Tartu Ülikooli Teaduskool

Arvuteooria

3. Jäägiga jagamine II

Koostanud Maksim Ivanov, TÜ Teaduskool
Retsenseerinud Elts Abel, Tartu Ülikool

Käesolevas vihikus vaatleme kõigepealt jääkide omadusi, millede alusel saame hiljem ülesannete lahendamisel rakendada jääkide tabeleid. Seejärel tutvume ruutjääkide meetodiga ning uurime, kuidas saab kasutada arvuteooria ülesannetes Dirichlet printsiipi.

Jääkide omadused

Selles osas piirdume vaid mõnede tähtsamate omadustega. Teisi omadusi vaatleme siis, kui toome sisse kongruentsi mõiste.

Lause 1. *Kui täisarvude $a > 0$, b, q ja r korral kehtib võrdus*

$$b = aq + r,$$

siis arvud b ja r annavad täpselt sama jäägi arvuga a jagamisel.

Tõestus. Olgu r_1 täisarvu b jagamisel positiivse täisarvuga a tekkiv jääk. Siis jäägiga jagamise reegli põhjal kehtivad mingi täisarvu q_1 korral tingimused

$$b = aq_1 + r_1 \qquad \text{ja} \qquad 0 \leqslant r_1 < a.$$

Nüüd saame võrdusest $b = aq + r$ avaldada arvu r järgmiselt

$$r = b - aq = (aq_1 + r_1) - aq = a(q_1 - q) + r_1.$$

Kuna kehtib võrratus $0 \leqslant r_1 < a$, siis arv r_1 on ka täisarvu r jagamisel a-ga tekkiv jääk. $\square$

Märkus. Mõnikord öeldakse, et arvud b ja r on *jäägivõrdsed* jagamisel arvuga a.

Näide 2. Leiame, millise jäägi annab arv 1234 arvuga 11 jagamisel.

Kõigepealt on lihtne näha, et kehtivad järgmised võrdused

$$\begin{aligned} 1234 &= 11 \cdot 100 + 134, \\ 134 &= 11 \cdot 10 + 24, \\ 24 &= 11 \cdot 2 + 2. \end{aligned}$$

Lause 1 põhjal annavad arvud 1234, 134, 24 ja 2 sama jäägi 2 arvuga 11 jagamisel. Teisisõnu, neid võrdusi kasutades saame võrduse

$$\begin{aligned} 1234 &= 11 \cdot 100 + 134 = 11 \cdot 100 + 11 \cdot 10 + 24 = \\ &= 11 \cdot 100 + 11 \cdot 10 + 11 \cdot 2 + 2 = \\ &= 11(100 + 10 + 2) + 2 = 11 \cdot 112 + 2. \end{aligned}$$

Võrdusest $1234 = 11 \cdot 112 + 2$ saamegi, et arvu 1234 jagamisel arvuga 11 tekib jääk 2.

Näide 3. Leiame, millise jäägi annab jagades arvuga 11 arv $123123\dots123$, milles on täpselt 123 numbrit.

Paneme tähele, et $123123 = 11 \cdot 11193$. Seega kehtib võrdus

$$\begin{aligned}\underbrace{123123\dots123}_{123 \text{ numbrit}} &= 123123 \cdot 10^{117} + \underbrace{123123\dots123}_{117 \text{ numbrit}} = \\ &= 11 \cdot 11193 \cdot 10^{117} + \underbrace{123123\dots123}_{117 \text{ numbrit}}.\end{aligned}$$

Lause 1 ütleb, et arvud $\underbrace{123123\dots123}_{123 \text{ numbrit}}$ ja $\underbrace{123123\dots123}_{117 \text{ numbrit}}$ annavad jagades 11-ga täpselt sama jäägi. Analoogiliselt jätkates saame, et kehtivad võrdused

$$\begin{aligned}\underbrace{123123\dots123}_{117 \text{ numbrit}} &= 11 \cdot 11193 \cdot 10^{111} + \underbrace{123123\dots123}_{111 \text{ numbrit}}, \\ &\dots \\ \underbrace{123123\dots123}_{15 \text{ numbrit}} &= 11 \cdot 11193 \cdot 10^{9} + 123123123, \\ 123123123 &= 11 \cdot 11193 \cdot 10^{3} + 123.\end{aligned}$$

Järelikult arvud $\underbrace{123123\dots123}_{123 \text{ numbrit}}$ ja 123 annavad jagamisel 11-ga ühe ja sama jäägi, mis võrduse $123 = 11 \cdot 11 + 2$ põhjal võrdub arvuga 2.

Lause 4. *Olgu r_1 ja r_2 vastavalt täisarvude b_1 ja b_2 jagamisel positiivse täisarvuga a tekkivad jäägid. Siis kehtivad järgmised omadused:*

a) arvud $b_1 + b_2$ ja $r_1 + r_2$ annavad täpselt sama jäägi arvuga a jagamisel (ehk need on jäägivõrdsed jagamisel arvuga a);

b) arvud $b_1 \cdot b_2$ ja $r_1 \cdot r_2$ annavad täpselt sama jäägi arvuga a jagamisel.

Tõestus. Lause väidete tõestamiseks lähtume definitsioonis toodud tingimustest. Ülesande tingimus, et r_1 ja r_2 on vastavalt täisarvude b_1 ja b_2 jagamisel positiivse täisarvuga a tekkivad jäägid, tähendab, et leiduvad täisarvud q_1 ja q_2 nii, et kehtivad võrdused

$$b_1 = aq_1 + r_1 \qquad \text{ja} \qquad b_2 = aq_2 + r_2.$$

a) Vaatleme summat $b_1 + b_2$:

$$b_1 + b_2 = (aq_1 + r_1) + (aq_2 + r_2) = a(q_1 + q_2) + r_1 + r_2.$$

Lause 1 põhjal arvud $b_1 + b_2$ ja $r_1 + r_2$ annavad sama jäägi arvuga a jagamisel.

b) Vaatleme nüüd korrutist b_1b_2:

$$b_1b_2 = (aq_1 + r_1) \cdot (aq_2 + r_2) = a(aq_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1) + r_1r_2.$$

Jällegi saame, et lause 1 põhjal arvud b_1b_2 ja r_1r_2 annavad sama jäägi arvuga a jagamisel. □

Ülesanne 5. Olgu r_1, r_2 ja r_3 vastavalt täisarvude b_1, b_2 ja b_3 jagamisel positiivse täisarvuga a tekkivad jäägid. Tõestada, et arvud

$$b_1 + b_2 \cdot b_3 \qquad \text{ja} \qquad r_1 + r_2 \cdot r_3$$

on jäägivõrdsed arvuga a jagamisel.

Ülesande tingimustel peavad mingite täisarvude q_1, q_2 ja q_3 korral kehtima järgmised võrdused:

Tõestame, et leidub selline täisarv q, mille korral kehtib võrdus
$b_1 + b_2 \cdot b_3 = aq + (r_1 + r_2 \cdot r_3)$

Järelikult lause 1 põhjal arvud $b_1 + b_2 \cdot b_3$ ja $r_1 + r_2 \cdot r_3$ annavad ühe ja sama jäägi arvuga a jagamisel.

Näide 6. Lausete 1 ja 4 põhjal arvutame, millise jäägi annab arv $321 + 456 \cdot 87$ jagamisel arvuga 11. Kuna kehtib seos

$$\begin{aligned} 321 + 456 \cdot 87 &= (330 - 9) + (440 + 16) \cdot (88 - 1) = \\ &= (330 - 11 + 2) + (440 + 11 + 5) \cdot (88 - 11 + 10), \end{aligned}$$

siis arv $321 + 456 \cdot 87$ annab jagamisel arvuga 11 täpselt sama jäägi, millise annab arv

$$2 + 5 \cdot 10 = 52.$$

Arv 52 on esitatav kujul $11 \cdot 4 + 8$, seega arv $321 + 456 \cdot 87$ annab jagamisel arvuga 11 jäägi 8.

Arvuteooria ülesannete lahendamisel osutub kasulikuks teadmine, millise jäägi võib anda mingi täisarvu ruut või kõrgem aste fikseeritud positiivse täisarvuga jagamisel. Üheks võimaluseks on kasutada *jääkide tabelit*, mis põhineb järgmisel lause 4 osa b) järeldusel.

Järeldus 7. *Olgu n positiivne täisarv. Kui r on täisarvu b positiivse täisarvuga a jagamisel tekkiv jääk, siis arvud b^n ja r^n annavad täpselt sama jäägi arvuga a jagamisel.*

Näide 8. Uurime, millise jäägi võib anda mis tahes positiivse täisarvu a ruut, kuup ja neljas aste jagamisel arvuga 3.

- Tabeli esimesse ritta kirjutame kõik võimalikud jäägid, mis võivad tekkida 3-ga jagamisel, st arvud 0, 1 ja 2.

- Et kindlaks teha, millise jäägi võib anda mis tahes positiivse täisarvu a ruut jagamisel 3-ga, piisab järelduse 7 põhjal arvutada, millised jäägid 3-ga jagamisel annavad arvud $0^2 = 0$, $1^2 = 1$ ja $2^2 = 4$. Vastavateks jääkideks on arvud 0, 1 ja 1. Järelikult mis tahes täisarvu ruut võib anda jagamisel 3-ga kas jäägi 0 või 1.

- Kuna kehtivad võrdused

$$0^3 = 0, \quad 1^3 = 1 \quad \text{ja} \quad 2^3 = 8 = 3 \cdot 2 + 2$$

ning

$$0^4 = 0, \quad 1^4 = 1 \quad \text{ja} \quad 2^4 = 16 = 3 \cdot 5 + 1,$$

siis mis tahes positiivse täisarvu kuup võib anda jagamisel 3-ga ühe jääkidest 0, 1 ja 2 ning mis tahes täisarvu neljas aste võib anda jagamisel 3-ga kas jäägi 0 või 1.

- Vastavalt tehtud arvutustele saab moodustada järgmise jääkide tabeli.

a	0	1	2
a^2	0	1	1
a^3	0	1	2
a^4	0	1	1

- Saadud tabeli abil saab näiteks tõestada, et mis tahes täisarvu a korral arvud $a^3 - a$ ja $a^4 - a^2$ jaguvad alati 3-ga, sest vastavate jääkide vahed on kõik võrdsed 0-ga. Selle abil saab ka näidata, et mis tahes täisarvu a korral näiteks arvud $1 + a^2$ ja $1 + a^4$ ei jagu 3-ga, sest mõlemad arvud a^2 ja a^4 annavad 3-ga jagamisel kas jäägi 0 või 1 ning järelikult arvud $1 + a^2$ ja $1 + a^4$ annavad 3-ga jagamisel kas jäägi 1 või 2, st $3 \nmid 1 + a^2$ ja $3 \nmid 1 + a^4$ mis tahes täisarvu a korral.

Näide 9. Tõestame, et mis tahes täisarvu a korral arv

$$A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$$

ei jagu arvuga 3.

Kasutades 3-ga jagamisel saadud jääkide tabelit on lihtne näha, et jäägid on üheselt määratud vastavalt arvu a paarsusele, st mis tahes positiivse täisarvu k korral on tõene järgmine jääkide tabel:

a	0	1	2
a^{2k}	0	1	1
a^{2k+1}	0	1	2

Seega arv A võib 3-ga jagamisel anda järgmised jäägid:

$$\begin{aligned} 1+0+0+0+0+0+0 &= 1, \\ 1+1+1+1+1+1+1 &= 7, \\ 1+2+1+2+1+2+1 &= 10. \end{aligned}$$

Kuna arvud 7 ja 10 annavad jagades 3-ga jäägi 1, siis mis tahes täisarvu a korral arv A ei jagu 3-ga ning annab 3-ga jagamisel alati jäägi 1.

Näide 10. On antud 10 positiivset täisarvu, mille kuupide summa jagub 3-ga. Tõestame, et

a) nende arvude endi summa alati jagub 3-ga;

b) nende arvude ruutude summa ei pruugi alati jaguda 3-ga.

Ülesande väidete tõestamiseks kasutame 3-ga jagamisel saadud jääkide tabeli järgmist osa:

a	0	1	2
a^2	0	1	1
a^3	0	1	2

a) Sellest näeme, et iga positiivse täisarvu kuup annab 3-ga jagamisel täpselt sama jäägi nagu see arv ise. Seega ka vaadeldavate arvude summa annab 3-ga jagamisel sama jäägi 0 nagu nende kuupide summa, st jagub 3-ga.

b) Selleks, et antud väidet tõestada, piisab ühest kontranäitest. Võtame kümnest arvust näiteks viis arvu võrdseks arvuga 1 ja viis arvu võrdseks arvuga 2. Siis nende kuupide summa

$$5 \cdot 1^3 + 5 \cdot 2^3 = 5 \cdot (1 + 8) = 45$$

jagub 3-ga, kuid nende ruutude summa $5 \cdot (1 + 4) = 25$ arvuga 3 ei jagu.

Moodustame nüüd uue jääkide tabeli, et leida, millise jäägi saab anda mis tahes positiivse täisarvu ruut ja mis tahes positiivse täisarvu kuup jagamisel 4-ga.

Kõigepealt kirjutame tabeli esimesse ritta kõik võimalikud jäägid, mis võivad tekkida arvuga 4 jagamisel, st arvud 0, 1, 2 ja 3. Siis järelduse 7 põhjal saame leida, millise jäägi annab vastava jäägiga arvu ruut ja kuup jagamisel 4-ga. Kuna kehtivad võrdused

$$0^2 = 0, \quad 1^2 = 1, \quad 2^2 = 4 = 4 \cdot 1 + 0 \quad \text{ja} \quad 3^2 = 9 = 4 \cdot 2 + 1 \quad \text{ning}$$

$$0^3 = 0, \quad 1^3 = 1, \quad 2^3 = 8 = 4 \cdot 2 + 0 \quad \text{ja} \quad 3^3 = 27 = 4 \cdot 6 + 3,$$

siis 4-ga jagamisel tekib järgmine jääkide tabel:

a	0	1	2	3
a^2	0	1	0	1
a^3	0	1	0	3

Seega mis tahes positiivse täisarvu ruut saab 4-ga jagamisel anda kas jäägi 0 või 1 ning mis tahes positiivse täisarvu kuup ei saa jagamisel 4-ga anda jäägi 2. Sellest näiteks saab järeldada, et arv kujul $4k + 2$ ei saa olla võrdne mingi täisarvu ruuduga ega kuubiga.

Näide 11. Olgu a ja b kaks erinevat arvu hulgast

$$\{ 21, 37, 43, 57, 62, 73 \}.$$

Leiame arvu $a^2 + b^3$ vähima võimaliku väärtuse, mis jagub arvuga 4.

Ilmselt peavad arvud a ja b mõlemad olema kas paarisarvud või paaritud arvud. Kuna etteantud arvude hulgas on ainult üks paarisarv 62, siis arvud a ja b on mõlemad paaritud.

Paaritute arvude seas on vaid üks arv 43, mis annab jagamisel 4-ga jäägi 3. Kõik ülejäänud arvud annavad 4-ga jagades jäägi 1.

Kasutades 4-ga jagamisel saadud jääkide tabeleid

a	1	3
a^2	1	1

ja

b	1	3
b^3	1	3

saame, et paaritute arvude a ja b korral summa $a^2 + b^3$ jagub 4-ga, kui arv b annab jagades 4-ga jäägi 3. Seega $b = 43$.

Et summa $a^2 + b^3$ peab olema vähim võimalik, peab arvu a väärtuseks olema etteantud hulga kõige väiksem paaritu arv 21. Järelikult arvu $a^2 + b^3$ vähim võimalik väärtus, mis jagub 4-ga, on

$$21^2 + 43^3 = 79948.$$

Ülesanne 12. Olgu k positiivne täisarv. Kas leidub selline positiivne täisarv a, mis on esitatav kujul $a = 5k + 2$, et arv a oleks võrdne kas mingi positiivse täisarvu ruuduga või kuubiga?

Lahendus. Et $a = 5k + 2$, siis arv a annab jagamisel 5-ga jäägi 2. Nüüd moodustame jääkide tabeli, mis üldjuhul näitab, millise jäägi võib anda mis tahes täisruut ja mis tahes täiskuup 5-ga jagamisel:

Saadud jääkide tabelist näeme, et mis tahes positiivse täisarvu ruut ja mis tahes positiivse täisarvu kuup võivad jagamisel 5-ga anda vastavalt järgmised jäägid:

Järelikult saame järgmise vastuse:

Näide 13. Tõestame, et mis tahes täisarvude a, b ja c korral $6 \mid a + b + c$ parajasti siis, kui $6 \mid a^3 + b^3 + c^3$.

Moodustame jääkide tabeli, mis tekib arvuga 6 jagamisel. Kuna kehtivad võrdused

$$0^3 = 0, \quad 1^3 = 1, \quad 2^3 = 8 = 6 \cdot 1 + 2, \quad 3^3 = 27 = 6 \cdot 4 + 3,$$

$$4^3 = 64 = 6 \cdot 10 + 4 \quad \text{ja} \quad 5^3 = 125 = 6 \cdot 20 + 5,$$

siis 6-ga jagamisel tekkib järgmine jääkide tabel:

a	0	1	2	3	4	5
a^3	0	1	2	3	4	5

Näeme, et mis tahes täisarvul ja selle kuubil on üks ja sama jääk 6-ga jagamisel. Seetõttu kuupide summa jagub 6-ga parajasti siis, kui arvude eneste summa jagub 6-ga.

Näide 14. Olgu a, b ja c suvalised täisarvud. Tõestame, et $a^2+b^2+c^2$ jagub 7-ga parajasti siis, kui $a^4+b^4+c^4$ jagub 7-ga.

Paneme kirja kõik täisarvude jagamisel 7-ga tekkivad jäägid ja leiame igaühe korral, millise jäägi annab 7-ga jagamisel arvu ruut ja neljas aste:

a	0	1	2	3	4	5	6
a^2	0	1	4	2	2	4	1
a^4	0	1	2	4	4	2	1

Kui arvude a, b ja c ruutude summa jagub 7-ga, siis peab ka ruutude jääkide summa jaguma 7-ga. See on võimalik ainult kahel juhul: vastavad jäägid on kas 0, 0 ja 0 või 1, 2 ja 4 mingis järjekorras. Jääkide tabelist näeme, et nende arvude neljandate astmete jäägid on siis vastavalt 0, 0 ja 0 või 1, 4 ja 2. Kummalgi juhul jagub jääkide summa ja järelikult ka neljandate astmete endi summa 7-ga.

Vastupidi, kui arvude a, b ja c neljandate astmete summa jagub 7-ga, siis saame nii neljandate astmete kui ka ruutude võimalikeks jääkideks kas 0, 0 ja 0 või 1, 2 ja 4, mistõttu ka ruutude summa jagub 7-ga.

Ülesanne 15. Olgu a, b ja c suvalised täisarvud. Tõestada, et kui $a^3+b^3+c^3$ jagub 7-ga, siis korrutis abc jagub samuti 7-ga.

Tõestus. Kõigepealt leiame, millise jäägi võib anda mis tahes täisarvu kuup jagamisel 7-ga. Selleks koostame vastava jääkide tabeli:

Tõestame, et kui ükski arvudest a, b ja c ei jagu 7-ga, siis kuupide summa $a^3+b^3+c^3$ ei saa 7-ga jaguda:

Lõpuks tõestame, et ülesande tingimustel korrutis abc jagub 7-ga:

Väga paljude arvuteooria ülesannete lahendamisel saab otseselt kasutada nn *ruutjääkide meetodit*, mis põhineb järgmises lauses sõnastatud väidetel. Kõiki neid väiteid saab tõestada näiteks jääkide tabelite abil.

Lause 16. *Mis tahes täisarvu a ruut a^2 annab*

a) *3-ga jagamisel kas jäägi 0 või 1;*
(juhul kui $3 \mid a$, siis a^2 annab 3-ga jagamisel jäägi 0, vastasel juhul jäägi 1)

b) *4-ga jagamisel kas jäägi 0 või 1;*
(juhul kui a on paarisarv, siis a^2 annab 4-ga jagamisel jäägi 0 ning kui a on paaritu arv, siis jäägi 1)

c) *5-ga jagamisel kas jäägi 0, 1 või 4;*
(juhul kui $5 \mid a$, siis a^2 annab 5-ga jagamisel jäägi 0, vastasel juhul kas jäägi 1 või 4)

d) *7-ga jagamisel kas jäägi 0, 1, 2 või 4;*
(juhul kui $7 \mid a$, siis a^2 annab 7-ga jagamisel jäägi 0, vastasel juhul kas jäägi 1, 2 või 4)

e) *8-ga jagamisel kas jäägi 0, 1 või 4;*
(juhul kui a on paarisarv, siis a^2 annab 8-ga jagamisel kas jäägi 0 või 4 ning kui a on paaritu arv, siis jäägi 1)

f) *9-ga jagamisel kas jäägi 0, 1, 4 või 7;*
(juhul kui $3 \mid a$, siis a^2 annab 9-ga jagamisel jäägi 0, vastasel juhul kas jäägi 1, 4 või 7)

g) *16-ga jagamisel kas jäägi 0, 1, 4 või 9.*
(juhul kui a on paarisarv, siis a^2 annab 16-ga jagamisel kas jäägi 0 või 4 ning kui a on paaritu arv, siis kas jäägi 1 või 9)

Märkus. Et näiteks tõestada, et mis tahes paaritu täisarvu ruut annab nii 4-ga kui ka 8-ga jagamisel jäägi 1, võib lähtuda ka paaritu arvu üldkujust $2k+1$, kus k on mingi täisarv. Tõstes seda ruutu, saame võrduse

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1,$$

millest otseselt järeldub, et $(2k+1)^2$ annab 4-ga jagamisel jäägi 1. Kuna k ja $k+1$ on kaks järjestikust täisarvu, siis üks neist on paaris, st $8 \mid 4k(k+1)$. Seega $(2k+1)^2$ annab ka 8-ga jagamisel jäägi 1.

Järgmiste ülesannete lahendamisel kasutame lauses 16 sõnastatud väiteid.

Näide 17. Olgu a ja b täisarvud. Tõestame, et kui $a^2 + b^2$ jagub arvuga 3, siis see jagub ka arvuga 9.

Lause 16 väitest $a)$ järeldub, et arvud a^2 ja b^2 võivad 3-ga jagamisel anda kas jäägi 0 või 1.

Kuna arv $a^2 + b^2$ jagub 3-ga, siis arvude a^2 ja b^2 jagamisel 3-ga saadud jääkide summa peaks samuti jaguma 3-ga. Ilmselt on see võimalik ainult siis, kui mõlemad arvud a^2 ja b^2 annavad 3-ga jagades jäägi 0.

Teame, et kui $3 \mid a^2$ ja $3 \mid b^2$, siis kehtivad ka väited $3^2 \mid a^2$ ja $3^2 \mid b^2$. Järelikult kehtib seos

$$3^2 \mid a^2 + b^2 \qquad \text{ehk} \qquad 9 \mid a^2 + b^2.$$

Ülesanne 18. Olgu a ja b täisarvud. Tõestada, et kui $a^2 + b^2$ jagub arvuga 7, siis see jagub ka arvuga 49.

Tõestus. Kasutame lause 16 tulemust, et leida, millise jäägi 7-ga jagamisel võib anda arv $a^2 + b^2$:

Tõestame, et kui $7 \mid a^2 + b^2$, siis $7 \mid a^2$ ja $7 \mid b^2$:

Lõpuks näitame, et $49 \mid a^2 + b^2$:

Näide 19. Teeme kindlaks, kas

a) kahe

b) kolme

paaritu täisarvu ruutude summa võiks olla võrdne mingi täisarvu ruuduga.

Lause 16 väide $b)$ ütleb, et mis tahes paaritu täisarvu ruut annab 4-ga jagamisel jäägi 1.

a) Siis kahe paaritu täisarvu ruutude summa annab 4-ga jagamisel jäägi 2 (kuna $1 + 1 = 2$). Aga mis tahes täisarvu ruut annab 4-ga jagamisel kas jäägi 0 või 1. Seega kahe paaritu täisarvu ruutude summa ei saa olla võrdne mingi täisarvu ruuduga.

b) Analoogiliselt saame, et kolme paaritu täisarvu ruutude summa annab 4-ga jagamisel jäägi 3. Seega kolme paaritu täisarvu ruutude summa ei saa olla võrdne mingi täisarvu ruuduga, sest ei leidu ühtegi täisarvu, mille ruut annaks 4-ga jagamisel jäägi 3.

Näide 20. Olgu a, b ja c sellised positiivsed täisarvud, et kehtib võrdus

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Tõestame, et korrutis ab jagub alati arvuga 12.

Mis tahes täisarvu ruut annab jagamisel 3-ga kas jäägi 0 või 1. Näitame, et vähemalt üks arvudest a ja b peab jaguma 3-ga. Vastasel juhul mõlemad arvud a^2 ja b^2 annavad 3-ga jagamisel jäägi 1, st nende summa c^2 annab jagamisel 3-ga jäägi $1 + 1 = 2$, mis on võimatu. Seega $3 \mid ab$.

Vaatleme jaguvust arvuga 8. Mis tahes paaritu täisarvu ruut annab jagamisel 8-ga jäägi 1. Seega vähemalt üks arvudest a ja b on paarisarv (muidu c^2 annaks jäägi 2 jagamisel 8-ga, mis on võimatu). Juhul kui mõlemad arvud a ja b on paarisarvud, siis ilmselt kehtib väide $4 \mid ab$.

Juhul kui täpselt üks neist on paaritu, siis teise paarisarvu ruut saab jagamisel 8-ga anda ainult jäägi 0, sest vastasel juhul c^2 peab andma jäägi $1 + 4 = 5$ arvuga 8 jagamisel, mis on võimatu. Uurime nüüd paarisarvude ruutude jääkide tabelit jagamisel 8-ga:

a	0	2	4	6
a^2	0	4	0	4

Sellest näeme, et vaadeldav paarisarv peab olema kas kujul $8k$ või $8k + 4$. Igal juhul see peab 4-ga jaguma. Kokkuvõttes saame, et

$$3 \cdot 4 \mid ab \qquad \text{ehk} \qquad 12 \mid ab.$$

Näide 21. Olgu a, b ja c mis tahes etteantud paaritud täisarvud. Tõestame, et alati leidub selline paaritu täisarv d, mille korral arv $a^2+b^2+c^2+d^2$ võrdub mingi täisarvu ruuduga.

Ülesande tingimuste kohaselt on arv $a^2+b^2+c^2$ paaritu ja avaldub seega kujul $2k+1$, kus k on mingi täisarv. Võttes $d=k$, saame võrduse

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(2k+1)+k^2=(k+1)^2,$$

millest järeldub, et arv $a^2+b^2+c^2+d^2$ on täisruut. Jääb üle veenduda, et $d=k$ on paaritu arv. Selleks paneme tähele, et mis tahes paaritu täisarvu ruut annab neljaga jagades jäägi 1. Seega arv $a^2+b^2+c^2$ annab neljaga jagades jäägi 3. Teiselt poolt kehtib võrdus $a^2+b^2+c^2=2k+1$. Paarisarvulise arvu k korral annaks arv $2k+1$ neljaga jagades jäägi 1. Seega arv k on paaritu arv.

Näide 22. Kirjutame täisarvude $1,2,\ldots,20$ ruudud ühte ritta suvalises järjekorras nii, et moodustuks üks 48-kohaline arv. Tõestame, et saadud 48-kohaline arv ei ole ühelgi juhul mingi täisarvu ruut.

Teame, et 3-ga jagamisel mis tahes täisarvude ruudud annavad kas jäägi 0 (juhul kui arv ise jagub 3-ga) või jäägi 1 (juhul kui arv 3-ga ei jagu).

Kuna antud 20-ne täisarvu seas on 14 kolmega mittejaguvat arvu, siis saadud 48-kohaline arv annab 3-ga jagamisel igal juhul täpselt sama jäägi, mis annab arv 14 ehk jäägi 2. Järelikult saadud 48-kohaline arv ei saa olla võrdne mingi täisarvu ruuduga.

Näide 23. Tõestame, et arvude

$$11,111,1111,11111,111111,\ldots$$

seas ei ole ühtegi täisarvu ruutu.

Kõik antud arvud on mingi täisarvu k korral kujul $100k+11$. Jagamisel arvuga 4 arv $100k+11$ annab jäägi 3. Kuna ühegi täisarvu ruut ei saa jagamisel 4-ga anda jäägi 3, siis antud arvude seas ei ole ühtegi täisruutu.

Näide 24. Tõestame, et ei leidu positiivset täisarvu a, et arvu a^{134} numbrite summa on 134.

Oletame vastuväiteliselt, et selline arv a leidub. Et positiivne täisarv ja tema numbrite summa annavad 3-ga jagades alati sama jäägi, siis arv a^{134} annab 3-ga jagades sama jäägi nagu arv 134 ehk jäägi 2. Teiselt poolt on arv

$$a^{134}=(a^{67})^2$$

täisruut, kuid ükski täisruut ei saa anda 3-ga jagamisel jääki 2. Saadud vastuolu tõestab väite.

Näide 25. Tõestame, et ükski positiivne täisarv, mille numbrite seas esineb üks 2, üks 1 ja ülejäänud numbrid on nullid, ei esitu mingi kahe täisarvu ruutude summana.

Teame, et täisarvu ruut saab jagamisel 3-ga anda ainult jäägi 0 või 1. Et ülesandes antud arvu ristsumma jagub 3-ga, siis see arv ise jagub 3-ga ning kahe täisarvu ruutude summana saaks ta avalduda ainult siis, kui mõlemad ruudud annaksid 3-ga jagamisel jäägi 0. Siis aga jaguks mõlemas ruudus astendatav 3-ga ning ruudud ise jaguksid 9-ga. Seega jaguks ka ruutude summa 9-ga. Et ülesande arvu ristsumma 9-ga ei jagu, siis tema avaldamine kahe täisarvu ruutude summana on võimatu.

Ülesanne 26. Olgu antud kolm positiivset täisarvu, mille ruutude summa jagub arvuga 9. Tõestada, et nende seas on kindlasti kaks arvu, mille ruutude vahe samuti jagub 9-ga.

Tõestus. Kasutades jääkide tabelit (või lause 16 väidet), leiame, millise jäägi võivad anda mis tahes täisarvude ruudud jagamisel 9-ga:

Näitame, et nende kolme arvu seas on kindlasti kaks arvu, mille ruudud annavad ühe ja sama jäägi 9-ga jagamisel:

Tõestuse lõpetamiseks paneme tähele, et

Lause 27. *Mis tahes täisarvu a kuup a^3 annab*

a) *7-ga jagamisel kas jäägi* 0, 1 *või* 6;

b) *9-ga jagamisel kas jäägi* 0, 1 *või* 8.

Näide 28. Tõestame, et mis tahes positiivsete täisarvude a ja b korral arv

$$a^3 + b^3 + 4$$

ei saa olla võrdne mingi täisarvu kuubiga.

Lause 27 ütleb, et 9-ga jagamisel mis tahes täisarvu kuup annab kas jäägi 0, 1 või 8. Sellist tulemust võib saada ka 9-ga jagamisel tekkivast jääkide tabelist:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a^3	0	1	8	0	1	8	0	1	8

Uurime, millise jäägi võib anda 9-ga jagamisel arv $a^3 + b^3 + 4$. Selleks peame läbi vaatama üheksa erinevat võimalust (sõltuvalt sellest, millise jäägi annavad arvude a ja b kuubid jagades 9-ga):

a^3	0	0	0	1	1	1	8	8	8
b^3	0	1	8	0	1	8	0	1	8
$a^3 + b^3 + 4$	4	5	3	5	6	4	3	4	2

Kuna arv $a^3 + b^3 + 4$ annab 9-ga jagamisel kas jäägi 2, 3, 4, 5 või 6 ning mis tahes täisarvu kuup annab 9-ga jagamisel kas jäägi 0, 1 või 8, siis arv $a^3 + b^3 + 4$ ei saa olla võrdne mingi täisarvu kuubiga.

Näide 29. Tõestame, et leidub lõpmata palju positiivseid täisarve, mida ei saa esitada mingi kolme täisarvu kuupide summana.

Lause 27 põhjal võime väita, et mis tahes täisarvu kuup annab 9-ga jagamisel kas jäägi 0, 1 või 8. Antud juhul on kasulikum väita, et mis tahes täisarvu kuup annab 9-ga jagamisel kas jäägi -1, 0 või 1.

Siis mis tahes kolme täisarvu kuupide summa võib jagamisel 9-ga anda jäägi alates arvust -3 kuni arvuni 3. See tähendab, et võimalikeks jääkideks on arvud 0, 1, 2, 3, 6, 7 ja 8.

Järelikult mis tahes kolme täisarvu kuupide summa ei saa 9-ga jagades anda jäägi 4 ega 5. Seega kõik arvud, mis annavad 9-ga jagamisel jäägi 4 või 5, ei ole esitatavad kolme täisarvu kuupide summana. Nendeks arvudeks on näiteks arvud 4 ja 5, 13 ja 14 jne. Teisisõnu, need kõik on üldkujul $9k + 4$ ja $9k + 5$, seega neid arve on ilmselt lõpmata palju.

Ülesanne 30. Tõestada, et mis tahes positiivse täisarvu a korral arv $3 + 210a$ ei ole mingi täisarvu kuup.

Tõestus. Kui täisarvu $3 + 210a$ jagame (jäägiga) arvu 210 mingi teguriga, siis võime tekkivat jääki üheselt arvutada. Selleks lahutame arvu 210 algteguriteks:

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Nüüd iga algteguri jaoks koostame sellise jääkide tabeli, millest näeme, millise jäägi võib anda mis tahes positiivse täisarvu kuup valitud algteguriga jagamisel. Seejärel leiame, milline jääk tekib täisarvu $3 + 210a$ jagamisel valitud algteguriga ning teeme järelduse, kas arv $3 + 210a$ võib antud juhul olla võrdne mingi täisarvu kuubiga või mitte.

a) Uurime jääke algteguriga 2 jagamisel:

b) Uurime jääke algteguriga 3 jagamisel:

c) Uurime jääke algteguriga 5 jagamisel:

d) Uurime jääke algteguriga 7 jagamisel:

Saame, et algteguritega 2, 3 ja 5 jäägiga jagamisel annab avaldis $3 + 210a$ jäägi, mis on võimalik mingi täisarvu kuubi jagamisel mingi vaadeldava algteguriga. Algteguriga 7 jagamisel aga saame sellise jäägi, mis ei saa tekkida ühegi täiskuubi jagamisel 7-ga. Järelikult mis tahes positiivse täisarvu a korral arv $3 + 210a$ ei saa olla võrdne mingi täisarvu kuubiga.

Näide 31. Tõestame, et mis tahes positiivse täisarvu a korral arv $6a^3 + 3$ ei saa olla võrdne mingi täisarvu kuuenda astmega.

Oletame vastuväiteliselt, et leidub selline täisarv k, et kehtib võrdus

$$6a^3 + 3 = k^6.$$

Kuna $k^6 = (k^2)^3$, siis arv $6a^3 + 3$ peab olema võrdne täisarvu k^2 kuubiga.

Lausest 27 järeldub, et mis tahes täisarvu kuup annab 7-ga jagamisel kas jäägi 0, 1 või 6.

Paneme tähele, et

- juhul kui a^3 annab jagades 7-ga jäägi 0, siis $6a^3 + 3$ annab jagades 7-ga jäägi 3 (kuna $6 \cdot 0^3 + 3 = 3$);
- juhul kui a^3 annab jagades 7-ga jäägi 1, siis $6a^3 + 3$ annab jagades 7-ga jäägi 2 (kuna $6 \cdot 1^3 + 3 = 9 = 7 \cdot 1 + 2$);
- juhul kui a^3 annab jagades 7-ga jäägi 6, siis $6a^3 + 3$ annab jagades 7-ga jäägi 4 (kuna $6 \cdot 6^3 + 3 = 1299 = 7 \cdot 185 + 4$).

Seega arv $6a^3 + 3$ annab jagades 7-ga kas jäägi 2, 3 või 4. Samal ajal arv $6a^3 + 3$ on täisarvu k^2 kuup, seega võib see 7-ga jagamisel anda kas jäägi 0, 1 või 6. Saadud vastuolu tõestab väite.

Ruutjääkide meetodit saab kasutada ka algarvudega ülesannete lahendamisel. Selleks osutub kasulikuks järgmine lause.

Lause 32. *Mis tahes algarvu $p > 3$ ruut p^2 annab*

a) *3-ga jagamisel jäägi* 1;

b) *4-ga jagamisel jäägi* 1;

c) *6-ga jagamisel kas jäägi* 1 *või* 5;

d) *8-ga jagamisel jäägi* 1;

e) *16-ga jagamisel kas jäägi* 1 *või* 9.

Märkus. Lause 32 väidete tõestused põhinevad faktile, et mis tahes kolmest suurem algarv ei jagu 2-ga ega 3-ga. See tähendab, et selle ruut ei saa anda jäägi 0 arvudega 2 ja 3 jagamisel. Kuna lause 16 põhjal saame, et mis tahes täisarvu ruut annab nt jagades 3-ga kas jäägi 0 või 1, siis algarvu ruut saab jagamisel 3-ga anda ainult jäägi 1.

Näide 33. Tõestame, et mis tahes algarvu $p > 3$ korral arv $p^4 - 1$ jagub 48-ga.

Lause 32 ütleb, et mis tahes kolmest suurema algarvu ruut annab 3-ga ja 8-ga jagamisel jäägi 1. Seega $p^2 - 1$ jagub nii 3-ga kui ka 8-ga. Kuna

$$p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1),$$

siis arvu $p^4 - 1$ esimene tegur $p^2 - 1$ jagub arvuga $3 \cdot 8 = 24$.

Kuna arvu $p^4 - 1$ teine tegur $p^2 + 1$ on kolmest suurema algarvu p korral paarisarv, siis see kindlasti jagub 2-ga. Seega arv $p^4 - 1$ jagub arvuga $24 \cdot 2 = 48$ mis tahes algarvu $p > 3$ korral.

Näide 34. Leiame kõik võimalikud algarvu p väärtused, mille korral arv $p^2 + 23$ ei jagu arvuga 24.

Teame, et suvalise algarvu $p > 3$ korral arv p^2 annab jagamisel nii 3-ga, kui ka 8-ga jäägi 1 (vt lause 32).

Sellisel juhul arvud $p^2 + 23$ ja $1 + 23 = 24$ annavad jagamisel nii 3-ga kui ka 8-ga täpselt sama jäägi 0, st mis tahes algarvu $p > 3$ korral kehtib seos

$$24 \mid p^2 + 23.$$

Jääb kontrollida, kas tingimus kehtib algarvu $p \leqslant 3$ korral. Veendume, et $p = 2$ ja $p = 3$ korral $p^2 + 23$ ei jagu arvuga 24:

- juhul $p = 2$ saame, et $p^2 + 23 = 27 \quad \text{ja} \quad 24 \nmid 27$;
- juhul $p = 3$ saame, et $p^2 + 23 = 32 \quad \text{ja} \quad 24 \nmid 32$.

Seega algarvud 2 ja 3 on ainukesed, mis rahuldavad ülesande tingimust.

Ülesanne 35. Tõestada, et kui $p_1, p_2, \ldots, p_{24}$ on suvalised kolmest suuremad algarvud, siis arv

$$P = {p_1}^2 + {p_2}^2 + \ldots + {p_{24}}^2$$

jagub arvuga 24.

Tõestus. Teeme kindlaks, millise jäägi annab mis tahes algarvu $p > 3$ ruut jagamisel arvuga 24:

Nüüd leiame, millise jäägi annab arv P jagamisel arvuga 24:

Näide 36. Leiame kõik sellised järjestikuste algarvude kolmikud (p_1, p_2, p_3), kus $p_1 < p_2 < p_3$, millede korral ${p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2$ on algarv.

Vaatleme eraldi kahte juhtumit vastavalt sellele, kas otsitavate algarvude seas on arv 3 või ei ole.

- Kui ükski algarvudest p_1, p_2 ja p_3 ei võrdu 3-ga, siis need kõik on kolmest suuremad algarvud. Lause 32 ütleb, et neist igaühe ruut annab jagamisel 3-ga jäägi 1. Järelikult nende ruutude summa jagub 3-ga. See tähendab, et sellisel juhul arv ${p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2$ ei saa olla võrdne mingi algarvuga.

- Kuna arv 2 on ainuke arvust 3 väiksem algarv, siis saab olla 3-ga võrdne kas p_1 või p_2. Kuna p_1, p_2 ja p_3 on järjestikused algarvud, siis juhul kui $p_1 = 3$ saame, et $p_2 = 5$ ja $p_3 = 7$ ning
$$ {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 = 3^2 + 5^2 + 7^2 = 83 $$
on algarv. Seega ülesande tingimusi rahuldab algarvude kolmik $(3, 5, 7)$. Juhul kui $p_2 = 3$ saame, et $p_1 = 2$ ja $p_3 = 5$ ning
$$ {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 = 36 $$
on kordarv.

Kokkuvõttes saame, et algarvude kolmik $(3, 5, 7)$ on ainus, mis rahuldab ülesande tingimusi.

Ülesanne 37. Olgu p ja $p^2 + 2$ algarvud. Tõestada, et arv $p^3 + 2$ on samuti algarv.

Tõestus. Kõigepealt oletame, et $p > 3$. Tõestame, et sellisel juhul arv $p^2 + 2$ ei saa olla võrdne mingi algarvuga:

Järelikult $p \leqslant 3$. Näitame, et $p = 2$ korral arv $p^2 + 2$ ei ole algarv:

Näitame, et juhul $p = 3$ arvud $p^2 + 2$ ja $p^3 + 2$ on mõlemad algarvud:

Mõnede arvuteooria ülesannete lahendamisel leiab rakendust Dirichlet printsiip, mida saab positiivsete täisarvude n ja k korral sõnastada järgmiselt:

Kui n hulka sisaldavad kokku vähemalt $kn+1$ elementi, siis leidub nende seas vähemalt üks hulk, milles on vähemalt $k+1$ elementi.

Näiteks kui on 3 hulka, milles on kokku 16 elementi, siis leidub hulk, milles on vähemalt 6 elementi.

Arvuteooria ülesannete lahendamisel tihti sisalduvad vastavates hulkades täisarvud sõltuvalt sellest, millise jäägi need annavad valitud arvuga jagamisel. Kui tahame näiteks tõestada, et kolme suvalise täisarvu seast on alati võimalik välja valida kaks arvu, mille summa jagub arvuga 2, siis võime arutleda järgmiselt.

- Teame, et mis tahes täisarvu jagamisel arvuga 2 võib tekkida kas jääk 0 või jääk 1. Seega meil tekib kaks hulka A ja B nii, et hulka A kuuluvad kõik täisarvud, mis annavad jagamisel 2-ga jäägi 0, ja hulka B kuuluvad kõik täisarvud, mis annavad jagamisel 2-ga jäägi 1.

- Kokku meil on kaks hulka ja kolm elementi (milleks on kolm etteantud suvalist täisarvu). Seega Dirichlet printsiibi kohaselt (kus $n = 2$ ja $k = 1$) peab leiduma hulk, milles on vähemalt $k+1 = 2$ elementi.

- Kui hulgas A on kaks elementi a_1 ja a_2, siis leiduvad sellised täisarvud q_1 ja q_2 nii, et kehtivad seosed $a_1 = 2q_1$ ja $a_2 = 2q_2$. Siis arvude a_1 ja a_2 summa jagub arvuga 2:
$$a_1 + a_2 = 2q_1 + 2q_2 = 2(q_1 + q_2).$$

- Kui hulgas B on kaks elementi $b_1 = 2q_1 + 1$ ja $b_2 = 2q_2 + 1$, siis ka nende summa jagub arvuga 2:
$$b_1 + b_2 = (2q_1 + 1) + (2q_2 + 1) = 2(q_1 + q_2 + 1).$$

- Järelikult saame väita, et mis tahes kolme täisarvu seast saab alati välja valida kaks arvu, mille summa jagub 2-ga.

Tihti kasutatakse arvuteooria ülesannete lahendamisel koos Dirichle printsiibiga järgmist lihtsalt tõestatavat tulemust.

Lause 38. *Olgu b_1 ja b_2 täisarvud ning a positiivne täisarv. Siis $b_1 - b_2$ jagub arvuga a parajasti siis, kui arvud b_1 ja b_2 annavad jagamisel arvuga a ühe ja sama jäägi.*

Kasutades lause 38 tulemust tõestame järgmise lause.

Lause 39. *Olgu n positiivne täisarv.*

a) Mis tahes $n+1$ positiivse täisarvu seast on alati võimalik välja valida kaks arvu nii, et nende vahe jagub arvuga n.

b) Mis tahes n positiivse täisarvu seast on alati võimalik välja valida mõned arvud selliselt, et nende summa jagub arvuga n.

Tõestus. a) Mis tahes positiivne täisarv jagamisel arvuga n annab ühe järgmistest jääkidest:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2,\ n-1.$$

See tähendab, et kokku on n erinevat jääki, mida saavad anda mis tahes positiivsed täisarvud arvuga n jagamisel. Kuna on antud $n+1$ täisarvu, siis Dirichlet printsiibi põhjal peab leiduma kaks arvu, mis annavad täpselt sama jäägi arvuga n jagamisel. Nende vahe jagubki n-ga (vt lause 38).

b) Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suvalised positiivsed täisarvud. Vaatleme järgmisi arve:

$$a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \ldots,\ a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n.$$

Juhul kui vähemalt üks neist jagub n-ga, siis võimegi selle ühe arvu valida ja ülesande tingimus on täidetud.

Nüüd oletame, et vaadeldavate n arvude seas ei ole ühtegi arvu, mis jagub n-ga. Siis jagamisel arvuga n need annavad ühe järgmistest jääkidest:

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n-2,\ n-1.$$

Kuna kokku on n täisarvu ja $n-1$ erinevat jääki, siis Dirichlet printsiibi põhjal peab leiduma kaks arvu, mis annavad täpselt sama jäägi arvuga n jagamisel. Olgu need arvud $a_1+\ldots+a_s$ ja $a_1+\ldots+a_t$, kus $1 \leqslant s < t \leqslant n$. Lause 38 ütleb, et nende vahe $a_{s+1}+\ldots+a_t$ peab jaguma arvuga n. □

Kui näiteks on antud neli täisarvu $3, 7, 11$ ja 17, siis lause 39 põhjal nende hulgas peab leiduma kaks arvu, mille vahe jagub 3-ga ning peavad leiduma mõned arvud, et nende summa jagub 4-ga.

Kuna 3-ga jagamisel antud arvud annavad vastavalt jäägid $0, 1, 2$ ja 2, siis arvude 17 ja 11 vahe 6 peab jaguma 3-ga.

Nüüd vaatleme arve 3, $3+7=10$, $3+7+11=21$ ja $3+7+11+17=38$. Nende hulgas ei ole ühtegi 4-ga jaguvat arvu. Kuna 4-ga jagamisel antud arvud annavad vastavalt jäägid $3, 2, 1$ ja 2, siis arvude 38 ja 10 vahe $11+17=28$ jagub 4-ga.

Ülesanne 40. On antud kaheksa järgmist täisarvu:

$$11, \ 23, \ 35, \ 47, \ 59, \ 62, \ 74 \text{ ja } 86.$$

a) Leida kõik erinevad võimalused selleks, et antud täisarvudest välja valida kaks arvu nii, et nende vahe jagub arvuga 7.

b) Mitu erinevat võimalust on selleks, et antud täisarvudest välja valida kolm arvu nii, et nende summa jagub arvuga 8?

Lahendus. a) Leiame, millise jäägi annab igaüks antud arvudest jagamisel 7-ga:

Lause 38 põhjal saame väita, et ainult järgmiste arvude vahed jaguvad 7-ga:

b) Nüüd leiame, millise jäägi annab igaüks antud arvudest jagamisel arvuga 8:

Seega 8-ga jagamisel tekivad ainult järgmised jäägid:

Kolme antud arvu summa jagub 8-ga parajasti siis, kui need arvud annavad jagades 8-ga järgmised jäägid (otsime kõik võimalused):

Nüüd saame arvutada, mitu erinevat võimalust on kolme arvu valikuks nii, et nende summa jagub arvuga 8:

Näide 41. Tõestame, et ei leidu viit erinevat positiivset täisarvu nii, et nendest mis tahes kolme arvu summa oleks võrdne mingi algarvuga.

Oletame vastuväiteliselt, et sellised arvud leiduvad. Paneme tähele, et mis tahes kolme erineva positiivse täisarvu summa ei ole väiksem kui $1 + 2 + 3 = 6$. Näitame, et antud viie arvu seas leidub kolm arvu, mille summa jagub 3-ga.

Kuna arvuga 3 jagamisel võib tekkida kolm erinevat jääki 0, 1 ja 2, siis Dirichlet printsiibi põhjal antud viie arvu seas on kas kolm arvu, mis annavad 3-ga jagamisel sama jäägi, või kolm arvu, mis kõik annavad 3-ga jagamisel üksteisest erineva jäägi. Mõlemal juhul nende jääkide summa jagub 3-ga, st vastava kolme arvu summa jagub 3-ga.

Kokkuvõttes saame, et viie erineva positiivse täisarvu seast on alati võimalik välja valida kolm arvu, mille summa ühelt poolt jagub 3-ga ja teiselt poolt see on vähemalt 6. See on vastuolus algarvu definitsiooniga.

Näide 42. Olgu a, b ja c sellised täisarvud, et kehtib võrdus

$$a + b + c = (a - b)(b - c)(c - a).$$

Tõestame, et arv $a + b + c$ jagub arvuga 27.

Uurime, milliseid jääke saavad anda arvud a, b ja c arvuga 3 jagamisel.

- Juhul kui a, b ja c annavad igaüks ühe ja sama jäägi 3-ga jagamisel, siis arvud $a - b$, $b - c$ ja $c - a$ jaguvad igaüks 3-ga ning nende korrutis jagub 3^3-ga ehk 27-ga.
- Juhul kui a, b ja c annavad erinevad jäägid 3-ga jagamisel (st 0, 1 ja 2), siis ühelt poolt $3 \mid a + b + c$ ning teiselt poolt arv 3 ei jaga ühtegi arvudest $a - b$, $b - c$ ja $c - a$, millest $3 \nmid (a - b)(b - c)(c - a)$. Järelikult ei saa kehtida ülesande tingimusena olev võrdus.
- Juhul kui arvude a, b ja c jagamisel 3-ga tekkivad jäägid ei ole kõik samad ega kõik erinevad, siis Dirichlet printsiibi põhjal peab leiduma täpselt kaks arvu, mis annavad ühe ja sama jäägi 3-ga jagamisel (üldisust kitsendamata ütleme, et need on a ja b). Siis ilmselt $3 \nmid a + b + c$ ning $3 \mid a - b$, millest järeldub väide $3 \mid (a - b)(b - c)(c - a)$. Ka sel juhul ei saa kehtida ülesande tingimuses toodud võrdus.

Kokkuvõttes saame, et võrdus $a + b + c = (a - b)(b - c)(c - a)$ kehtib ainult siis, kui arvud a, b ja c annavad ühe ja sama jäägi 3-ga jagamisel. Sellisel juhul arv $a + b + c$ jagub arvuga 27.

Näide 43. Tõestame, et mis tahes täisarvude a, b, c ja d korral korrutis

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

jagub arvuga 12.

Tõestamiseks piisab näidata, et antud korrutis jagub 3-ga ja 4-ga mis tahes täisarvude a, b, c ja d korral.

Kuna vähemalt kaks arvudest a, b, c ja d annab 3-ga jagamisel sama jäägi, siis nende arvude vahe jagub 3-ga. Järelikult ka kogu korrutis jagub 3-ga.

Nüüd põhjendame jaguvust 4-ga. Nelja arvu hulgas on vähemalt kaks sama paarsusega täisarvu.

- Juhul kui nende hulgas on kaks paarisarvu ja kaks paaritut arvu, siis nii paarisarvude kui ka paaritute arvude vahe jagub 2-ga. Järelikult nende korrutis jagub 4-ga.
- Vastasel juhul peab leiduma vähemalt kolm sama paarsusega arvu, kusjuures iga paari vahe jagub 2-ga. Seega korrutis ilmselt jagub 4-ga.

Näide 44. Olgu a, b ja c sellised positiivsed täisarvud, et

$$ab+1, \quad bc+1 \quad \text{ja} \quad ca+1$$

on kõik täisarvude ruudud. Tõestame, et vähemalt üks arvudest a, b ja c jagub arvuga 4.

Kui kõik arvud a, b ja c on paaritud, siis annavad nad 4-ga jagamisel kas jäägi 1 või jäägi 3. Dirichlet printsiibi põhjal leidub nende seas kaks arvu, mille jäägid on võrdsed. Üldisust kitsendamata olgu need a ja b. Sõltumata sellest, kas a ja b annavad 4-ga jagades jäägi 1 või jäägi 3, annab $ab+1$ jagamisel 4-ga jäägi 2:

$$ab+1 = (4k+1)(4l+1)+1 = 4(4kl+k+l)+2,$$

$$ab+1 = (4k+3)(4l+3)+1 = 4(4kl+3k+3l+2)+2.$$

Seega ei saa $ab+1$ olla täisruut, sest täisruutude jäägid 4-ga jagamisel saavad olla ainult kas 0 või 1 (vt lause 16).

Seega võime eeldada, et vähemalt üks arvudest a, b ja c on paaris, üldisust kitsendamata olgu see a. Siis on arv $ab+1$ paaritu täisruut. Et paaritute arvude ruudud annavad 8-ga jagades jäägi 1 (vt lause 16), siis ab jagub 8-ga. Järelikult peab vähemalt üks arvudest a ja b jaguma 4-ga.

Ülesanne 45. Olgu a, b ja c sellised positiivsed täisarvud, et arvud

$$p = b^c + a, \quad q = a^b + c \quad \text{ja} \quad r = c^a + b$$

on kõik algarvud. Tõestada, et arvude p, q ja r seas on vähemalt kaks omavahel võrdset arvu.

Tõestus. Kõigepealt näitame, et arvude a, b ja c seas leidub kaks sama paarsusega arvu:

Üldisust kitsendamata eeldame, et arvud a ja b on sama paarsusega. Siis leiame algarvu p väärtuse:

Nüüd leiame arvude a ja b väärtused:

Lõpuks näitame, et $q = r$:

Näide 46. Tõestame, et leidub positiivne täisarv, mis koosneb ainult numbritest 1 ja mis jagub arvuga 123.

Vaatleme näiteks 124 esimest arvu arvureast

$$1, \ 11, \ 111, \ 1111, \ 11111, \ 111111, \ 1111111, \ \ldots$$

Kuna arvuga 123 jagamisel võivad tekkida kuni 123 erinevat jääki, siis Dirichlet printsiibi kohaselt leidub vaadeldavas reas kaks täisarvu, mis annavad täpselt sama jäägi arvuga 123 jagamisel. Olgu need arvud

$$a = 11\ldots11 \ \ (m \text{ ühte}) \quad \text{ja} \quad b = 11\ldots11 \ \ (n \text{ ühte}),$$

kusjuures $m < n$. Vaatleme arvu $b - a$:

$$b - a = 11\ldots1100\ldots00 \ \ (n - m \ \text{ ühte ja } \ m \ \text{ nulli}).$$

Kuna $b - a$ jagub arvuga 123 ning arvud 123 ja $100\ldots00$ (m nulli) on ühistegurita, siis peab arv $11\ldots11$ ($n - m$ ühte) jaguma arvuga 123.