piirkondadest kokku 7. klassi töid 71, 8. klassi töid 78 ja 9. klassi töid 70. Kõik küsitud tööd üleriigilisele žüriile ka laekusid. Üleriigilise žürii poolsed põhikooli tööde kontrollijad olid järgmised.

7. klass:	Elts Abel	elts.abel@ut.ee
	Mart Abel	mart.abel@ut.ee
8. klass:	Jaan Kristjan Kaasik	jkaasik@gmail.com
	Hannes Kuslap	kuslaphannes@gmail.com
	Urmas Luhaäär	urmasluhar@gmail.com
9. klass:	Raul Kangro	raul.kangro@ut.ee
	Rasmus Saame	rasmussaame@gmail.com
	Kadi Siigur	kadi.siigur@hotmail.com
	Hendrik Vija	hendrikvija@gmail.com

Sel aastal vaatasid kõigi klasside kontrollijad läbi kõigis meile saadetud töödes kõik ülesanded.

Järgnevad kommentaarid on kirjutatud žüriile saadetud tööde põhjal. Iga klassi II osa iga ülesande kohta on eraldi kommentaarid järgnevatel lehekülgedel.

7. klass

Test oli suhteliselt hästi lahendatud. Raskusi valmistasid ülesanded 3 ja 4. Kõige paremini oli lahendatud ülesanne 10. Tööde ülevaatamisel tuli ühtlustamiseks muuta vaid 2 töös ühe ülesande hinnet (vastavalt hindamisjuhisele).

II osa ühepunktilised hindemuutused võib sageli lugeda erinevates piirkondades erineva hindamisskeemi kasutamise tagajärgedeks. Suuremate punktimuutuste korral oli reeglina antud punkte väidete eest, mida ei olnud põhjendatud. Kui õigele vastusele oli(d) lisatud ka vale(d) vastus(ed), ei andnud žürii vastuse eest ettenähtud punkti.

8. klass

Testi osas märgime, et 1. ülesandes on vastus $\frac{0}{841}$ sisuliselt õige, kuid ootame vastust lihtsaimal kujul. Sellist vastust hinnati üleriigilise žürii poolt 1 punktiga. Kuigi seda polnud hindamisjuhises sätestatud, on see kooskõlas üldiste hindamisprintsiipidega, mille alusel need juhised koostatakse.

II osa esimesed kaks ülesannet olid mõlemad võrdlemisi lihtsad, kolmandas aga ei saanud ka parimad üle 5 punkti. Seetõttu oli pingerea ülemine pool tavatult tihe, komplekt osutus tippe halvasti eristavaks.

9. klass

Komplekt sai seekord suhteliselt jõukohane. Parim võistleja kaotas ainsa punkti testist. Kuigi pingerea tipus langevad punktid järsult, on tulemused oluliselt paremad kui aasta tagasi.

Kontrollijate kommentaarid

1. Otsitava arvu vahemiku leidmine oli hästi tehtud ja üldjuhul hästi põhjendatud. Arvu ühesuse põhjendamine oli puudulik. Paljudel juhtudel oli see osa piirkondades üle hinnatud, mistõttu tuli tööde hindeid alandada keskmiselt 3 punkti võrra. Täielikuks lahenduseks ei piisa, kui vaid öeldakse, et tegu on ainsa lahendiga, kuid seda väidet ei põhjendata.

2. Ülesanne oli suhteliselt hästi lahendatud. Puudujääke oli põhjendustes. Kui töödes puudus igasugune viide võrdhaarsusele ja seda kasutati, siis tuli maksimumhinnet alandada keskmiselt 2 punkti võrra. Ülesande lahendamisel oskasid mõned õpilased kasutada ka nelinurga sisenurkade summat. Aeti segamini mõisted „tipunurk“ ja „tippnurk“, mille eest küll hinnet ei alandatud.

3. Selle ülesande eest ei saanud keegi peale üleparandamist maksimumpunkte. Piirkonna parandajad olid samasuguseid töid hinnanud erinevates piirkondades erinevate hinnetega (mõne idee puhul kõikus sama asja eest antud punktide arv algselt vahemikus 2–7). Vastused olid siin sageli õiged saadud (ja mitmes kohas ka vaid vastuse eest maksimumpunktid antud), kuid põhjendused olid puudu. Sageli öeldi, et kuna arvu 7 sisaldavas veerus on arve kõige vähem, siis tuleb sinna kirjutada kõige suuremad arvud, milleks on 10 ja 11. Edasine arutlus lähtus juba sellest eeldusest. Tegelikult oli siin tegemist lahendusideega, kus eeldati, et 7 alla tuleb kirjutada 10 ja 11 mingis järjekorras, teised variandid olid läbi vaatamata. Ühtlustamisel tuli selles ülesandes väga paljude tööde algset hinnet muuta.

Kontrollijate kommentaarid

1. Osas a) oli sageli vastus leitud proovimise teel. Lahenduseks esitati viis, kuidas iga pakkumisega jõuda vastusele „lähemale“, peale ühe sobiva vastuse leidmist lahendus lõppes. Kuid lisaks vastusele „lähemale“ jõudmise kirjeldusele oleks vaja seda ka põhjendada. Seda tegemata tuleks kõik võimalikud väärtused läbi proovida ning järeldada, et ainult üks vastus sobib. Muidu jääb lahtiseks küsimus, miks on ülesandel ainult üks vastus. Kavalam olles võiks läbi proovida ka ainult osa paare ning põhjendada, miks ülejäänud juhtusid ei pea vaatama (nt küpsiseid peab olema täisarv, suurendades vastava protsendi võrra peab see jääma täisarvuks. Võib mõelda ise, mis juhud siis jäävad proovida). Seega, lihtsalt pakkumise puhul pole tegu täislahendusega ning üleriigiline žürii hindas selliselt lahendatud a-osa 2 punktiga.

   Kui õigesti koostatud võrrandisüsteemil puudus lahenduskäik ning polnud ühtegi kommentaari lahendamise kohta, siis võttis üleriigiline žürii selle osa eest 1 punkti maha. Jällegi, süsteemi lahendi võib ära arvata, kuid miks on süsteem üheselt lahenduv ehk ülesandel ainult üks lahend? Kuna kerge on veenduda, et lahend on ühene, siis rohkem punkte seal maha ei võetud.

   Märkus. Ka siis, kui on hästi ära kirjeldatud vastusele „lähemale“ jõudmise protsess erinevate pakkumistega, on ikkagi vaja vastuse ühesust tõestada. Kõrgema matemaatika terminites võib öelda, et teatud eeldustega otsime kõiki funktsiooni ekstreemumeid ning kasutame lähendusalgoritmi, mis kindlasti jõuab funktsiooni ekstreemumini. Näiteks võib lähendusalgoritmi defineerida mingi iteratiivse jadana nii, et sõltumata alguspunktist on jada piirväärtus alati üks ekstreemum. Seega jääb tõestada, et igast erinevast alguspunktidest alustades jõuame selle algoritmiga sama ekstreemumini. Üldiselt see väide ei kehti.

2. Ülesanne oli küllaltki hästi lahendatud ja maksimumtulemusega töid oli palju. Peamiselt esinesid arvutusvead ja üksikutes töödes oli ka valesti aru saadud, kuidas ristkülikud paiknevad. Enim kaotati punkte selle tõttu, et vastus oli küll pakutud, kuid puudus lahenduskäik selgitamaks vastust. Teine koht, kust kaotati enam punkte, oli erinevad võrrandite koostamise vead: näiteks pandi lühema külje asemel võrrandisse ristküliku pikem külg.

3. Ülesanne osutus raskeks. Peamiseks puuduseks oli arvu 840 maksimaalsuse ebakorrektne tõestamine. Paljud väitsid, et kui alati valida arvud nii, et suurima ühise teguri või vähima ühise kordse leidmidel saame võimalikult

suure arvu, siis ka lõpuks tekib suurim võimalik arv. See, et iga käigu mõistes suurima arvu saamine annab kokku suurima arvu, ei ole aga ilmne. Esines ka palju lahendusi, kus oli vähimaks arvuks saadud 2.

Kontrollijate kommentaarid

1. Ülesande põhiraskuseks osutus äraarvamine, et vastus on „jah“, ning välja mõtlemine, kuidas leida näidet sobivatest arvudest p, q. Tüüpiliselt jõudsid kõige kiiremini näiteni õpilased, kes hakkasid järjest q väärtusi proovima, selleks piisas minna vaid 13-ni. Õpilastest, kes proovisid järjest p väärtusi, jõudis samuti enamik näiteni, kuid leidus palju ka neid, kes andsid alla enne 47-ni jõudmist.

Mitmed õpilased pakkusid näiteks $p = 2, q = -2$. Et negatiivseid arve ei loeta algarvudeks, siis see näide ei sobi.

2. Ülesanne oli üldiselt hästi lahendatud. Võrratus $x < z$ oli tõestatud paremini kui $x < y$, mida oligi oodata. Mõned õpilased tõestasid ära nii võrratuse $x < z$ kui ka võrratuse $x < y$, kuid ei teinud sellest vajalikku lõppjäreldust, et x on neist muutujaist väikseim.

3. Töödes, kus ülesande a- ja b-osa lahendati üksteisest sõltumatult, kasutati üleriigilise žürii poolt alternatiivset hindamisskeemi:

- Osa a) lahendamine: 4 p

  Sealhulgas:
  - Tehtud kindlaks, et kui kolmnurk CBD on võrdhaarne, siis $\angle CDB = \angle DCB$: *2 p*
  - Avaldatud vajalikud nurkade suurused mingi ühe ja sama nurga kaudu: *1 p*
  - Arvutustega näidatud, et kolmnurgas ABD on kaks nurka võrdse suurusega: *1 p*
- Osa b) lahendamine: 3 p

Ülesanne osutus pigem keeruliseks. Kõige tüüpilisemaks veaks osutus põhjendamata jätmine, et kui kolmnurk CBD on võrdhaarne, siis $|BC| = |BD|$. Ka eeldati sageli, et kui kolmnurk ABD on võrdhaarne, siis $|AD| = |BD|$, mille tõttu saadi vale vastus. Osas b) jäi tõestus mõne töö korral poolikuks sellepärast, et näidati, et ei saa olla olukorda, kus $|AB| = |BD|$ ja kolmnurk CBD on võrdhaarne, kuid ei näidatud, et saab olla olukord, kus $|AB| = |BD|$, mistõttu ei olnud lahendus täielik. Lisaks leidus töid, kus öeldi nurga suurused ilma arvutusi näitamata, või üritati teha võimalikult täpne joonis ja sellelt pikkusi mõõtes väidet tõestada, mille eest ei saanud samuti punkte anda. Mõningaid probleeme esines ka teksti mõistmisel: paaris töös oli lahendatud osa a) asemel osa b) ja vastupidi, kuid kuna matemaatilist sisu see ei mõjutanud, siis selle eest punkte ei kaotatud.

4. Ülesanne osutus küllaltki jõukohaseks, täislahendusi oli žüriile saadetud tööde hulgas rohkem kui 40%. Enamus lahendusi olid hinnatavad žürii antud skeemi kohaselt, punkte tuli korrigeerida põhiliselt seetõttu, et erinevates piirkondades suhtusid parandajad erineva rangusega täislahenduse jaoks vajalike väidete sõnastamise puudujääkidesse. Küllalt palju oli siiski ka töid, kus konkreetsete liikumisvõimaluste läbivaatamise asemel üritati läbi ajada lihtsalt väidetega, et alati saab saavutada teatud seise vms.