Tartu Ülikooli Teaduskool

Arvuteooria

2. Jäägiga jagamine I

Koostanud Maksim Ivanov, TÜ Teaduskool

Retsenseerinud Elts Abel, Tartu Ülikool

Arvuteooria teises ja kolmandas vihikus on põhiobjektiks kahe täisarvu jagamisel tekkiv jääk. Käesolevas materjalis kõigepealt põhjalikult räägime jäägi definitsioonist ning kirjeldame jäägiga jagamise reeglit. Seejärel uurime, kuidas lahendada jääkidega seotud ülesandeid definitsiooni kaudu, ning kirjeldame jääkide läbivaatlemise meetodit, mis osutub väga oluliseks matemaatikaolümpiaadi ülesannete lahendamisel.

Jäägiga jagamine

Definitsioon 1. Olgu b täisarv ja a positiivne täisarv. Kui täisarvude q ja r (kusjuures $0 \leqslant r < a$) korral kehtib võrdus

$$b = aq + r,$$

siis öeldakse, et arv r on arvu b jagamisel arvuga a tekkiv *jääk*. Seejuures arvu b nimetatakse *jagatavaks*, arvu a nimetatakse *jagajaks* ning arvu q nimetatakse *mittetäielikuks jagatiseks*.

Näited definitsiooni rakendamisest:

- Arv 15 annab jagamisel arvuga 4 jäägi 3, sest kehtib võrdus $15 = 4 \cdot 3 + 3$, kusjuures tekkinud jääk 3 on jagajast 4 väiksem.
- Arv -15 annab jagamisel arvuga 4 jäägi 1, sest $-15 = 4 \cdot (-4) + 1$, kusjuures tekkinud jääk 1 on jagajast 4 väiksem.

Järgmist tulemust nimetatakse jäägiga jagamise reegliks.

Lause 2. *Mis tahes positiivsete täisarvude a ja b korral leiduvad üheselt määratud täisarvud q ja r nii, et $b = aq + r$, kus $0 \leqslant r < a$.*

Tõestus. Selleks, et tõestada seda lauset, peame näitama kahte asja: esimesena peaks tõestama, iga paari (a, b) korral leidub vähemalt üks vastava omadusega täisarvude paar (q, r), ja teisena, et leidub parajasti üks selline paar.

Kuna a ja b võivad olla suvalised positiivsed täisarvud, siis paari (q, r) olemasolu näitamiseks peaks läbi vaatama kolme erinevat juhtumit: $a > b$, $a = b$ ja $a < b$.

1. Juhul kui $a > b > 0$, võtame $q = 0$ ja $r = b < a$. Siis võrdus $b = aq + r$ on samaväärne kehtiva võrdusega $b = a \cdot 0 + b$. Seega $(q, r) = (0, b)$.
2. Juhul kui $a = b > 0$, võtame $q = 1$ ja $r = 0$. Siis kehtib võrdus $a = a \cdot 1 + 0$, kus $r = 0 < a$. Seega $(q, r) = (1, 0)$.

3. Juhul kui $0 < a < b$ saame väita, et leidub selline positiivne täisarv c nii, et $ac > b$. Olgu $c = q + 1$ kõige väiksem positiivne täisarv, mille korral kehtib võrratus $ac > b$. Sellest järeldub, et kehtib ka võrratus

$$a(q+1) > b \qquad \text{ehk} \qquad a > b - aq.$$

Kuna $c = q + 1$ on kõige väiksem positiivne täisarv, mille korral kehtib võrratus $ac > b$, siis $c = q$ korral peaks kehtima võrratus $ac \leqslant b$ ehk $aq \leqslant b$. Teisisõnu, täisarv $b - aq$ on mittenegatiivne. Võttes $r = b - aq$ saame, et $b = aq + r$, kus $0 \leqslant r < a$.

Sellega on paari (q, r) olemasolu tõestatud.

Nüüd näitame, et leidub parajasti üks selline paar. Oletame vastuväiteliselt, et positiivsete täisarvude a ja b korral leiduvad erinevad positiivsete täisarvude paarid (q_1, r_1) ja (q_2, r_2) nii, et

$$b = aq_1 + r_1 \qquad \text{ja} \qquad b = aq_2 + r_2,$$

kus $0 \leqslant r_1 < a$ ja $0 \leqslant r_2 < a$. Siis võrdusest $aq_1 + r_1 = aq_2 + r_2$ saame, et

$$a(q_1 - q_2) = r_2 - r_1.$$

Seega $a \mid r_2 - r_1$. Tingimustest $0 \leqslant r_1 < a$ ja $0 \leqslant r_2 < a$ järeldub, et $|r_2 - r_1| < a$. Seega $a \mid r_2 - r_1$ parajasti siis, kui $|r_2 - r_1| = 0$ ehk $r_1 = r_2$. Ilmselt ka $q_1 = q_2$. Saadud vastuolu tõestab lause. □

Märkus. Jäägi definitsioonist ja lause 2 väitest järeldub, et fikseeritud positiivse täisarvu jagamisel näiteks arvuga 5 võib tekkida täpselt üks jääkidest 0, 1, 2, 3 ja 4. Teiselt poolt saab öelda, et mis tahes täisarv on esitatav täpselt ühel järgmistest kujudest:

$$5q, \quad 5q+1, \quad 5q+2, \quad 5q+3, \quad 5q+4$$

mingi täisarvu q korral.

Ülesannete lahendamisel osutub mõnikord kasulikuks järgmine lause, mis annab võimaluse mingi täisarvu q korral esitada mis tahes täisarvu täpselt ühel järgmistest kujudest:

$$5q-2, \quad 5q-1, \quad 5q, \quad 5q+1, \quad 5q+2$$

ehk

$$5q, \quad 5q \pm 1, \quad 5q \pm 2.$$

Lause 3. *Mis tahes positiivsete täisarvude a ja b korral leiduvad üheselt määratud täisarvud q ja r nii, et $b = aq + r$, kus $-\frac{1}{2}a < r \leqslant \frac{1}{2}a$.*

Näited lausete 2 ja 3 rakendamisest:

Jagame (jäägiga) arvu 15 arvuga 4.

- Lausest 2 järeldub, et leidub täpselt üks mittetäielik jagatis q ja täpselt üks jääk r, et kehtiksid mõlemad tingimused

  $$15 = 4 \cdot q + r \qquad \text{ja} \qquad 0 \leqslant r < 4.$$

  Tõestuses on kirjeldatud algoritm, kuidas leida arvude q ja r väärtused: arv q peaks olema kõige väiksem positiivne täisarv, mille korral kehtib võrratus $4 \cdot (q+1) > 15$. Sellest saame, et

  $$q = 3 \qquad \text{ja} \qquad r = b - aq = 15 - 4 \cdot 3 = 3.$$

  Seega $15 = 4 \cdot 3 + 3$.

- Lause 3 ütleb, et leidub parajasti üks q ja parajasti üks r, et kehtiksid mõlemad tingimused

  $$15 = 4 \cdot q + r \qquad \text{ja} \qquad -\frac{1}{2} \cdot 4 < r \leqslant \frac{1}{2} \cdot 4 \quad \text{ehk} \quad -2 < r \leqslant 2.$$

  Tõestuses toodud algoritmi kohaselt peaks arvu q väärtuseks olema kas kõige väiksem positiivne täisarv, mille korral võrratus $4 \cdot (q+1) > 15$ kehtib, või ühe võrra suurem arv. Analoogiliselt eelmise punktiga esimesel juhul saame, et $q = 3$ ja $r = 3$, mis ei rahulda eespool toodud tingimust, kuna $3 > 2$. Võttes ühe võrra suuremat arvu $q = 4$, saame

  $$r = 15 - 4 \cdot 4 = -1,$$

  mis rahuldab eeltoodud tingimust, kuna kehtib võrratus $-2 < -1 \leqslant 2$. Seega $15 = 4 \cdot 4 - 1$.

Märkus. Analoogiliselt saab tõestada, et mis tahes täisarvu b ja mis tahes positiivse täisarvu a korral leidub täpselt üks täisarv q ja täpselt üks täisarv r, et kehtiksid tingimused

$$b = aq + r \qquad \text{ja} \qquad 0 \leqslant r < a.$$

või

$$b = aq \pm r \qquad \text{ja} \qquad -\frac{1}{2}a < r \leqslant \frac{1}{2}a.$$

Järeldus 4. *Täisarv b jagub täisarvuga a parajasti siis, kui täisarvu b jagamisel täisarvuga a tekkiv jääk on võrdne* 0*-ga.*

Vaatleme nüüd ülesandeid, mille lahendamisel kasutatakse jäägiga jagamise definitsiooni ja reeglit.

Näide 5. Leiame kõik kuuekohalised arvud, mille kolm esimest numbrit on 123 ja mis jaguvad arvuga 456.

Kõigepealt vaatleme kõige väiksemat kuuekohalist arvu, mis algab numbritega 123, ja jagame (jäägiga) selle arvuga 456:

$$123000 = 456 \cdot 269 + 336.$$

Nüüd vaatleme kõige suuremat kuuekohalist arvu, mis algab numbritega 123, ja samuti jagame (jäägiga) selle arvuga 456:

$$123999 = 456 \cdot 271 + 423.$$

Et otsitav kuuekohaline arv jaguks arvuga 456, peab järelduse 4 põhjal tekkiv jääk olema võrdne 0-ga. See on võimalik ainult siis, kui mittetäielik jagatis on võrdne kas 270 või 271. Vastavatel juhtudel saame vastused

$$456 \cdot 270 = 123120 \qquad \text{ja} \qquad 456 \cdot 271 = 123576.$$

Näide 6. Olgu a kolmekohaline arv, mis ei sisalda numbrit 0 ega numbrit 9 ja mille esimene number ei ole 1. Arvule a lähedasteks nimetame kolmekohalisi arve, mis saadakse arvust a tema mingi ühe numbri vähendamisel või suurendamisel 1 võrra. Tõestame, et arv a või mõni temale lähedane arv jagub 7-ga.

Arvule a lähedased on parajasti arvud $a+1$, $a-1$, $a+10$, $a-10$, $a+100$, $a-100$. Eraldades kõikjal teistes liidetavates 7 kordsed, saame

$$\begin{aligned}
1 &= 0 \cdot 7 + 1,\\
-1 &= (-1) \cdot 7 + 6,\\
10 &= 1 \cdot 7 + 3,\\
-10 &= (-2) \cdot 7 + 4,\\
100 &= 14 \cdot 7 + 2,\\
-100 &= (-15) \cdot 7 + 5.
\end{aligned}$$

Näeme, et saadud kuus jääki on parajasti kõik 0-st erinevad jäägid, mis 7-ga jagamisel võib saada, st 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Lisades komplekti arvu a kujul $a+0$, lisandub ka jääk 0. Seega ka arvud a, $a+1$, $a-1$, $a+10$, $a-10$, $a+100$, $a-100$ annavad 7-ga jagades kõik võimalikud jäägid. Kuna üks neist jääkidest on 0, siis vastav arv jagubki 7-ga.

Näiteks, arvule 456 lähedane arv 455 jagub arvuga 7.

Ülesanne 7. Olgu a kolmekohaline arv, mis ei sisalda numbreid 0, 1, 8 ja 9 ning mille esimene number ei ole 2. Arvule a lähedasteks nimetame kolmekohalisi arve, mis saadakse arvust a tema mingi ühe numbri vähendamisel või suurendamisel 1 või 2 võrra. Tõestada, et arv a või mõni temale lähedane arv jagub arvuga 13.

Tõestus.

Arvule a kõik lähedased arvud on kujul:

Näitame, et arv a ja kõik tema lähedased arvud annavad 13-ga jagades kõik võimalikud jäägid 0 kuni 12:

Seega oleme tõestanud, et kas arv a või mõni temale lähedane arv jagub 13-ga.

Näide 8. Positiivse täisarvu a jagamisel arvudega 3, 6 ja 9 saadud jääkide summa on 15. Leiame arvu a jagamisel arvuga 18 tekkiva jäägi.

Teame, et definitsiooni põhjal võib positiivse täisarvuga n jagamisel tekkiv jääk olla ülimalt $n-1$. Seega arvudega 3, 6 ja 9 jagamisel on suurimad võimalikud jäägid vastavalt arvud 2, 5 ja 8. Kuna nende summa ongi 15, siis täisarvu a jagamisel arvudega 3, 6 ja 9 tekivadki jäägid 2, 5 ja 8, st kehtivad võrdused

$$a = 3q_1 + 2, \qquad a = 6q_2 + 5 \qquad \text{ja} \qquad a = 9q_3 + 8.$$

Vaatleme nüüd arvu $a+1$:

$$a + 1 = 3(q_1 + 1) = 6(q_2 + 1) = 9(q_3 + 1),$$

millest jaguvuse definitsiooni põhjal saame, et

$$3 \mid a + 1, \qquad 6 \mid a + 1 \qquad \text{ja} \qquad 9 \mid a + 1.$$

Saadud väidetest järeldub, et arv $a+1$ peab jaguma ühistegurita arvudega 2 ja 9. Seega kehtib seos $18 \mid a+1$, mis tähendab, et leidub selline täisarv q, et

$$a + 1 = 18q \qquad \text{ehk} \qquad a = 18q - 1 = 18(q-1) + 17.$$

Saadud võrdusest $a = 18(q-1) + 17$ järeldub, et arv 17 on arvu a jagamisel arvuga 18 tekkiv jääk.

Näide 9. Leiame kõik positiivsed täisarvud a, kui on teada, et arvu 123 jagamisel arvuga a tekib jääk 21.

Ülesande tingimuste kohaselt peavad kehtima seosed

$$123 = aq + 21 \qquad \text{ja} \qquad 21 < a.$$

Võrdusest $123 = aq + 21$ saame võrduse

$$aq = 102,$$

millest järeldub, et $a \mid 102$. Järelikult positiivne täisarv a peab olema arvu 102 tegur, mis on suurem arvust 21. Lahutame arvu 102 teguriteks

$$102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$$

ja saame, et ülesande vastusteks sobivad ainult arvud $2 \cdot 17 = 34$ ja $3 \cdot 17 = 51$ ning arv 102 ise:

$$123 = 34 \cdot 3 + 21, \qquad 123 = 51 \cdot 2 + 21, \qquad 123 = 102 \cdot 1 + 21.$$

Näide 10. Jagades positiivset täisarvu a nii arvuga 9 kui ka arvuga 8 tekib jääk 7. Leiame, millised jäägid võivad tekkida arvu a jagamisel arvuga 6.

Ülesande tingimustest järeldub, et leiduvad sellised mittenegatiivsed täisarvud q_1 ja q_2, et kehtivad võrdused

$$a = 9q_1 + 7 \qquad \text{ja} \qquad a = 8q_2 + 7.$$

Saadud võrdustes on paremad pooled võrdsed, st $9q_1 = 8q_2$. Nüüd ilmselt leidub mittenegatiivne täisarv k, et

$$q_1 = 8k \qquad \text{ja} \qquad q_2 = 9k.$$

Järelikult

$$a = 9q_1 + 7 = 72k + 7 = 6(12k + 1) + 1,$$

millest järeldub, et jagades täisarvu a arvuga 6 saame alati ainult jäägi 1.

Märkus. Saadud võrdusest $a = 6(12k + 1) + 1$ võime leida arvu a esimesed võimalikud väärtused. Kui arvu k väärtusteks panna arvud 0, 1 ja 2, siis vastavateks a väärtusteks osutuvad arvud 7, 79 ja 151.

Näide 11. Leiame kõik positiivsed täisarvud $a < 1234$, mis jagamisel arvuga 31 annavad jäägi 24 ning jagamisel arvuga 42 annavad jäägi 13.

Ülesande tingimustest järeldub, et leiduvad sellised positiivsed täisarvud q_1 ja q_2, et kehtivad võrdused

$$a = 31q_1 + 24 \qquad \text{ja} \qquad a = 42q_2 + 13.$$

Saadud võrdustest järeldub võrdus

$$31q_1 + 24 = 42q_2 + 13 \qquad \text{ehk} \qquad 31(q_1 - q_2) = 11(q_2 - 1).$$

Kuna arvud 31 ja 11 on ühistegurita, siis $31 \mid q_2 - 1$. Nüüd anname hinnanguid arvudele q_1 ja q_2:

$$q_1 = \frac{a - 24}{31} < \frac{1234 - 24}{31} < 40 \qquad \text{ja} \qquad q_2 = \frac{a - 13}{42} < \frac{1234 - 13}{42} < 30.$$

Kuna $q_2 < 30$, siis jaguvus $31 \mid q_2 - 1$ kehtib parajasti siis, kui $q_2 - 1 = 0$ ehk $q_2 = 1$. Järelikult

$$a = 42q_2 + 13 = 42 \cdot 1 + 13 = 55.$$

Kontrollime, et $a = 55$ rahuldab ülesande tingimusi:

$$55 = 31 \cdot 1 + 24 \qquad \text{ja} \qquad 55 = 42 \cdot 1 + 13.$$

Ülesanne 12. Positiivse täisarvu a jagamisel arvuga 5 tekib jääk 1 ning jagamisel arvuga 11 tekib jääk 10. Leida, millised jäägid võivad tekkida

a) arvu a jagamisel arvuga 55;

b) arvu a^2 jagamisel arvuga 55.

Lahendus:

Ülesande tingimustest järeldub, et leiduvad sellised positiivsed täisarvud q_1 ja q_2, et kehtivad võrdused

$$a = 5q_1 + 1 \qquad \text{ja} \qquad a = 11q_2 + 10.$$

a) Saadud võrdustes on paremad pooled võrdsed, st kehtib võrdus

Seda võrdust kasutades tõestame, et peaks kehtima võrdus $q_2 = 5k + 1$ mingi mittenegatiivse täisarvu k korral:

Nüüd saame arvutada, millise jäägi annab ülesande tingimusi rahuldav täisarv a jagamisel arvuga 55:

$b)$ Näitame, et saadud võrdustest järelduvad tingimused $5 \mid a - 1$ ja $11 \mid a + 1$:

Näitame, et siis kehtib ka tingimus $55 \mid a^2 - 1$:

Arvutame, millise jäägi annab ülesande tingimusi rahuldava täisarvu a ruut jagamisel arvuga 55:

Kokkuvõttes saame, et a jagamisel 55-ga annab alati jäägi 21 ning a^2 jagamisel 55-ga annab alati jäägi 1.

Paljudes ülesannetes on antud tingimused mõnede täisarvude jagamisel tekkinud mittetäieliku jagatise ja jäägi kohta. Nende lahendamisel tuleb tavaliselt lähtuda jäägiga jagamise üldisest reeglist.

Näide 13. Olgu a ja b positiivsed täisarvud ning q ja r vastavalt arvu b jagamisel arvuga a tekkinud mittetäielik jagatis ja jääk. Tõestame, et kui $q = r$, siis arv b jagub arvuga $a + 1$.

Ülesande tingimustele vastav võrdus

$$b = aq + r$$

teisendub juhul $q = r$ kujule

$$b = ar + r = (a + 1)r.$$

Järelikult (jaguvuse definitsiooni põhjal) peab arv b jaguma arvuga $a + 1$.

Näide 14. Positiivse täisarvu a jagamisel nii arvuga 15 kui ka arvuga 16 on mittetäielikud jagatised omavahel võrdsed ning arvuga 15 jagamisel tekkiv jääk on kaks korda suurem arvuga 16 jagamisel tekkivast jäägist. Leiame kõik sellised täisarvud a.

Olgu q ja r täisarvu a jagamisel arvuga 16 vastavalt saadud mittetäielik jagatis ja jääk. Ülesande tingimuste kohaselt kehtivad siis võrdused

$$a = 16q + r \qquad \text{ja} \qquad a = 15q + 2r,$$

kusjuures kehtivad ka võrratused $0 \leqslant r < 16$ ja $0 \leqslant 2r < 15$.

Saadud võrdustest järeldub seos

$$16q + r = 15q + 2r, \qquad \text{millest} \qquad q = r.$$

Seega saame seose

$$a = 16q + r = 16r + r = 17r.$$

Saadud võrratustest järeldub võrratus $0 \leqslant r \leqslant 7$, st jäägi r kõik võimalikud väärtused on 0 kuni 7. Juhul $r = 0$ saame, et ka $a = 0$, mis on vastuolus arvu a positiivsusega. Teistel juhtudel saame, et arvu a väärtused

$$17, \ 34, \ 51, \ 68, \ 85, \ 102 \ \text{ja} \ 119$$

on ainukesed, mis rahuldavad etteantud tingimusi.

Ülesanne 15. Positiivse täisarvu a jagamisel arvuga 12 on tekkiva mittetäieliku jagatise q_1 ja tekkiva jäägi r_1 summa võrdne arvu a jagamisel arvuga 21 tekkiva mittetäieliku jagatise q_2 ja tekkiva jäägi r_2 summaga. Leida kõik võimalikud täisarvude q_1 ja q_2 väärtused.

Lahendus: Vastavalt ülesande tingimustele kehtivad võrdused

$$a = 12q_1 + r_1, \qquad a = 21q_2 + r_2 \qquad \text{ja} \qquad q_1 + r_1 = q_2 + r_2,$$

kusjuures kehtivad ka võrratused $0 \leqslant r_1 < 12$ ja $0 \leqslant r_2 < 21$.

Näitame, et kehtib seos $11q_1 = 20q_2$:

Saadud seose ja võrduse $q_1 + r_1 = q_2 + r_2$ abil näitame, et $9 \mid r_2 - r_1$:

Kasutades eespool toodud jääkide r_1 ja r_2 hinnanguid, näitame, et kehtib võrratus $0 \leqslant r_2 - r_1 < 21$:

Seega on arvu $r_2 - r_1$ kõik võimalikud väärtused järgmised:

Uurime arvu $r_2 - r_1$ kõiki võimalikke väärtusi eraldi ja leiame kõik võimalikud täisarvude q_1 ja q_2 väärtused:

Kokkuvõttes saame, et paarile (q_1, q_2) vastab üks järgmistest paaridest $(0, 0)$, $(20, 11)$ või $(40, 22)$. Lõpuks näitame, et kõik paarid on võimalikud, st iga paari jaoks leiame vähemalt ühe sobiva arvu a väärtuse:

Järgmiste ülesannete lahendamisel kasutame *jääkide läbivaatlemise* meetodit. Selle meetodi idee seisneb selles, et mis tahes täisarvu saab esitada täpselt ühel järgmistest kujudest:

$$2k \ \text{(paarisarvude korral)} \qquad \text{või} \qquad 2k+1 \ \text{(paaritute arvude korral)},$$

(kus k on mingi täisarv) kuna jagamisel arvuga 2 annab mis tahes täisarv kas jäägi 0 või 1. Mis tahes täisarvu saab esitada ka ühel järgmistest kujudest:

$$3k, \qquad 3k+1 \qquad \text{või} \qquad 3k+2,$$

(kus k on mingi täisarv) kuna 3-ga jagamisel annab mis tahes täisarv kas jäägi 0, 1 või 2. Oleme eelnevalt näidanud, et mis tahes täisarvu saab esitada näiteks ka kas kujul $3k$ või $3k \pm 1$.

Näide 16. Esimeses vihikus oleme teisendamismeetodi abil tõestanud, et iga täisarvu a korral arv $a(a^2+5)$ jagub arvuga 6. Nüüd viime tõestuse läbi jääkide läbivaatlemise meetodi abil.

Kõigepealt tõestame, et arv $a(a^2+5)$ jagub 2-ga. Arv a annab jagamisel 2-ga kas jäägi 0 või 1. Vastavalt sellele esitub see kas kujul $2k$ või $2k+1$.

- Juhul kui $a=2k$, siis $a(a^2+5)=2k(a^2+5)$, mis ilmselt jagub 2-ga.
- Juhul kui $a=2k+1$, siis

  $$a(a^2+5)=a((2k+1)^2+5)=a(4k^2+4k+6)=2a(2k^2+2k+3),$$

  mis samuti jagub 2-ga.

Järelikult mis tahes täisarvu a korral arv $a(a^2+5)$ jagub arvuga 2.

Nüüd tõestame, et arv $a(a^2+5)$ jagub ka 3-ga. Mis tahes täisarv a annab jagamisel 3-ga kas jäägi 0, 1 või 2. Vastavalt sellele esitub see kas kujul $3k$ või kujul $3k\pm1$.

- Juhul $a=3k$ saame, et $a(a^2+5)=3k(a^2+5)$ jagub 3-ga.
- Juhul $a=3k\pm1$ saame, et

  $$a(a^2+5)=a((3k\pm1)^2+5)=a(9k^2\pm6k+6)=3a(3k^2\pm2k+2)$$

  samuti jagub 3-ga.

Kokkuvõttes saame, et $a(a^2+5)$ jagub nii 2-ga kui ka 3-ga, st jagub 6-ga mis tahes täisarvu a korral.

Näide 17. Tõestame, et mis tahes positiivse täisarvu a korral arv

$$a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6$$

jagub arvuga 6.

Olgu $A=a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}A &= a(1+a^3)+a^2(1+a^3)+a^3(1+a^3)=\\ &= (1+a^3)(a+a^2+a^3)=\\ &= (1+a)(1-a+a^2)a(1+a+a^2)=\\ &= a(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1).\end{aligned}$$

Tõestamiseks piisab näidata, et mis tahes positiivse täisarvu a korral arv A jagub 2-ga ja 3-ga.

Et arvu A tegurid a ja $a+1$ on järjestikused täisarvud, siis täpselt üks neist jagub 2-ga ning seega arv A jagub 2-ga.
Arvuga 3 jaguvuse näitamiseks kasutame jääkide läbivaatlemise meetodit.

- Kui arv a annab 3-ga jagamisel jäägi 0, st $a = 3k$ mingi täisarvu k korral, siis arvu A üks teguritest $a = 3k$ jagub 3-ga.
- Kui a annab 3-ga jagamisel jäägi 2, st $a = 3k + 2$ mingi täisarvu k korral, siis arvu A tegur $a + 1 = 3k + 2 + 1 = 3(k + 1)$ jagub 3-ga.
- Kui a annab 3-ga jagamisel jäägi 1 ehk $a = 3k + 1$ mingi täisarvu k korral, siis arvu A tegur $a^2 + a + 1$ jagub 3-ga, sest

$$\begin{aligned} a^2 + a + 1 &= (3k+1)^2 + (3k+1) + 1 = 9k^2 + 6k + 1 + 3k + 1 + 1 = \\ &= 9k^2 + 9k + 3 = 3(3k^2 + 3k + 1). \end{aligned}$$

Järelikult arv A jagub mis tahes positiivse täisarvu a korral nii 2-ga kui ka 3-ga, st jagub 6-ga.

Näide 18. Leiame kõik positiivsed täisarvud a, mille korral arv $a^8 - a^2$ jagub arvuga 72.
Lahutame arvu $A = a^8 - a^2$ teguriteks:

$$\begin{aligned} A = a^8 - a^2 &= a^2(a^6 - 1) = a^2(a^3 - 1)(a^3 + 1) = \\ &= a^2(a-1)(a+1)(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1). \end{aligned}$$

Et $72 = 8 \cdot 9$ ning arvud 8 ja 9 on ühistegurita, piisab uurida, millal arv A jagub arvudega 8 ja 9.
Näitame kõigepealt, et arv A jagub alati arvuga 9. Vaatleme kolme juhtu (sõltuvalt sellest, millise jäägi annab arv a jagamisel 3-ga):

- kui $a = 3k$, siis arvu A tegur $a^2 = (3k)^2 = 9k^2$ jagub 9-ga;
- kui $a = 3k + 1$, siis arvu A kaks tegurit
  $a - 1 = 3k$ ja $a^2 + a + 1 = 3(3k^2 + 3k + 1)$ jaguvad 3-ga;
- kui $a = 3k + 2$, siis arvu A kaks tegurit
  $a + 1 = 3(k + 1)$ ja $a^2 - a + 1 = 3(3k^2 + 3k + 1)$ jaguvad 3-ga.

Seega igal juhul arv $A = a^8 - a^2$ jagub arvuga 9.

Uurime nüüd arvu A jaguvust arvuga 8. Vaatleme kahte juhtu (sõltuvalt sellest, kas a on paaris või paaritu arv):

- kui $a = 2k$, siis arvu A ainus paarisarvuline tegur on

  $$a^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

  mis jagub arvuga 8 siis, kui k on paarisarv, st kui arv a jagub 4-ga;

- kui $a = 2k + 1$, siis arvu A tegurite $a - 1$ ja $a + 1$ korrutis

  $$(a - 1)(a + 1) = 4k(k + 1)$$

  jagub arvuga 8, sest korrutis $k(k + 1)$ jagub alati 2-ga.

Seega vastuseks saame, et arv $A = a^8 - a^2$ jagub arvuga 72 siis ja ainult siis, kui a on kas paaritu arv või paarisarv, mis jagub 4-ga. Teisisõnu, arv A ei jagu 72-ga, kui a on paarisarv, mis ei jagu 4-ga.
Näiteks $a = 4$ ja $a = 5$ korral arv $a^8 - a^2$ jagub 72-ga:

$$4^8 - 4^2 = 65520 = 72 \cdot 910, \qquad 5^8 - 5^2 = 390600 = 72 \cdot 5425.$$

Aga $a = 6$ korral arv $6^8 - 6^2$ arvuga 72 ei jagu.

Näide 19. Olgu a täisarv. Tõestame, et kui arv $a^2 - a$ ei jagu arvuga 6, siis arv $a^2 - a - 2$ jagub arvuga 18.
Arv $a^2 - a = a(a - 1)$ kui kahe erineva paarsusega täisarvu korrutis on alati paarisarv, st jagub arvuga 2.
Kui a või $a - 1$ jagub 3-ga, siis ilmselt $a(a - 1)$ jagub 3-ga ning järelikult ka 6-ga. Seega sobivad ülesande tingimustega ainult sellised täisarvud a, mis annavad 3-ga jagamisel jäägi 2.
Olgu nüüd $a = 3k + 2$ mingi täisarvu k korral. Siis

$$\begin{aligned} a^2 - a - 2 &= (3k + 2)^2 - (3k + 2) - 2 = \\ &= (9k^2 + 12k + 4) - (3k + 2) - 2 = \\ &= 9(k^2 + k) = 9k(k + 1) \end{aligned}$$

jagub 18-ga, sest arv $k(k + 1)$ jagub 2-ga.

Ülesanne 20. Tõestada, et mis tahes positiivsete täisarvude a ja b korral arv

$$ab(a^4 - b^4)$$

jagub arvuga 30.

Tõestus. Kõigepealt lahutame arvu $ab(a^4 - b^4)$ teguriteks:

Et $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ning arvud 2, 3 ja 5 on ühistegurita, piisab eraldi uurida arvu $ab(a^4 - b^4)$ jaguvust arvudega 2, 3 ja 5.

Näitame, et arv $ab(a^4 - b^4)$ jagub alati arvuga 2:

Näitame, et arv $ab(a^4 - b^4)$ jagub alati arvuga 3:

Näitame, et arv $ab(a^4 - b^4)$ jagub alati arvuga 5:

Seega mis tahes positiivsete täisarvude a ja b korral arv $ab(a^4 - b^4)$ jagub alati arvuga 30.

Mõnede jaguvusülesannete lahendamisel tekib vajadus vaadelda antud täisarvude või avaldiste paarsust. Teame, et kõik paarisarvud on mingi täisarvu k korral esitatavad kujul $2k$ ning kõik paaritud arvud kujul $2k + 1$. Lisaks sellele on mõnede ülesannete puhul tarvis vaadelda, millise jäägi annab mingi paaris- või paaritu arv jagamisel kahest suurema paarisarvuga, näiteks 4-ga. On lihtne näha, et sellisel korral kõik paarisarvud on esitatavad kas kujul $4k$ või kujul $4k + 2$ ning kõik paaritud arvud kas kujul $4k + 1$ või kujul $4k + 3$.

Näide 21. Leiame kõik sellised positiivsed täisarvud a, mille korral on kõikide täisarvude 1 kuni a summa paaritu.

Paneme tähele, et täisarvude summa on paaritu parajasti siis, kui selles on paaritu arv paarituid liidetavaid. Vaatleme eraldi kahte juhtumit sõltuvalt sellest, kas arv a on paaris või paaritu.

Kui a on paarisarv, siis see on esitatav kujul $a = 2k$. Sel juhul vaadeldavas summas on täpselt k paaritut liidetavat. Kuna arv k peab olema paaritu, siis see on kujul $k = 2l + 1$. Nüüd saame, et

$$a = 2k = 2(2l + 1) = 4l + 2.$$

See tähendab, et selleks, et kõikide täisarvude 1 kuni a summa oleks paaritu, peab paarisarv a olema kujul $4l + 2$ mingi täisarvu l korral.

Analoogiliselt eelmisega, kui a on paaritu arv, siis see on kujul $a = 2k + 1$. On selge, et summas on täpselt $k + 1$ paaritut liidetavat ning arv $k + 1$ peab olema paaritu, st $k + 1 = 2l + 1$ ehk $k = 2l$. Nüüd saame, et

$$a = 2k + 1 = 4l + 1.$$

Järelikult, et summa oleks paaritu, peab paaritu arv a olema kujul $4l + 1$ mingi täisarvu l korral.

Kokkuvõttes saame, et juhul kui arv a on kas kujul $4l + 1$ või kujul $4l + 2$, siis kõikide täisarvude 1 kuni a summa on paaritu.

Näide 22. Leiame kõik jäägid, mida saab anda 4-ga mittejaguva paarisarvu ruut jagamisel 32-ga.

Iga paarisarv a, mis ei jagu 4-ga, annab 4-ga jagamisel jäägi 2, st esitub kujul $4k + 2$ mingi täisarvu k korral. Siis

$$a^2 = (4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 16k(k + 1) + 4.$$

Et arvudest k ja $k + 1$ on üks paaris, siis $k(k + 1)$ jagub 2-ga ning $16k(k + 1)$ jagub arvuga $16 \cdot 2 = 32$. Seega arv a^2 annab 32-ga jagamisel jäägi 4.

Näide 23. Tõestame, et kui a ja b on positiivsed täisarvud ning arv $ab + 1$ jagub arvuga 8, siis arv $a + b$ jagub samuti arvuga 8.

Et kehtib võrdus

$$(a + 1)(b + 1) = (ab + 1) + (a + b),$$

siis piisab tõestada, et kui arv $ab + 1$ jagub 8-ga, siis jagub ka arv $(a + 1)(b + 1)$ arvuga 8.

Paneme tähele, et kui arv $ab + 1$ jagub 8-ga, siis on korrutis ab paaritu, st arvud a ja b on mõlemad paaritud. Mis tahes paaritu arv annab 4-ga jagamisel kas jäägi 1 või 3. Näitame, et vähemalt üks arvudest a ja b annab 4-ga jagades jäägi 3. Oletame vastuväiteliselt, et mõlemad arvud annavad jagades 4-ga jäägi 1. Siis arvud a ja b on mingite täisarvude k_1 ja k_2 korral kujul

$$a = 4k_1 + 1 \qquad \text{ja} \qquad b = 4k_2 + 1.$$

Sellisel juhul arv

$$ab + 1 = (4k_1 + 1)(4k_2 + 1) + 1 = 4(4k_1k_2 + k_1 + k_2) + 2$$

ei jagu neljaga, mis on vastuolus tingimusega $8 \mid ab + 1$. Järelikult vähemalt üks arvudest a ja b annab neljaga jagades jäägi 3.

Nüüd vaatleme korrutist $(a + 1)(b + 1)$. Kuna mõlemad arvud a ja b on paaritud, siis korrutise mõlemad tegurid $a + 1$ ja $b + 1$ on paarisarvud. Lisaks sellele vähemalt üks teguritest jagub 4-ga, sest vähemalt üks arvudest a ja b annab jagades 4-ga jäägi 3. Kokkuvõttes saame, et korrutis $(a + 1)(b + 1)$ jagub 8-ga.

Näide 24. Olgu a selline positiivne täisarv, et arvud $2a + 1$ ja $3a + 1$ on mingite täisarvude ruudud. Tõestame, et sellisel juhul peab arv a jaguma arvuga 8.

Ülesande tingimuste kohaselt leiduvad sellised täisarvud m ja n (üldisust kitsendamata eeldame, et need on positiivsed), et

$$2a + 1 = m^2 \qquad \text{ja} \qquad 3a + 1 = n^2.$$

Siis ilmselt m on ühest suurem paaritu arv. Seega leidub positiivne täisarv m_1 nii, et $m = 2m_1 + 1$. Siis

$$2a = m^2 - 1 = (2m_1 + 1)^2 - 1 = 4{m_1}^2 + 4m_1 = 4m_1(m_1 + 1),$$

millest saame, et $a = 2m_1(m_1 + 1)$. Saadud võrdust kasutades saame, et

$$n^2 = 3a + 1 = 6m_1(m_1 + 1) + 1.$$

Järelikult n on samuti ühest suurem paaritu arv, st leidub positiivne täisarv n_1 nii, et $n = 2n_1 + 1$. Nüüd saame, et kehtib võrdus

$$3a = n^2 - 1 = (2n_1 + 1)^2 - 1 = 4{n_1}^2 + 4n_1 = 4n_1(n_1 + 1).$$

Kuna $2 \mid n_1(n_1 + 1)$, siis $8 \mid 4n_1(n_1 + 1)$. Et arvud 3 ja 8 on ühistegurita, siis kehtib väide $8 \mid a$.

Ülesanne 25. Olgu a positiivne täisarv, mille korral $17a + 1$ on mingi paaritu arvu ruut.

a) Tõestada, et arv a jagub arvuga 8.

b) Leida arvu a vähim võimalik väärtus.

Tõestus. Olgu k selline positiivne täisarv, mille korral kehtib ülesande tingimust rahuldav võrdus

$$17a + 1 = (2k + 1)^2.$$

Teisendame saadud võrdust nii, et võrduse mõlemad pooled oleksid tegurdatud kujul:

Saadud võrduse põhjal tõestame, et $8 \mid a$:

Leiame arvu k vähima võimaliku väärtuse, mille korral kehtib võrdusest järeldatav tingimus $17 \mid k(k + 1)$:

Leiame nüüd arvu a vähima võimaliku väärtuse:

Kontrollime, et leitud a väärtuse korral on $17a + 1$ mingi paaritu täisarvu ruut:

Vaatleme nüüd algarvudega ülesandeid, mida saab lahendada jäägiga jagamise reegli ja jääkide läbivaatlemise meetodi abil.

Paneme tähele, et

- mis tahes algarv $p > 2$ annab jagades 2-ga ainult jäägi 1, st see on kujul $2k + 1$;
- mis tahes algarv $p > 3$ annab jagades 3-ga kas jäägi 1 või 2, st see on kas kujul $3k + 1$ või $3k + 2$;
- mis tahes algarv $p > 2$ annab jagades 4-ga kas jäägi 1 või 3, st see on kas kujul $4k + 1$ või $4k + 3$.

Näide 26. Tõestame, et mis tahes algarvu $p > 3$ ruut annab arvuga 12 jagamisel jäägi 1.

Vaatleme eraldi arve, mis annavad erinevad jäägid arvuga 6 jagamisel. Need arvud on kujul $6k$, $6k \pm 1$, $6k \pm 2$ või $6k + 3$.

- Kui $p = 6k$, siis $6 \mid p$ ja p on ilmselt kordarv.
- Kui $p = 6k \pm 1$, siis
$$(6k \pm 1)^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12(3k^2 \pm k) + 1,$$
millest saame, et algarvu $p = 6k \pm 1$ ruut annab jäägi 1 arvuga 12 jagamisel.
- Kui $p = 6k \pm 2 = 2(3k \pm 1)$, siis $2 \mid p$ ja $p > 3$ on kordarv.
- Kui $p = 6k + 3 = 3(2k + 1)$, siis $3 \mid p$ ja $p > 3$ on kordarv.

Järelikult algarv $p > 3$ võib olla vaid kujul $p = 6k \pm 1$ ja selle ruut annab jäägi 1 arvuga 12 jagamisel.

Näide 27. Leiame kõik võimalikud jäägid, mis võivad tekkida algarvu $p > 3$ ruudu jagamisel arvuga 24.

Jagame (jäägiga) algarvu p arvuga 24:

$$p = 24q + r, \qquad \text{kus} \qquad 0 \leqslant r < 24.$$

Ilmselt arvud 2 ja 3 ei jaga kolmest suuremat algarvu p. Seega on jäägi r võimalikud väärtused ainult arvud 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ja 23. Kõik sellised arvud on esitatavad ühel järgmistest kujudest

$$p = 24k \pm 1, \quad p = 24k \pm 5, \quad p = 24k \pm 7 \quad \text{või} \quad p = 24k \pm 11.$$

Olgu $i = 1, 5, 7, 11$. Siis saame, et

$$p^2 = (24k \pm i)^2 = 24 \cdot (24k^2 \pm 2i) + i^2.$$

Kuna

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1, \\ 5^2 &= 25 = 24 + 1, \\ 7^2 &= 49 = 24 \cdot 2 + 1, \\ 11^2 &= 121 = 24 \cdot 5 + 1, \end{aligned}$$

siis igal juhul algarvu $p > 3$ ruut annab jagamisel arvuga 24 jäägi 1.

Näide 28. Leiame kõik sellised algarvud p, et arvud $p + 10$ ja $p + 14$ oleksid ka algarvud.
Vaatleme etteantud arvude jaguvust arvuga 3.

- Kui $3 \mid p$, siis p on algarv parajasti siis, kui $p = 3$. Siis on ka arvud

  $$p + 10 = 13 \qquad \text{ja} \qquad p + 14 = 17$$

  algarvud.

- Kui $3 \nmid p$, siis annab arv p jagamisel arvuga 3 kas jäägi 1 või 2. Vastavalt sellele on see mingi täisarvu k korral esitatav kas kujul

  $$p = 3k + 1 \qquad \text{või} \qquad p = 3k + 2.$$

  – Juhul kui $p = 3k + 1$ saame, et

    $$p + 14 = 3k + 1 + 14 = 3k + 15 = 3(k + 5),$$

    mis on kordarv, kuna $3 \mid p + 14$ ja $p + 14 > 3$.

  – Juhul kui $p = 3k + 2$ saame, et

    $$p + 10 = 3k + 2 + 10 = 3k + 12 = 3(k + 4),$$

    mis on samuti kordarv, kuna $3 \mid p + 10$ ja $p + 10 > 3$.

Järelikult $p = 3$ on ainuke algarv, mis rahuldab ülesande tingimust.

Näide 29. Teeme kindlaks, kas leidub selline algarv p, et arvud

a) $p-6$ ja $p+6$;

b) $p-16$ ja $p+16$

oleksid samuti algarvud?
a) Kuna $p-6 \geqslant 2$, siis $p \geqslant 8$. Kõige väiksemaks algarvuks, mis rahuldab võrratust, on algarv 11. Kuna mõlemad arvud

$$p-6 = 11-6 = 5 \qquad \text{ja} \qquad p+6 = 11+6 = 17$$

on algarvud, siis olemegi leidnud sobiva algarvu $p = 11$.
b) Tõestame, et sellist algarvu p ei leidu. Kuna

$$p-16 = (p-18)+2 \qquad \text{ja} \qquad p+16 = (p+15)+1,$$

siis algarvud $p-16$, p ja $p+16$ annavad arvuga 3 jagamisel erinevad jäägid. Sellest järeldub, et täpselt üks neist peab jaguma 3-ga. See omakorda tähendab, et väikseim neist peab võrduma 3-ga. Kui $p-16 = 3$, siis $p = 19$ ja $p+16 = 35$, mis on kordarv.

Näide 30. Leiame kõik algarvud p, mis on esitatavad nii mõne kahe algarvu summana, kui ka mõne kahe algarvu vahena.
Olgu p_1, p_2, p_3 ja p_4 sellised algarvud, et

$$p = p_1 + p_2 \qquad \text{ja} \qquad p = p_3 - p_4.$$

Kuna ilmselt $p = p_1 + p_2 > 2$, siis p on paaritu. Seega peab täpselt üks arvudest p_1 ja p_2 ning täpselt üks arvudest p_3 ja p_4 olema paarisarv. Kuna on ainuke paarisarvuline algarv 2, siis

$$p = p_1 + 2 \qquad \text{ja} \qquad p = p_3 - 2.$$

Nüüd saame, et p, $p_1 = p-2$ ja $p_3 = p+2$ on algarvud. Kuna

$$p-2 = (p-3)+1,$$

siis need arvud annavad erinevad jäägid arvuga 3 jagamisel. Seega üks neist peab 3-ga jaguma, st kõige väiksem neist peab olema 3-ga võrdne. Järelikult $p-2 = 3$. Siis $p = 5$ ja $p+2 = 7$. Kuna arvud 3, 5 ja 7 on kõik algarvud, siis arv $p = 5$ rahuldab ülesande tingimusi:

$$5 = 3+2 \qquad \text{ja} \qquad 5 = 7-2.$$

Ülesanne 31. Kas leidub selline algarv p, et mõlemad arvud $p^3 + 20$ ja $p^3 + 22$ on samuti algarvud?

Tõestus. Olgu p mis tahes algarv.

Kõigepealt oletame, et p ei jagu 7-ga. Siis mis tahes algarv p on esitatav ühel järgmistest kujudest:

Nüüd leiame, millise jäägi võib anda p^3 arvuga 7 jagamisel. Selleks vaatleme arvu p erinevaid kujusid:

Arv 20 annab 7-ga jagades jäägi 6 ja arv 22 jäägi 1. Nüüd tõestame, et üks arvudest $p^3 + 20$ ja $p^3 + 22$ jagub igal juhul 7-ga:

Tõestame, et kui p ei jagu 7-ga, siis üks arvudest $p^3 + 20$ ja $p^3 + 22$ on igal juhul kordarv:

Lõpuks vaatleme juhtu kui p jagub 7-ga ja näitame, et vähemalt üks arvudest $p^3 + 20$ ja $p^3 + 22$ pole algarv.

Näide 32. Tõestame, et kui $p > 3$ ja $2p + 1$ on algarvud, siis $4p + 1$ on kindlasti kordarv.

Kuna p on kolmest suurem algarv, siis $3 \nmid p$, st algarv p on esitatav kujul $p = 3k \pm 1$. Siis teine algarv $2p + 1$ teisendub kujule

$$2p + 1 = 6k \pm 2 + 1.$$

Nüüd sõltuvalt märgist vaatleme kahte võimalust.

- Kui $2p + 1 = 6k + 2 + 1 = 3(2k + 1)$, siis $2p + 1$ on kordarv, kuna $2p + 1 > 3$ ja $3 \mid 2p + 1$. See on vastuolus ülesandes toodud tingimusega.
- Kui $2p + 1 = 6k - 2 + 1 = 6k - 1$, siis

  $$2p = 6k - 2 = 2(3k - 1), \quad \text{millest} \quad p = 3k - 1.$$

  Järelikult sel juhul on

  $$4p + 1 = 4(3k - 1) + 1 = 12k - 3 = 3(4k - 1)$$

  kordarv, sest $4p + 1 > 3$ ja $3 \mid 4p + 1$.

Seega ülesandes antud tingimustel on $4p + 1$ alati kordarv.