1. Tõesta, et iga naturaalarvu N jaoks leidub selline täisarv $k \geqslant 0$, et arvu N saab kirja panna arvude 2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^k summana, kus iga neist arvudest esineb summas 1 või 2 korda. (Näiteks $12 = 2^0 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^2$.)

2. On antud paaritu naturaalarv $n > 1$. Tahvlile on kirjutatud arvud n, $n+1$, $n+2$, ..., $2n-1$. Tõesta, et ühte neist saab kustutada nõnda, et järelejäänud arvude summa ei jaguks ühegi järelejäänud arvuga.

3. On antud teravnurkne kolmnurk ABC. Lõigul AC ning külje BC pikendusel üle punkti C valitakse vastavalt muutuvad punktid X ja Y selliselt, et $\angle ABX + \angle CXY = 90°$. Olgu punkt T punkti B projektsioon sirgele XY. Tõesta, et kõik sellised punktid T asuvad ühel sirgel.

4. Ümmargusel kaelakeel on $n > 3$ helmest, iga neist on värvitud punaseks või siniseks. Kui mingil helmel on mõlemad tema naabrid värvitud ühtemoodi, võib tema värvi muuta (punasest siniseks või sinisest punaseks). Milliste n väärtuste korral on võimalik igast helmeste algvärvimisest saada kaelakee, kus kõik helmed oleks värvitud sama värvi?

....

5. Kas on võimalik joonistada tasandile kolmnurk ABC ning märkida samal tasandil kaks punkti X ja Y nii, et oleks $AX = BY = AB$, $BX = CY = BC$, $CX = AY = CA$?

6. On antud kaks paaritut naturaalarvu a ja b. Tõesta, et leidub selline naturaalarv k, et vähemalt üks arvudest $b^k - a^2$ ja $a^k - b^2$ jagub arvuga 2^{2018}.

7. Ruudustikus 10×10, kus ühe ruudu küljepikkus on 1, valitakse n ruutu. Igas valitud ruudus tõmmatakse üks diagonaalidest ning märgitakse sellel nool ühes selle kahest suunast. Osutub, et iga kahe noole jaoks kas ühe neist lõpp langeb kokku teise algusega, või nende lõppude vahekaugus on vähemalt 2. Millise suurima n korral on see võimalik?

1. Misha tuli riiki, milles on n linna, ning iga kaks linna on omavahel ühendatud otseteega. Misha soovib alustades mingist linnast külastada veel mõned linnad, seejuures läbimata ühtegi linna kaks korda. Iga kord, kui Misha sõidab mingil teel, lammutab riigi president k teed, mis lähtuvad linnast, kuhu suundub Misha tee. (Kui linnal aga poole nii palju teid alles, siis lammutab kõik allesjäänud teed peale selle ühe, millel sõidab Misha.) Mis on suurim linnade arv, mida Mishal õnnestub kindlasti külastada sõltumata presidendi tegevustest?

2. Värvime 2018-nurga tipud kahte värvi nii, et mistahes kaks naabertippu oleks erinevat värvi. Kui ühe värvi tippude juures olevate nurkade summa võrdub teise värvi tippude juues olevate nurkade summaga, nimetame sellist 2018-nurka *huvitavaks*. Kumeras 2019-nurgas märgiti ära üks tipp. Osutub, et mistahes märkimata tipu eemaldamisel jääb alles huvitav 2018-nurk. Tõesta, et ka märgitud tipu eemaldamisel jääb alles huvitav 2018-nurk.

3. Mööda ringjoont lebab n münti, iga neist ülespoole kas kulli või kirjaga. Kui kaks naabermünti lebavad ühtemoodi (mõlemad kulli või mõlemad kirjaga), tohib mõlemad mündid keerata ümber. Mis on suurim võimalik arv müntide asetusi, mida pole võimalik saada üksteisest selliste operatsioonide abil? (Üksteisest pööramise teel saadavaid asetusi loeme erinevateks.)

4. Polünoomi $f(x)$ kordajad on täisarvud, mille absoluutväärtus ei ületa 5 000 000. Seejuures leidub igal võrrandil

$$f(x) = x, \qquad f(x) = 2x, \qquad \ldots, \qquad f(x) = 20x$$

täisarvuline juur. Tõesta, et $f(0) = 0$.

. . . .

5. On antud kõõlnelinurk $ABCD$. Sirge, mis ristub BD-ga, lõikab lõike AB, BC ja kiiri DA, DC vastavalt punktides P, Q, R, S. On teada, et $PR = QS$. Tõesta, et lõigu PQ keskpunkt asub punktidest A ja C samal kaugusel.

6. Olgu $a, b, c, d > 0$. Tõesta, et

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd \geqslant 4(a - b)^2\sqrt{abcd}.$$

7. Mängunupp liigub mängulaua 100×100 vasakust alumisest nurgast paremasse ülemisse nurka, liikudes igal sammul kas ühe ruudu võrra paremale või ülesse. Olgu a selliste teekondade arv, kus mängunupp sooritab täpselt 70 sammu allpool diagonaali, mis läheb vasakust alumisest nurgast paremasse ülemisse nurka, ning b teekondade arv, kus niisuguste sammude arv on täpselt 110. Kumb arv on suurem, kas a või b?