Talvine algebra õppesessioon (vanem rühm)
Jadad ja rekurrentsed seosed

Tartu, 19. detsember 2016

Lineaarsed rekurrentsed võrrandid

Olgu jada (u_n) esitatud lineaarse rekurrentse võrrandiga

$$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_0 u_n, \qquad (*)$$

kus $a_0, \ldots, a_{p-1}$ on etteantud reaalarvud. Olgu $P(x) = x^p - a_{p-1}x^{p-1} + \cdots a_0$ (võrrandi (*) karakteristlik polünoom) ning olgu $x_1 < x_2 < \ldots x_k$ selle polünoomi juured. Siis

a) Jada $u_n = x_j^n$ on võrrandi (*) lahendiks iga $j = 1, \ldots, k$ korral.

b) Kui $k = p$, siis võrrandi (*) kõik lahendid esituvad kujul $u_n = \sum_{j=1}^{p} C_j x_j^n$, kus C_j on suvalised konstandid.

c) Kui x_j on polünoomi $P(x)$ m kordne juur, kus $m > 1$, siis on võrrandi (*) lahenditeks ka $u_n = n^l x_j^n$, $l = 1, \ldots, m-1$.

Ülesanded

1. Jada on defineeritud seostega $a_0 = 0$, $a_1 = 3$ ning $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Näidata, et kõik jada liikmed on "peaaegu kahe astmed", s.t. erinevad kahe astmest 1 võrra.

2. Jada on defineeritud seostega $a_0 = -1$, $a_1 = 1$ ning $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Leida jada üldliikme valem.

3. Olgu (F_n) Fibonacci jada ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$).
   a) Leida valem F_n arvutamiseks.
   b) Näidata, et $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$, $n = 1, 2, \ldots$.
   c) Näidata, et $F_{2n}F_{n-1} - F_{2n-1}F_n = (-1)^n F_n$, $n = 1, 2, \ldots$.
   d) Leida $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

4. Olgu (F_n) Fibonacci jada. Arvutada summad $\sum\limits_{n=1}^{k} F_n$, $\sum\limits_{n=1}^{k} F_{2n-1}$ ja $\sum\limits_{n=1}^{k} F_n^2$.

5. Olgu (F_n) Fibonacci jada. Arvutada summad $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}$ ja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{F_{2^n}}$.

6. Olgu (F_n) Fibonacci jada ja (L_n) Lucase jada ($L_1 = 2$, $L_2 = 1$, $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$). Näidata, et $\prod\limits_{k=1}^{n} L_{2^k+1} = F_{2^{n+1}}$.

7. Juku leidis, et Fibonacci arvud kasvavad liiga kiiresti, ja tegi ettepaneku defineerida Juku arvud J_n järgmiselt: $J_1 = J_2 = 1$, $J_{n+1} = J_n + J_{n-1} - n$, $n = 2, 3, \ldots$. Kuidas käituvad Juku arvud? Leida Juku arvude üldvalem.

8. Jada (u_n) on defineeritud valemitega $u_0 = 7$ ja $u_{n+1} = \dfrac{1}{3u_n + 2}$. Leida u_n.

9. Jada $\{x_n\}$ on defineeritud seostega $x_1 = 1/2$ ja $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$, $k = 1, 2 \ldots$. Leida avaldise $\displaystyle\sum_{n=1}^{2016} \frac{1}{x_n + 1}$ täisosa.

10. Leida summad $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos k\alpha$ ja $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin k\alpha$, kus α on suvaline reaalarv.

11. Leida summad $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ ja $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

12. Jüri valib mingi positiivse arvu a_0. Kas on võimalik leida positiivne arv c nii, et arvutades $a_{n+1} = \dfrac{a_n + c}{1 - a_n c}$, $n = 0, 1, \ldots$, saame, et$a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$ on kõik positiivsed, aga a_{2017} on negatiivne?

13. Jada (x_n) on rahuldab seoseid $\sqrt{x_{n+2} + 2} \leq x_n \leq 2$ iga $n \geq 1$ korral. Leida x_{2015} kõik võimalikud väärtused.

14. (Tšehhi 1978) Olgu jada (a_n) antud valemiga

$$a_n = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n - 2.$$

Näidata, et kõik selle jada liikmed on kas täisarvu ruudud või viiekordsed täisarvu ruudud.

15. (BT 2006.1) Reaalarvude jada $a_1, a_2, \ldots$ rahuldab seost $a_n = a_{n-1} + a_{n+2}$, kui $n = 2, 3, \ldots$. Maksimaalselt kui palju järjestikuseid elemente võib jadas olla positiivsed?

16. (Kvant) Kas jada $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ sisaldab endas mingi aritmeetilise jada 4 järjestikust liiget? Aga mingi aritmeetilise jada n järjestikust liiget, kus n on suvaline naturaalarv?

17. (Saksa 1982) Leida kõik jadad (a_n) mis rahuldavad võrrandit

$$a_n a_m = a_{n+m} + a_{n-m}$$

iga $m, n = 0, 1, \ldots$, $n \geq m$ korral ja tingimust
a) $f(1) = 5/2$;
b) $f(1) = \sqrt{3}$.

Raskemad ülesanded

1. (IMO 2011 shortlist) Leida kõik sellised positiivsete täisarvude jadad $(x_1, x_2, \ldots, x_{2011})$, et iga positiivse täisarvu n jaoks leidub täisarv a nii, et $x_1^n + 2x_2^n + \cdots + 2011x_{2011}^n) = a^{n+1} + 1$.

2. (IMO 1979) Olgu A ja E korrapärase kaheksanurga vastastipud. Konn hakkab hüppama tipust A. Igast tipust peale E võib ta hüpata ükskõik kumba naabertippu, tipus E ta lõpetab hüppamise. Leida täpselt n hüppest koosnevate erinevate teekondade arv tipust A tippu E.

3. (Putnam 2001) Olgu a_n arvu $\sqrt{n}$ täisarvuks ümardatud väärtus. Arvutada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{a_n} + 2^{-a_n}}{2^n}$.

4. (IMO 1982 teemadel) Olgu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ positiivsete täisarvude jada, mis rahuldab järgmisi tingimusi: $a_4 > 4$, $a_{10\,000} \leq 12\,500$ ning $a_{m+n} - a_m - a_n$ on iga $m, n \in \mathbf{N}$ korral kas 0 või 1.
   a) Leida a_{2014} ja a_{2015}.
   b) Mis on $a_{1\,000\,001}$ maksimaalne võimalik väärtus?

5. (Kvant) Olgu jada (a_n) määratud seostega $a_1 = 0$, $a_{2n} = a_{2n+1} = n - a_n$.
   a) Näidata, et $a_n - a_{n-1} = 1$, kui kõige suurem 2 aste, millega n jagub, on paaritu, ülejäänud juhtudel $a_n - a_{n-1} = 0$.
   b) Näidata, et iga naturaalarv kuulub jadasse (a_n) kas 2 või 4 korda.
   c) Näidata, et $a_n = \dfrac{n}{3}$ lõpmatu arvu naturaalarvude n korral.
   d) Kas leidub selline n, et $\dfrac{n}{3} - a_n > 2010$? Aga selline, et $a_n - \dfrac{n}{3} > 2010$?
   e) Leida $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$.

6. Olgu $a_0 = 1$ ning $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}$, $n = 1, 2, \ldots$. Leida $[a_{5000}]$.

7. Kas leidub jada (a_n), mis rahuldab tingimust $a_{a_n} = n^2$ iga $n \in \mathbf{N}$ korral?

8. (IMO 2009, 5.) Leida kõik jadad (a_n), mille korral $a_n \in \mathbf{N}$, ning kõigi naturaalarvude n ja m korral leidub kolmnurk küljepikkustega n, a_m ja a_{m+a_n-1}.

9. (IMO 1998) Olgu $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ selline funktsioon, mis rahuldab $f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$ iga $s, t \in \mathbf{N}$ korral. Leida $f(1998)$ vähim võimalik väärtus.

10. Olgu $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ mittekahanev funktsioon, mis iga $x \in [0, 1]$ korral rahuldab tingimusi $f\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{f(x)}{2}$ ja $f(1 - x) = 1 - f(x)$. Leida $f\left(\dfrac{1}{2015}\right)$ ja $f\left(\dfrac{2}{2015}\right)$.