Tartu Ülikooli Teaduskool

Arvuteooria

4. Tegurid

Koostanud Maksim Ivanov, TÜ Teaduskool
Retsenseerinud Elts Abel, Tartu Ülikool

Käesolevas vihikus tutvume lähemalt algteguri mõistega ja kasutame ülesannete lahendamisel nn aritmeetika põhiteoreemi. Lisaks tuletame valemi, mis suvalise positiivse täisarvu kanoonilise kuju järgi arvutab, mitu on sellel täisarvul erinevaid positiivseid tegureid.

Definitsioon 1. Olgu a positiivne täisarv ning p algarv. Kui arv p jagab arvu a (st $p \mid a$), siis öeldakse, et algarv p on täisarvu a *algtegur*.

Märkus. Mis tahes ühest suuremal täisarvul on vähemalt üks algtegur.

Näide 2. Tõestame, et iga täisarvu $a > 2$ jaoks leidub selline algarv $p < a$, millega arv a ei jagu.

Olgu p täisarvu $a - 1$ mingi algtegur (selline algtegur p leidub, sest ülesande tingimuse $a > 2$ põhjal kehtib võrratus $a - 1 > 1$). Siis kehtivad tingimused $p \mid a - 1$ ja $1 < p < a$. Kui p jagaks ka täisarvu a, siis jaguvuse omaduse põhjal peaks ka täisarvude $a - 1$ ja a vahe

$$a - (a - 1) = 1$$

jaguma algarvuga p, mis on ilmselt võimatu. Seega p ongi selline arvust a väiksem algarv, millega a ei jagu.

On selge, et juhul $a > 1$ osutub täisarvu a vähim võimalik ühest suurem tegur algarvuks. Lisaks sellele, kui kehtib võrdus $a = pb$, kus p on arvu a vähim võimalik algtegur, siis täisarvul b ei ole arvust p väiksemaid algtegureid. Just nendele faktidele toetub järgmisena sõnastatud *aritmeetika põhiteoreemi* tõestus.

Teoreem 3. *Iga ühest suuremat täisarvu saab esitada selle algtegurite korrutisena ja see esitus on ühene tegurite järjekorra täpsuseni.*

Märkus. Kui täisarv on esitatud oma algtegurite korrutisena, siis kõneldakse ka selle täisarvu algteguriteks lahutusest. Näiteks arvu 72 algteguriteks lahutus on $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Tõestus. Algul veendume, et iga ühest suurema täisarvu a jaoks leidub vähemalt üks algteguriteks lahutus. Selleks moodustame järgmise konstruktsiooni.

- Juhul kui a on algarv, siis koosneb arvu a algteguriteks lahutus ühest tegurist a. Kui a ei ole algarv, siis leidub arvu a vähim algtegur p_1 ja tegur $a_1 < a$, et kehtib võrdus $a = p_1 a_1$.

- Kui a_1 on algarv, siis koosneb arvu a algteguriteks lahutus kahest tegurist p_1 ja a_1. Kui a_1 ei ole algarv, siis leidub selle vähim algtegur p_2 ja tegur $a_2 < a_1$, et kehtib võrdus $a_1 = p_2 a_2$, millest saame võrduse $a = p_1 p_2 a_2$.

- Jätkame analoogiliselt. Kui a_2 on algarv, siis koosneb arvu a algteguriteks lahutus kolmest tegurist p_1, p_2 ja a_2. Vastasel juhul leidub selle vähim algtegur p_3 ja tegur $a_3 < a_2$, et kehtib võrdus $a_2 = p_3 a_3$, millest saame võrduse $a = p_1 p_2 p_3 a_3$.
- Kuna $a > a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > 1$, siis kirjeldatud protsess on lõplik. See tähendab, et mingil hetkel saame mingi positiivse täisarvu k korral võrduse $a_{k-2} = p_{k-1} a_{k-1}$, kus p_{k-1} on arvu a_{k-2} vähim algtegur ja a_{k-1} on selle arvu tegur, mis osutub algarvuks. Tähistades algarvu a_{k-1} sümboliga p_k, saame, et saab arvu a esitada algtegurite $p_1, p_2, \ldots, p_k$ korrutisena

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k.$$

Nüüd tõestame, et arvu a algteguriteks lahutus on ühene tegurite järjekorra täpsuseni. Selleks oletame, et ühest suurem täisarv a esitub algarvude korrutisena kahel viisil:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \qquad \text{ja} \qquad a = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_l,$$

kus k ja l on positiivsed täisarvud. Eelnevalt teame, et kui mingi algarv jagab täisarvude korrutist, siis see jagab vähemalt ühte selle korrutise teguritest. Lisaks sellele on lihtne näha, et kui mingi algarv jagab mingit teist algarvu, siis need algarvud peavad olema omavahel võrdsed.

Üldisust kitsendamata oletame, et $k \leqslant l$, ja vaatleme võrdust

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_l.$$

Kuna algarv p_1 jagab võrduse vasakul poolel olevat korrutist, siis see jagab ka võrduse paremal poolel olevat korrutist. Järelikult see jagab vähemalt ühte selle korrutise teguritest. Üldisust kitsendamata ütleme, et see jagab algarvu q_1. Et p_1 ja q_1 on algarvud, siis tingimusest $p_1 \mid q_1$ järeldub, et $p_1 = q_1$, ning vaadeldav võrdus teisendub kujule

$$p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_2 \cdot \ldots \cdot q_l.$$

Rakendades analoogilist mõttekäiku, iga $i = 2, 3, \ldots, k$ korral saame, et algarv p_i jagab algarvu q_i, millest $p_i = q_i$.

Juhul kui $k < l$ saame lõpuks võrduse

$$1 = q_{k+1} \cdot \ldots \cdot q_l,$$

mis on võimatu, kuna iga algarv on arvust 2 mitteväiksem.

Juhul $k = l$ saame, et arvu a esitused $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ ja $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_l$ on ühesugused, millest järeldubki, et arvu a algteguriteks lahutus on ühene tegurite järjekorra täpsuseni. $\square$

Kuna aritmeetika põhiteoreemist järeldub, et iga positiivne täisarv on üheselt esitatav algtegurite korrutisena, siis saame üldiselt seda esitust defineerida.

Definitsioon 4. Olgu n positiivne täisarv. Olgu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ühest suurema positiivse täisarvu a kõik paarikaupa erinevad algtegurid. Olgu $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sellised positiivsed täisarvud, et kehtib võrdus

$$a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{k_{n-1}} \cdot p_n^{k_n}.$$

Saadud võrduse paremal poolel olevat avaldist nimetatakse ühest suurema positiivse täisarvu *a kanooniliseks kujuks*.

Märkused ja näited definitsiooni kasutamisest:

- Kui definitsioonis 4 toodud tingimustele juurde lisada tingimus

  $$p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_{n-1} < p_n,$$

  st järjestada kõik algtegurid näiteks kasvamise järjekorras, siis positiivse täisarvu a kanooniline kuju $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$ on üheselt määratud.

  Näiteks arvu 72 kanoonilist esitust saab kirjutada kas kujul $2^3 \cdot 3^2$ või kujul $3^2 \cdot 2^3$. Juhul kui lisaks nõuame, et algtegurid oleksid järjestatud alates kõige väiksemast, siis arvu 72 kanooniline esitus oleks ühesel kujul $2^3 \cdot 3^2$.

- Mõningatel juhtudel on tarvis positiivse täisarvu kanoonilise kuju mõistet laiendada, lubades korrutada kanoonilist kuju teiste algarvudega astmes 0. See võte lubab kirjutada kahe erineva arvu "laiendatud" kanoonilised kujud, mis koosnevad ühesugustest algteguritest. Näiteks arvude $45 = 3^2 \cdot 5$ ja $54 = 2 \cdot 3^3$ kanoonilistes kujudes on erinevaid algtegureid. Et mõlemas kanoonilises esituses oleksid ühesugused algtegurid, võime teisendada mõlema arvu kanoonilised esitused "laiendatud" kujudele järgmiselt:

  $$45 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \qquad \text{ja} \qquad 54 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^0.$$

Näide 5. Leiame kõik sellised mittenegatiivsete täisarvude kolmikud (a, b, c), mille korral

$$24^a \cdot 6^b \cdot 8^c = 3456.$$

Lahutades astmete alused ja arvu 3456 algteguriteks, võime võrduse ümber kirjutada kujul

$$(2^3 \cdot 3)^a \cdot (2 \cdot 3)^b \cdot (2^3)^c = 2^7 \cdot 3^3.$$

Kasutades järgmisi astmete omadusi

$$(ab)^n = a^n b^n, \qquad (a^m)^n = a^{mn} \qquad \text{ja} \qquad a^m a^n = a^{m+n},$$

teisendame saadud võrduse kujule

$$2^{3a+b+3c} \cdot 3^{a+b} = 2^7 \cdot 3^3.$$

Selleks, et saadud võrdus kehtiks, peavad aritmeetika põhiteoreemi põhjal algtegurite astmed võrduse vasakul ja paremal poolel olema vastavalt võrdsed. Seega peavad kehtima seosed

$$3a + b + 3c = 7 \qquad \text{ja} \qquad a + b = 3.$$

Lahutades esimesest võrdusest teise, saame, et mittenegatiivsete täisarvude a ja c korral peab kehtima võrdus $2a + 3c = 4$, millest järeldub, et $a = 2$ ja $c = 0$. Järelikult $b = 3 - a = 1$.

Kokkuvõttes saame, et ülesande tingimust rahuldab ainult üks mittenegatiivsete täisarvude kolmik $(a, b, c) = (2, 1, 0)$.

Järgmises lauses anname kanooniliste esituste põhjal piisava ja tarviliku tingimuse selleks, et üks täisarv jagaks teist täisarvu.

Olgu a, b ja n positiivsed täisarvud. Olgu $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$ ja $p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_n^{l_n}$ vastavalt arvude a ja b "laiendatud" kanoonilised kujud, kus $p_1, p_2, \ldots, p_n$ on paarikaupa erinevad algarvud ning iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral on täisarvud k_i ja l_i sellised, et $k_i \geqslant 0$ ja $l_i \geqslant 0$.

Lause 6. *Tingimus $a \mid b$ kehtib parajasti siis, kui iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral $k_i \leqslant l_i$.*

Tõestus. Alustame tarvilikkuse tõestamisega. Olgu $a \mid b$. Jaguvuse definitsiooni põhjal saame, et leidub selline positiivne täisarv c, et kehtib võrdus

$$b = a \cdot c \quad \text{ehk} \quad p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_n^{l_n} = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n} \cdot c.$$

Ilmselt ei saa arvu c kanoonilises kujus olla ühtegi algtegurit, mis erineks arvudest $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Seega olgu $c = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_n^{m_n}$, kus iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral on $m_i \geqslant 0$ täisarv. Kasutades nüüd võrdust $b = ac$ ja astmete omadust, saame seose

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n} \cdot p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_n^{m_n} = p_1^{k_1+m_1} p_2^{k_2+m_2} \ldots p_n^{k_n+m_n} = ac = b = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_n^{l_n}.$$

Aritmeetika põhiteoreemist teame, et iga täisarvu algteguriteks lahutus on ühene, seega sellest, et arv b on esitatav nii kujul $p_1^{k_1+m_1} p_2^{k_2+m_2} \ldots p_n^{k_n+m_n}$, kui ka kujul $p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_n^{l_n}$, peab iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral kehtima võrdus

$$p_i^{k_i+m_i} = p_i^{l_i},$$

millest järeldub võrdus $k_i + m_i = l_i$. Viimasest võrdusest järeldub ülesande väide, kuna iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral kehtib võrratus

$$k_i \leqslant k_i + m_i = l_i.$$

Tõestame nüüd piisavuse. Kehtigu $k_i \leqslant l_i$ iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral. Siis kehtivad seosed

$$l_i - k_i \geqslant 0.$$

Seega $p_1^{l_1-k_1} p_2^{l_2-k_2} \ldots p_n^{l_n-k_n}$ on positiivne täisarv. Nüüd võrduse

$$p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_n^{l_n} = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n} \cdot p_1^{l_1-k_1} p_2^{l_2-k_2} \ldots p_n^{l_n-k_n}$$

kehtivusest järeldub tingimus $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n} \mid p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_n^{l_n}$ ehk $a \mid b$. $\square$

Näited aritmeetika põhiteoreemi ja lause 6 kasutamisest:

- Arv $72 = 2^3 \cdot 3^2$ jagub näiteks arvudega

  $$12 = 2^2 \cdot 3 \qquad \text{ja} \qquad 18 = 2 \cdot 3^2,$$

  kuna arvude 12 ja 18 ühegi algteguri astmenäitaja ei ületa arvu 72 vastava algteguri astmenäitajat. Arv 72 ei jagu näiteks arvuga $16 = 2^4$, kuna arvu 72 algteguri 2 astmenäitaja 3 on väiksem, kui arvu 16 sama algteguri 2 astmenäitaja 4.

- Kui mingi arv jagub arvudega 12 ja 18, siis see ei pruugi jaguda arvuga 72, kuna jaguvusest arvudega 12 ja 18 järeldub, et vaadeldava arvu kanoonilises esituses peavad algtegurite 2 ja 3 astmenäitajad olema võrdsed vähemalt 2-ga. Seega näiteks arvud

  $$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{ja} \qquad 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

  jaguvad mõlema arvuga 12 ja 18, kuid ei jagu arvuga 72.

Näide 7. Kuuest arvust 18, 28, 45, 50, 80 ja 98 valime välja kolm arvu nii, et nende korrutis jaguks teiste arvude korrutisega.
Leiame kõigepealt antud kuue arvu korrutise kanoonilise kuju:

$$\begin{aligned} 18 \cdot 28 \cdot 45 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 98 &= (2 \cdot 3^2) \cdot (2^2 \cdot 7) \cdot (3^2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5^2) \cdot (2^4 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 7^2) = \\ &= 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^3. \end{aligned}$$

Lause 6 põhjal saame nüüd väita, et kolme valitud arvu korrutis peab olema kujul

$$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d,$$

kus $a \geqslant 5$, $b \geqslant 2$, $c \geqslant 2$ ja $d \geqslant 2$. Järelikult valitud kolme arvu seas peavad kindlasti olema järgmised arvud:

1) 98, kuna vastasel juhul $d \leqslant 1$;

2) 80, kuna vastasel juhul $a \leqslant 4$;

3) 45, et mõlemad algtegurid 3 ja 5 oleksid vähemalt ruudus.

Kokkuvõttes saame jagatise

$$\frac{98 \cdot 80 \cdot 45}{50 \cdot 28 \cdot 18} = \frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} = 2 \cdot 7 = 14.$$

Näide 8. Leiame kahe positiivse täisarvu a ja b summa, kui arvude a ja b korrutis on 1000 ning kumbki arvudest a ja b ei jagu arvuga 10.
Kuna arvu 1000 kanooniline kuju on $2^3 \cdot 5^3$ ja arvu 10 kanooniline kuju on $2 \cdot 5$, siis arvu 1000 tegur ei jagu 10-ga parajasti siis, kui selle kanooniline esitus on kas kujul 2^k, kus $0 \leqslant k \leqslant 3$, või kujul 5^l, kus $0 \leqslant l \leqslant 3$.
Üldisust kitsendamata, oletame, et

$$a = 2^k \quad \text{ja} \quad b = 5^l, \qquad \text{kus} \qquad 0 \leqslant k \leqslant 3 \quad \text{ja} \quad 0 \leqslant l \leqslant 3.$$

Kuna arvude a ja b korrutis võrdub 1000-ga, siis peab kehtima võrdus

$$a \cdot b = 1000 \qquad \text{ehk} \qquad 2^k \cdot 5^l = 2^3 \cdot 5^3.$$

Aritmeetika põhiteoreemi 3 põhjal saame, et võrdus kehtib parajasti siis, kui $k = 3$ ja $l = 3$. Järelikult $a = 2^3 = 8$ ja $b = 5^3 = 125$ ning

$$a + b = 8 + 125 = 133.$$

Näide 9. Leiame, kui palju on erinevaid positiivsete täisarvude kolmikuid (a,b,c), mis rahuldavad kahte järgmist omadust:

- arvude a, b ja c korrutis võrdub arvuga 1000;
- arv a jagab arvu b ja arv b jagab arvu c.

Kuna igaüks arvudest a, b ja c on arvu $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ tegur, siis need on kujul

$$a = 2^{k_1} \cdot 5^{l_1}, \quad b = 2^{k_2} \cdot 5^{l_2}, \quad c = 2^{k_3} \cdot 5^{l_3},$$

kus iga $i = 1,2,3$ korral $0 \leqslant k_i, l_i \leqslant 3$. Lausest 6 järeldub, et tingimus $a \mid b$ kehtib parajasti siis, kui $k_1 \leqslant k_2$ ja $l_1 \leqslant l_2$ ning $b \mid c$ parajasti siis, kui $k_2 \leqslant k_3$ ja $l_2 \leqslant l_3$. Seega saame, et peavad kehtima võrratused

$$0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3 \leqslant 3 \qquad \text{ja} \qquad 0 \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3 \leqslant 3.$$

Kuna $abc = 1000$, siis peab kehtima ka võrdus

$$(2^{k_1} \cdot 5^{l_1}) \cdot (2^{k_2} \cdot 5^{l_2}) \cdot (2^{k_3} \cdot 5^{l_3}) = 2^{k_1+k_2+k_3} \cdot 5^{l_1+l_2+l_3} = 2^3 \cdot 5^3,$$

millest aritmeetika põhiteoreemi põhjal järelduvad võrdused

$$k_1 + k_2 + k_3 = 3 \qquad \text{ja} \qquad l_1 + l_2 + l_3 = 3.$$

Eespool saadud võrratusi arvestades on lihtne näha, et mõlemale kolmikule (k_1,k_2,k_3) ja (l_1,l_2,l_3) võib vastata ainult üks järgmistest kolmikutest $(0,0,3)$, $(0,1,2)$ või $(1,1,1)$. Kuna mõlema kolmiku (k_1,k_2,k_3) ja (l_1,l_2,l_3) väärtuste määramiseks on kolm erinevat võimalust, siis kolmiku (a,b,c) väärtuste määramiseks on kokku $3 \cdot 3 = 9$ erinevat võimalust.

Märkus. Ülesande tingimusi rahuldavad järgmised täisarvude kolmikud: $(1,1,1000)$, $(1,5,200)$, $(5,5,40)$, $(1,2,500)$, $(1,10,100)$, $(5,10,20)$, $(2,2,250)$, $(2,10,50)$ ja $(10,10,10)$.

Näide 10. Leiame vähima positiivse täisarvu a, mille korral $45^a \mid a^{45}$.

Tingimus, et arv 45^a jagab arvu a^{45}, tähendab seda, et mingi täisarvu n korral $a^{45} = 45^a \cdot n$. Kuna

$$45^a = 5^a \cdot 9^a = 5^a \cdot 3^{2a},$$

siis saame võrduse $a^{45} = 5^a \cdot 3^{2a} \cdot n$, millest järelduvad seosed $3 \mid a^{45}$ ja $5 \mid a^{45}$. Kuna 3 ja 5 on algarvud, siis jaguvuse omaduste põhjal saame nendest järeldada järgmised seosed $3 \mid a$ ja $5 \mid a$. Seega arv a jagub kindlasti arvuga $3 \cdot 5 = 15$.

Vähim positiivne täisarv, mis jagub 15-ga, ongi 15. Näitame, et arvu 15 korral ülesande tingimus on täidetud. Kuna kehtib võrdus

$$15^{45} = 3^{45} \cdot 5^{45} = (9^{15} \cdot 3^{15}) \cdot (5^{15} \cdot 5^{30}) = 45^{15} \cdot (3^{15} \cdot 3^{15}),$$

siis $45^{15} \mid 15^{45}$.

Näide 11. Leiame kõik arvust 100 väiksemad positiivsed täisarvud a, mille korral mõlemad arvud $\frac{a}{72}$ ja $\frac{72}{a}$ on lõplikud kümnendmurrud.

Mis tahes murd $\frac{m}{n}$ esitub lõpliku kümnendmurruna parajasti siis, kui leiduvad sellised täisarvud k ja l, et kehtib võrdus

$$\frac{m}{n} = \frac{k}{10^l}.$$

Kasutame seda omadust etteantud murdude jaoks. Et $\frac{a}{72}$ on lõplik kümnendmurd, peavad leiduma sellised täisarvud k ja l, et kehtib võrdus

$$\frac{a}{72} = \frac{k}{10^l} \quad \text{ehk} \quad a \cdot 10^l = 72k.$$

Kuna arv 72 esitub kanoonilisel kujul $2^3 \cdot 3^2$, siis saadud võrdusest võime järeldada tingimuse $3^2 \mid a$ ehk $9 \mid a$, kuna arvud 9 ja 10 on ühistegurita. Seega jaguvuse definitsiooni põhjal leidub selline positiivne täisarv b, et $a = 9b$.

Vaatleme nüüd murdu $\frac{72}{a}$. Et see on samuti lõplik kümnendmurd, leiduvad sellised täisarvud m ja n, et kehtib võrdus

$$\frac{72}{a} = \frac{m}{10^n}.$$

Teisendades seda võrdust kujule

$$\frac{m}{10^n} = \frac{m}{2^n \cdot 5^n} = \frac{72}{a} = \frac{72}{9b} = \frac{8}{b} = \frac{2^3}{b},$$

saame, et kehtib võrdus $b \cdot m = 2^{n+3} \cdot 5^n$, millest järeldub, et arv b avaldub kujul $2^c \cdot 5^d$ mingite mittenegatiivsete täisarvude c ja d korral.

Võrratuse $0 < a = 9b < 100$ kehtivusest järeldub arvu b hinnang $1 \leqslant b \leqslant 11$. Arvestades saadud hinnangut ja võrdust $b = 2^c \cdot 5^d$ saame, et arvu b valikuks on kuus erinevat võimatust: 1, 2, 4, 5, 8 ja 10. Arvu a vastavateks väärtusteks on siis arvud 9, 18, 36, 45, 72 ja 90.

Näide 12. Olgu a ja b positiivsed täisarvud. Leiame avaldise $\frac{a^2+b^2}{ab}$ kõikvõimalikud täisarvulised väärtused.

Kui $\frac{a^2+b^2}{ab}$ on täisarv, siis ab on arvu a^2+b^2 tegur, kust näeme, et a on arvu b^2 tegur ning b on arvu a^2 tegur. Seega peavad arvude a ja b kanoonilised esitused sisaldama ühtesid ja samu algtegureid.

Näitame nüüd, et ka iga algteguri astendaja arvude a ja b kanoonilistes esitustes peab olema üks ja sama, st $a = b$. Oletame vastuväiteliselt, et $a \neq b$, mis tähendab, et $a = p^k a_1$ ja $b = p^l b_1$, kus $k \neq l$ ning arvud a_1 ja b_1 ei jagu algarvuga p. Üldisust kitsendamata ütleme, et $k > l$.

Seega arvud ab ja a^2 jaguvad arvuga p^{k+l}, kuid arv b^2 sellega ei jagu (jagub ainult arvuga p^{2l}, kus $2l = l + l < k + l$). Sellisel juhul $ab \nmid a^2 + b^2$, mis on vastuolus ülesande tingimusega. Järelikult $a = b$, st

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{2a^2}{a^2} = 2.$$

Näide 13. Leiame 7 sellist täisarvu, millest ükski ei jagu ühegi teise arvuga ja millest igaühe ruut jagub iga teise arvuga.

Olgu $p_1, p_2, \ldots, p_7$ erinevad algarvud. Iga $i = 1, 2, \ldots, 7$ korral vaatleme arvu a_i, mille kanoonilises esituses on kõik algarvud $p_1, p_2, \ldots, p_7$ esimeses astmes, välja arvatud p_i, mis on teises astmes. Teisisõnu,

$$\begin{aligned}
a_1 &= p_1^2 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7;\\
a_2 &= p_1 p_2^2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7;\\
&\ldots\\
a_6 &= p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6^2 p_7;\\
a_7 &= p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7^2.
\end{aligned}$$

Tõestame nüüd, et arvud $a_1, a_2, \ldots, a_7$ rahuldavad ülesande mõlemat tingimust. Kõigepealt näitame, et nende arvude seas ei leidu kahte arvu, millest üks jagub teisega. Olgu a_k ja a_l sellised kaks erinevat arvu hulgast $\{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$, et $a_k < a_l$. Sellisel juhul piisab näidata, et $a_k \nmid a_l$. Lausest 6 järeldub, et selleks, et arv a_k jagaks arvu a_l, peavad kõik arvu a_k kanoonilises esituses olevate algtegurite astmenäitajad olema mittesuuremad, kui arvu a_l kanoonilises esituses olevate samade algtegurite astmenäitajad. Kuna arvu a_k kanoonilises esituses on algtegur p_k ruudus ja arvu a_l kanoonilises esituses on algtegur p_k esimeses astmes, siis $a_k \nmid a_l$.

Näitame nüüd, et hulga $\{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$ erinevate arvude a_k ja a_l korral kehtivad tingimused $a_k \mid a_l^2$ ja $a_l \mid a_k^2$. Üldisust kitsendamata ütleme, et $k < l$, ja paneme kirja arvude a_k, a_l, a_k^2 ja a_l^2 kanoonilised kujud:

$$\begin{aligned}
a_k &= p_1 \dots p_{k-1} p_k^2 p_{k+1} \dots p_{l-1} p_l p_{l+1} \dots p_7; \\
a_l &= p_1 \dots p_{k-1} p_k p_{k+1} \dots p_{l-1} p_l^2 p_{l+1} \dots p_7; \\
a_k^2 &= p_1^2 \dots p_{k-1}^2 p_k^4 p_{k+1}^2 \dots p_{l-1}^2 p_l^2 p_{l+1}^2 \dots p_7^2; \\
a_l^2 &= p_1^2 \dots p_{k-1}^2 p_k^2 p_{k+1}^2 \dots p_{l-1}^2 p_l^4 p_{l+1}^2 \dots p_7^2.
\end{aligned}$$

Näeme, et arvude a_k^2 ja a_l^2 kanoonilistes esitustes olevate algtegurite astmenäitajad on mitteväiksemad, kui vastavalt arvude a_l ja a_k kanoonilistes esitustes olevate samade algtegurite astmenäitajad. Seega lause 6 põhjal saame väita, et tingimused $a_k \mid a_l^2$ ja $a_l \mid a_k^2$ kehtivad.

Märkus. Vastuseks sobivad näiteks järgmised täisarvud:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17, & a_5 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17, \\
a_2 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17, & a_6 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17, \\
a_3 &= 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17, & a_7 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17^2. \\
a_4 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17, & &
\end{aligned}$$

Näide 14. Leiame suurima positiivse täisarvu n, mille korral saame positiivsete täisarvude 1 kuni 100 hulgast valida välja n arvu nii, et ükski valitud arvudest ei jagu ühegi teise valitud arvuga.

Ilmselt kui $n = 50$, siis valides n arvu $51, 52, \dots, 100$ saame, et ükski neist arvudest ei jagu ühegi teisega, kuna neist kõige suurem arv 100 on väiksem kui kahekordne vähim arv $2 \cdot 51 = 102$.

Näitame, et $n \geqslant 51$ korral leiduvad valitud n arvu seas sellised kaks arvu, millest üks jagub teisega.

Olgu valitud arvud $b_1, b_2, \dots, b_n$ ning olgu iga $i = 1, 2, \dots, n$ korral c_i algarvu 2 astendaja arvu b_i kanoonilises esituses, st $b_i = 2^{c_i} \cdot d_i$, kus d_i on ilmselt paaritu arv.

Et $1 \leqslant d_i \leqslant 99$, siis on arvu d_i valiku jaoks 50 erinevat võimalust ning $n \geqslant 51$ korral leiduvad sellised indeksid i ja j, et $d_i = d_j$ ja $c_i > c_j$ (Dirichlet printsiibi põhjal). Sellisel juhul aga arv $b_i = 2^{c_i} \cdot d_i$ jagub arvuga $b_j = 2^{c_j} \cdot d_j$.

Järelikult saab arvudest 1 kuni 100 valida välja ülimalt 50 positiivset täisarvu nii, et ükski valitud arvudest ei jagu ühegi teise valitud arvuga.

Ülesanne 15. Olgu täisarv $n \geqslant 3$.

a) Leida n erinevat positiivset täisarvu nii, et neist mis tahes $n-1$ täisarvu korrutis jaguks ülejäänud arvuga.

b) Leida n erinevat positiivset täisarvu nii, et ükski neist ei jaguks ühegi teise arvuga ning neist mis tahes $n-1$ täisarvu korrutis jaguks ülejäänud arvuga.

Lahendus:

a) Olgu p suvaline algarv. Tõestame, et arvud

$$p,\ p^2,\ p^3,\ \ldots,\ p^{n-1},\ p^n$$

rahuldavad ülesande tingimust. Selleks peame näitama, et mis tahes täisarvu $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ korral kehtib vajalik tingimus

$$p^k \mid p \cdot p^2 \cdot \ldots \cdot p^{k-1} \cdot p^{k+1} \cdot \ldots \cdot p^{n-1} \cdot p^n.$$

b) Olgu p ja q mis tahes erinevad algarvud. Tõestame, et arvud

$$pq^n,\ p^2q^{n-1},\ p^3q^{n-2},\ \ldots,\ p^{n-1}q^2,\ p^nq$$

rahuldavad ülesande tingimust. Selleks kõigepealt näitame, et ükski neist ei jagu ühegi teise arvuga:

Lõpuks näitame, et neist mis tahes $n-1$ täisarvu korrutis jagub ülejäänud täisarvuga:

Teame, et kui mis tahes ühest suurema positiivse täisarvu kanoonilises esituses järjestada seal olevad algtegurid näiteks kasvamise järjekorras, siis selle täisarvu kanooniline kuju on üheselt määratud. Kirjeldatud võtet nimetame *algtegurite järjestamismeetodiks* ja näitame selle rakendamisvõimalust järgmise ülesande lahendamisel.

Näide 16. Olgu n mis tahes positiivne täisarv, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ erinevad algarvud ja $k_1, k_2, \ldots, k_n$ suvalised positiivsed täisarvud. Olgu

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n} \quad \text{ja} \quad b = (p_1+1)^{k_1}(p_2+1)^{k_2} \ldots (p_n+1)^{k_n}.$$

Leiame täisarvu $a < 200$ kõikvõimalikud väärtused, mille korral kehtib tingimus $a \mid b$.

Ülesande lahendamisel kasutame algtegurite järjestamismeetodit. Selleks võime üldisust kitsendamata oletada, et algarvud $p_1, p_2, \ldots, p_n$ on järjestatud alates kõige väiksemast: $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$.

Sellisel juhul osutub p_n etteantud algarvudest suurimaks algarvuks. Juhul kui $p_n = 2$ saame, et mingi positiivse täisarvu k_1 korral kehtivad võrdused $a = 2^{k_1}$ ja $b = 3^{k_1}$, millest ilmselt $a \nmid b$.

Oletame, et $p_n > 3$. Tingimusest $a \mid b$ järeldub, et peab kehtima ka tingimus $p_n^{k_n} \mid b$, millest omakorda järeldub tingimus $p_n \mid b$. Näitame, et saadud tingimus ei saa kehtida.

Kuna p_n on algarv, siis peab leiduma arvu b tegur, mille algteguriks on p_n. Kõik arvu b tegurid on kujul $p_i + 1$, kus $i = 1, 2, \ldots, n$. Kui $i < n$, siis ilmselt $p_i + 1 < p_n$ (kuna kolmest suuremate algarvude vahe on vähemalt 2). Juhul kui $i = n$ saame, et arvud $p_i + 1$ ja p_n on järjestikused kolmest suuremad täisarvud, mis on ilmselt ühistegurita. Seega $p_n > 3$ korral $a \nmid b$.

Järelikult $p_n = 3$ on algarvu p_n ainus võimalik väärtus. Selle korral on arvude a ja b kujud järgmised:

$$a = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \qquad \text{ja} \qquad b = 3^{k_1} \cdot 4^{k_2} = 2^{2k_2} \cdot 3^{k_1}.$$

Et kehtiks tingimus $a \mid b$ peavad lause 6 põhjal kehtima võrratused

$$k_1 \leqslant 2k_2 \qquad \text{ja} \qquad k_2 \leqslant k_1,$$

kust saame võrratuse $k_2 \leqslant k_1 \leqslant 2k_2$. Nüüd saame leida kõik arvust 200 väiksemad arvud a, mis rahuldavad ülesande tingimusi.

- Juhul $k_2 = 1$ saame võrratuse $1 \leqslant k_1 \leqslant 2$, millest järeldub, et arvu k_1 võimalikeks väärtusteks on kas 1 või 2. Esimesel juhul $k_1 = 1$ saame arvu $a = 2^1 \cdot 3^1 = 6$ ja teisel juhul $k_1 = 2$ saame arvu $a = 2^2 \cdot 3^1 = 12$.

- Juhul $k_2 = 2$ saame, et arvu k_1 võimalikeks väärtusteks on arvud 2, 3 ja 4. Vastavateks a väärtusteks on siis arvud $2^2 \cdot 3^2 = 36$, $2^3 \cdot 3^2 = 72$ ja $2^4 \cdot 3^2 = 144$.

- Juhul $k_2 \geqslant 3$ saame, et arvud k_1 ja k_2 on mõlemad võrdsed vähemalt 3-ga. Sel juhul aga saame $a \geqslant 2^3 \cdot 3^3 = 216 > 200$, mis on vastuolus tingimusega $a < 200$.

Järelikult rahuldab ülesande tingimusi viis arvust 200 väiksemat positiivset täisarvu 6, 12, 36, 72 ja 144.

Järgmisena kasutame nn *täisruudu määramise* meetodit, mis tugineb järgmisele lihtsale faktile: mis tahes täisarv on mingi täisruut parajasti siis, kui selle kanoonilises esituses olevad algtegurid on kõik paarisastmes.

Näide 17. Leiame kõige väiksema positiivse täisarvu, millega saab korrutada arvu

$$12 \cdot 21 \cdot 36 \cdot 45 \cdot 54 \cdot 63,$$

et tekiks mingi täisarvu ruut.

Kõigepealt leiame antud korrutise kanoonilise kuju:

$$\begin{aligned} 12 \cdot 21 \cdot 36 \cdot 45 \cdot 54 \cdot 63 &= (2^2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 7) \cdot (2^2 \cdot 3^2) \cdot (3^2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3^3) \cdot (3^2 \cdot 7) = \\ &= 2^5 \cdot 3^{11} \cdot 5 \cdot 7^2. \end{aligned}$$

Nüüd kasutame täisruudu määramise meetodit, mis ütleb, et mis tahes täisruudu kanoonilises kujus peavad kõikide algtegurite astmenäitajad olema paarisarvulised. Järelikult peame etteantud arvu korrutama vähemalt arvuga $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Sellisel juhul saame võrduse

$$(2^5 \cdot 3^{11} \cdot 5 \cdot 7^2) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^6 \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \cdot 7^2 = (2^3 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7)^2.$$

Näide 18. Olgu $a = 123 \cdot b \cdot c$, kus b ja c on sellised positiivsed täisarvud, et $123 < b < c$. Leiame täisarvu c vähima võimaliku väärtuse, kui on teada, et a on mingi täisarvu ruut.

Kuna $123 = 3 \cdot 41$, siis selleks, et a oleks täisruut, peab vähemalt veel üks korrutise teguritest olema arvu 41 kordne. Järgmiseks arvu 41 kordseks on arv $41 \cdot 4 = 164$. Näitame, et see ongi korrutise a kõige suurema teguri c vähim võimalik väärtus.

Kuna

$$123 \cdot 164 = 2^2 \cdot 3 \cdot 41^2,$$

siis peame leidma arvu b, mis rahuldab kahte omadust:

$$123 < b < 164 \qquad \text{ja} \qquad b = 3d^2$$

mingi täisarvu d korral. Järelikult peab kehtima seos

$$123 < 3d^2 < 164 \qquad \text{ehk} \qquad 41 < d^2 < 55.$$

Selles vahemikus leidub vaid üks täisruut 49, seega $b = 3d^2 = 3 \cdot 49 = 147$. Kokkuvõttes saame, et

$$a = 123 \cdot 147 \cdot 164 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 41^2 = (2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 41)^2$$

ning arvu c vähim sobiv väärtus on tõepoolest 164.

Näide 19. Leiame kõikvõimalikud algarvude paarid (p, q), millede korral arv $(p+1)^q$ osutub mingi täisarvu ruuduks.

Juhul $q = 2$ saame, et mis tahes algarvu p korral kehtib võrdus

$$(p+1)^q = (p+1)^2,$$

millest järeldub, et mis tahes algarvu p korral rahuldavad kõik algarvude paarid kujul $(p, q) = (p, 2)$ ülesande tingimust.

Oletame nüüd, et $q > 2$. Kuna 2 on ainus paarisarvuline algarv, siis q on paaritu. Olgu $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$ arvu $p+1$ kanooniline kuju, kus $p_1, p_2, \dots, p_n$ on arvu $p+1$ kõikvõimalikud algtegurid ja $k_1, k_2, \dots, k_n$ positiivsed täisarvud. Seega peab kehtima võrdus

$$(p+1)^q = p_1^{qk_1} p_2^{qk_2} \dots p_n^{qk_n}.$$

Teame, et mis tahes täisruudu kanoonilises esituses on kõik algtegurid paarisastmes. Kuna q on paaritu arv, siis kõik arvud $k_1, k_2, \dots, k_n$ on paarisarvud. Järelikult on arvu $p+1$ kanoonilises esituses kõik astmenäitajad paarisarvulised, millest saame, et $p+1$ on ise mingi täisruut. Seega leidub selline täisarv a, et kehtib võrdus $p + 1 = a^2$. Saadud võrdusest avaldame algarvu p järgmiselt:

$$p = a^2 - 1 = (a-1)(a+1).$$

Kuna p on algarv, siis saadud seosest võime järeldada, et $a - 1 = 1$ ja $a + 1 = p$, millest saame, et $a = 2$ ja $p = 3$. Seega oleme saanud, et mis tahes algarvu $q > 2$ korral rahuldavad ülesande tingimust vaid kõik algarvude paarid kujul $(p, q) = (3, q)$.

Lahendame nüüd mõningad ülesanded faktoriaalide kohta. Tuletame meelde, et positiivse täisarvu a faktoriaaliks $a!$ nimetatakse a esimese positiivse täisarvu korrutist, st $a! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (a-1) \cdot a$.

Näide 20. Leiame positiivse täisarvu a vähima võimaliku väärtuse, mille korral arv $a!$ jagub arvuga 3456.

Lahutame arvu 3456 algteguriteks: $3456 = 2^7 \cdot 3^3$. Seega arvu $a!$ kanoonilises esituses peab olema vähemalt 7 kahte ja 3 kolme, st

$$a! = 2^b \cdot 3^c \cdot d,$$

kus $b \geqslant 7$, $c \geqslant 3$ ja d on positiivsed täisarvud.

Esimesed positiivsed täisarvud, mis sisaldavad algtegurina arvu 2, on arvud 2, $4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$ ja $8 = 2^3$. Kuna nimetatud arvude korrutis võrdub arvuga $2^7 \cdot 3$, siis arv 2^7 jagab arvu 8 faktoriaali. Järelikult $a \geqslant 8$.

Arvud 3, $6 = 2 \cdot 3$ ja $9 = 3^2$ on esimesed positiivsed täisarvud, mis sisaldavad algtegurina arvu 3. Kuna nimetatud arvude korrutis võrdub arvuga $2 \cdot 3^4$, siis arv 3^3 jagab arvu 9 faktoriaali. Järelikult $a \geqslant 9$.

Kokkuvõttes saame, et $a!$ jagub arvuga 3456 parajasti siis, kui $a \geqslant 9$. Järelikult arvu a vähimaks võimalikuks väärtuseks on arv 9.

Näide 21. Leiame, mitme nulliga lõpeb arvu 3456 faktoriaal.

Teame, et arv lõpeb täpselt n nulliga parajasti siis, kui see jagub arvuga 10^n, kuid ei jagu arvuga 10^{n+1}. Kuna $10 = 2 \cdot 5$, siis peame leidma arvu n suurima võimaliku väärtuse, mille korral kehtib tingimus $2^n \cdot 5^n \mid 3456!$.

On selge, et arvu 3456! kanoonilises esituses on algteguri 2 astmenäitaja suurem, kui algteguri 5 astmenäitaja. Seega piisab leida, millega võrdub arvu n suurim võimalik väärtus, mille korral kehtib tingimus $5^n \mid 3456!$.

Kuna $5^5 < 3456 < 5^6$, siis tuleb leida, mitu arvu alates 1-st kuni 3456-ni jagub arvudega 5, 5^2, 5^3, 5^4 ja 5^5. Kuna korrutises $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 3456$ jagub iga viies tegur 5-ga, siis vaadeldavas vahemikus on 5-ga jaguvaid arve kokku

$$\lfloor 3456 : 5 \rfloor = 691,$$

kus $\lfloor a \rfloor$ on reaalarvu a alumine täisosa (st suurim võimalik täisarv, mis ei ole reaalarvust a suurem). Analoogiliselt saame, et vaadeldavas vahemikus on vastavalt 5^2-, 5^3-, 5^4- ja 5^5-ga jaguvaid arve kokku

$$\lfloor 3456 : 5^2 \rfloor = 138, \quad \lfloor 3456 : 5^3 \rfloor = 27, \quad \lfloor 3456 : 5^4 \rfloor = 5 \quad \text{ja} \quad \lfloor 3456 : 5^5 \rfloor = 1.$$

Kokkuvõttes saame, et tingimuses $5^n \mid 3456!$ on arvu n suurim võimalik väärtus $691 + 138 + 27 + 5 + 1 = 862$. Seega arv 3456! lõpeb täpselt 862 nulliga.

Näide 22. Tõestame, et mis tahes positiivse täisarvu a korral on arvu $a!$ lõpus vähem kui $\frac{a}{4}$ nulli.

Lahutades korrutise $a! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot a$ algteguriteks, saame tegurite 2 arvuks

$$\left\lfloor \frac{a}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{2^4} \right\rfloor + \ldots$$

ja tegurite 5 arvuks

$$\left\lfloor \frac{a}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5^4} \right\rfloor + \ldots$$

Et mis tahes positiivse täisarvu b korral ilmselt kehtib võrratus $\frac{a}{2^b} > \frac{a}{5^b}$, siis

$$\left\lfloor \frac{a}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{2^3} \right\rfloor + \ldots > \left\lfloor \frac{a}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5^3} \right\rfloor + \ldots$$

ja arvu $a!$ lõpus on seega $\left\lfloor \frac{a}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5^3} \right\rfloor + \ldots$ nulli. Näitame nüüd, et saadud summa on arvust $\frac{a}{4}$ väiksem. Selleks kasutame lõpmatult kahaneva geomeetrilise jada summa valemit:

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{a}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5^3} \right\rfloor + \ldots &< \frac{a}{5^1} + \frac{a}{5^2} + \frac{a}{5^3} + \ldots = \frac{a}{5}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) = \\ &= \frac{a}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{a}{4}.\end{aligned}$$

Range võrratus kehtib siin sellepärast, et murrud $\frac{a}{5}$, $\frac{a}{5^2}$, $\frac{a}{5^3}$, jne ei saa ühegi fikseeritud arvu a korral olla kõik täisarvulised.

Näide 23. Leiame, millise faktoriaali saab eemaldada korrutisest

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 39! \cdot 40!$$

nii, et allesjäänud korrutis oleks võrdne mingi täisarvu ruuduga.

Kõigepealt uurime, mitu korda on iga täisarv alates arvust 2 kuni arvuni 40 tegurina esitatud vaadeldavas korrutises. Ei ole raske näha, et arv 2 on tegurina igas faktoriaalis alates teisest, arv 3 on igas faktoriaalis alates kolmandast jne. Seega kehtib võrdus

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot 38! \cdot 39! \cdot 40! = 1^{40} \cdot 2^{39} \cdot 3^{38} \cdot 4^{37} \cdot \ldots \cdot 38^3 \cdot 39^2 \cdot 40^1.$$

Kuna mis tahes täisarvu ruudu kanoonilises esituses peavad kõik algtegurid olema paarisastmes, siis teisendame saadud võrduse paremat poolt järgmisele kujule:
$$(1^{40} \cdot 2^{38} \cdot 3^{38} \cdot 4^{36} \cdot 5^{36} \cdot \ldots \cdot 38^2 \cdot 39^2) \cdot (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 38 \cdot 40).$$
Kuna kehtib võrdus
$$2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 38 \cdot 40 = 2^{20} \cdot (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20) = 2^{20} \cdot 20!,$$
siis vaadeldav korrutis $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 40!$ võrdub arvuga
$$(1^{40} \cdot 2^{38} \cdot 3^{38} \cdot 4^{36} \cdot 5^{36} \cdot \ldots \cdot 38^2 \cdot 39^2 \cdot 2^{20}) \cdot 20!$$
Saadud avaldis sulgudes on täisruut. Seega eemaldades antud korrutisest faktoriaali 20! saame, et allesjäänud korrutis on võrdne täisarvu ruuduga.

Märkus. Arv 20! ei ole ise mingi täisarvu ruut, sest selle algtegurid 11, 13, 17 ja 19 on esitatud selle arvu kanoonilises kujus esimeses astmes. Sellest saab näiteks järeldada, et arv $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 40!$ ei ole täisruut.

Lause 6 põhjal saame tõestada teoreemi, mille abil saame mis tahes positiivse täisarvu korral leida selle erinevate positiivsete tegurite arvu.

Teoreem 24. *Kui $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$ on positiivse täisarvu a kanooniline kuju, siis arvul a on kokku*
$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_n + 1)$$
erinevat positiivset tegurit (kaasa arvatud arv 1 ja arv a ise).

Tõestus. Olgu b arvu a suvaline tegur. Lause 6 ütleb, et $b \mid a$ parajasti siis, kui
$$b = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_n^{l_n},$$
kus iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral $0 \leqslant l_i \leqslant k_i$. Seega iga arvu l_i valikuks on täpselt $k_i + 1$ erinevat võimalust:
$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k_i - 1,\ k_i.$$
Sellest järeldubki teoreemi väide. □

Positiivse täisarvu a erinevate positiivsete tegurite arvu tähistatakse sümboliga $d(a)$. Näiteks arvul $135 = 3^3 \cdot 5$ on kokku
$$d(135) = (3 + 1)(1 + 1) = 4 \cdot 2 = 8$$
erinevat positiivset tegurit. Nendeks on arvud
$$3^0 \cdot 5^0 = 1,\ \ 3^0 \cdot 5^1 = 5,\ \ 3^1 \cdot 5^0 = 3,\ \ 3^1 \cdot 5^1 = 15,$$
$$3^2 \cdot 5^0 = 9,\ \ 3^2 \cdot 5^1 = 45,\ \ 3^3 \cdot 5^0 = 27 \text{ ja } 3^3 \cdot 5^1 = 135.$$

Näide 25. Tõestame, et mis tahes positiivsel täisarvul on paaritu arv erinevaid positiivseid tegureid parajasti siis, kui see on mingi täisarvu ruut.

Tõestame tarvilikkuse. Olgu a suvaline positiivne täisarv, millel on paaritu arv erinevaid positiivseid tegureid. Olgu $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$ arvu a kanooniline kuju. Teoreemist 24 teame, et arvul a on erinevaid positiivseid tegureid kokku

$$d(a) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_n + 1).$$

Mis tahes täisarvude korrutis on võrdne paaritu arvuga parajasti siis, kui selle iga tegur on paaritu. Seega iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral $k_i + 1$ on paaritu arv. Järelikult iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral k_i on paarisarv. Seega leiduvad sellised täisarvud c_i, et iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral kehtivad võrdused $k_i = 2c_i$. Nüüd saame, et kehtib võrdus

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n} = p_1^{2c_1} p_2^{2c_2} \ldots p_n^{2c_n} = \left(p_1^{c_1} p_2^{c_2} \ldots p_n^{c_n}\right)^2,$$

millest järeldub, et a on täisruut.

Tõestame piisavuse. Selleks oletame, et a on mingi täisarvu ruut. Kuna mis tahes täisarvu ruudu kanoonilises esituses peavad kõik algtegurid olema paarisastmelised, siis arvu a kanoonilise esituse saame kirja panna kujul

$$a = p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} \ldots p_n^{2k_n}.$$

Kasutades teoreemis 24 tõestatud valemit, saame, et arvul a on kokku

$$d(a) = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \ldots (2k_n + 1)$$

erinevat positiivset tegurit. Kuna saadud korrutise iga tegur on paaritu (kujul $2k + 1$), siis $d(a)$ on võrdne mingi paaritu arvuga.

Näide 26. Tõestame, et täisarvul $a = \underbrace{111\ldots111}_{33 \text{ numbrit}}$ on paarisarv erinevaid positiivseid tegureid.

Paneme tähele, et arv a jagub 3-ga, aga ei jagu 9-ga (sest numbrite summa on 33). Seega arvu a kanoonilises kujus on algtegur 3 astmes 1. Teisisõnu,

$$a = 3^1 \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}.$$

Kasutades teoreemi 24, saame, et

$$d(a) = (1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_n + 1) = 2 \cdot (k_2 + 1) \ldots (k_n + 1),$$

mis on igal juhul paarisarv.

Näide 27. Leiame vähima positiivse täisarvu, millel on täpselt 50 erinevat positiivset tegurit.

Olgu n positiivne täisarv ning olgu $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$ suvalise positiivse täisarvu a kanooniline kuju. Siis teoreemi 24 põhjal on arvul a täpselt

$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_n + 1)$$

erinevat positiivset tegurit. Seega otsitava arvu a korral peab see korrutis võrduma arvuga 50.

Et arv 50 lahutub maksimaalselt kolme arvust 1 suurema täisarvu korrutiseks (st $2 \cdot 5 \cdot 5$), siis $n \leqslant 3$ ja kõne alla tulevad ainult järgmised arvu a kujud:

$$p_1^{49}, \quad p_1 p_2^{24}, \quad p_1^4 p_2^9 \quad \text{ja} \quad p_1 p_2^4 p_3^4.$$

Ilmselt saavutame igal loetletud juhul vähima a väärtuse, kui valime võimalikult väikesed algtegurid ning seejuures väiksemad algarvud nendeks teguriteks, mille astendajad on suuremad. Seda arvestades saame järgmised arvu a võimalikud väärtused:

$$2^{49}, \quad 2^{24} \cdot 3, \quad 2^9 \cdot 3^4 \quad \text{ja} \quad 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5.$$

Nendest vähimaks arvuks osutub ilmselt arv $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 = 6480$.

Näide 28. Leiame kõik positiivsed täisarvud, mis jaguvad arvuga 30 ja millel on täpselt 30 erinevat positiivset tegurit.

Olgu $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$ otsitava positiivse täisarvu a kanooniline kuju. Teame, et arvul a on täpselt $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_n + 1)$ erinevat positiivset tegurit.

Lahutame arvu 30 algteguriteks: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Kui $30 \mid a$, siis arvu a kanoonilises esituses peab olema vähemalt kolm erinevat algtegurit. Järelikult $n \geqslant 3$. Teiselt poolt, peab kehtima võrdus

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_n + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 5,$$

millest järeldub, et korrutises $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_n + 1)$ ei tohi olla rohkem kui kolm tegurit, st $n \leqslant 3$. Kokkuvõttes saame, et $n = 3$ ja $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$.

Üldisust kitsendamata, saame võrdusest $(k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 5$ järeldada, et $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ ja $p_3 = 5$ ning arvude k_1, k_2 ja k_3 väärtusteks on arvud 1, 2 ja 4 mingis järjestuses. Kuna on erinevaid järjestusi täpselt 6, siis on ülesandel ka kuus erinevat vastust:

$$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^4 = 11250, \quad 2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 4050, \quad 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^4 = 7500,$$

$$2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^1 = 1620, \quad 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 1200, \quad 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 720.$$

Ülesanne 29. Leida, kui palju on selliseid positiivseid täisarve, mis jaguvad arvuga 1001 ning millel on täpselt 1001 erinevat positiivset tegurit.

Olgu n selline positiivne täisarv, millel on täpselt 1001 erinevat positiivset tegurit ja mis jagub 1001-ga.

Näitame, et arv n peab jaguma vähemalt kolme erineva algarvuga:

Järelikult peab arvu n kanooniline esitus olema kujul $7^a \cdot 11^b \cdot 13^c \cdot s$, kus $a, b, c > 0$ ja s on selline positiivne täisarv, mis ei jagu ühegagi algarvudest 7, 11 ja 13.

Ülesande tingimusest teame, et $d(n) = 1001$. Teiselt poolt saame leida $d(n)$ väärtuse arvu n kanoonilise esituse põhjal:

Tõestame, et $d(s) = 1$ ja leiame arvu s ainukese võimaliku väärtuse:

Leiame arvude a, b ja c kõikvõimalikud väärtused:

Tõestame, et kokku on 6 erinevat positiivset täisarvu, mis rahuldavad ülesande tingimusi:

Näide 30. Leiame kõik positiivsed täisarvud, millel on täpselt 6 erinevat positiivset tegurit, mille summa on 168.

Kõigepealt kasutame tegurite arvu valemit selleks, et kindlaks määrata, millisel kujul saab olla arv, millel on täpselt 6 erinevat positiivset tegurit. Kuna arvu 6 saab esitada ühest suuremate positiivsete täisarvude korrutisena kas kujul 6 või kujul $2 \cdot 3$, siis kõik arvud, millel on täpselt 6 erinevat positiivset tegurit, on kas kujul p^5 (kus p on mis tahes algarv) või kujul p^2q (kus p ja q on mis tahes erinevad algarvud).

Olgu a suvaline positiivne täisarv, millel on täpselt 6 erinevat positiivset tegurit.

- Juhul $a = p^5$ saame, et arvu a kõik positiivsed tegurid on kujul

  $$1, \ p, \ p^2, \ p^3, \ p^4, \ p^5.$$

  Järelikult peab kehtima võrdus

  $$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 168 \quad \text{ehk} \quad p(1 + p + p^2 + p^3 + p^4) = 167.$$

  Kuna 167 on algarv ning võrduse vasakul poolel olevad tegurid on mõlemad ühest suuremad täisarvud, siis võrdus ei saa kehtida. Seega ei leidu ühtegi arvu a kujul p^5, mille kõikide positiivsete tegurite summa oleks võrdne arvuga 168.

- Juhul $a = p^2q$ saame, et arvu a kõik positiivsed tegurid on kujul

  $$1, \ p, \ p^2, \ q, \ pq, \ p^2q.$$

  Järelikult peab kehtima võrdus

  $$1 + p + p^2 + q + pq + p^2q = 168 \quad \text{ehk} \quad (1 + p + p^2)(1 + q) = 168.$$

  Kuna $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ ja $1 + p + p^2$ on mis tahes algarvu p korral seitsmest mitteväiksem paaritu arv, siis arvu $1 + p + p^2$ väärtuseks saab olla kas 7 või $3 \cdot 7 = 21$.

  - Kui $1 + p + p^2 = 7$, siis $1 + q = 24$. Nendest võrdustest saame, et $p = 2$ ja $q = 23$. Kuna mõlemad väärtused on algarvulised, siis arv $2^2 \cdot 23 = 92$ rahuldab ülesande tingimusi.
  - Kui $1 + p + p^2 = 21$, siis $p = 4$ on kordarv, mis on vastuolus arvu p valikuga.

Järelikult ainult arv 92 vastab ülesande tingimustele, st ainult sellel arvul on täpselt 6 erinevat positiivset tegurit 1, 2, 4, 23, 46 ja 92, mille summa on 168.

Viimase näite lahendamisel oleme saanud, et täisarvu $a = p^2q$ erinevate positiivsete tegurite summa on kujul $(1 + p + p^2)(1 + q)$. Järgmisena sõnastame tulemuse, mille põhjal saab üldjuhul arvutada mis tahes täisarvu erinevate positiivsete tegurite summat.

Lause 31. *Kui $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$ on positiivse täisarvu a kanooniline kuju, siis arvu a kõikide erinevate positiivsete tegurite summa on*

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{k_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{k_2}) \ldots (1 + p_n + p_n^2 + \ldots + p_n^{k_n}).$$

Positiivse täisarvu a kõikide erinevate positiivsete tegurite summat tähistatakse sümboliga $S(a)$. Näiteks arvu $72 = 2^3 \cdot 3^2$ kõikide erinevate positiivsete tegurite summa on

$$S(72) = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2) = 15 \cdot 13 = 195.$$