TARTU ÜLIKOOL
teaduskool

DIOFANTILISED VÕRRANDID

Koostanud Hilja Afanasjeva

Armas lugeja!
Selles õppematerjalis tutvustatakse diofantilise võrrandi mõistet, koostatakse diofantilisi võrrandeid ning lahendatakse lihtsamate diofantiliste võrrandite abil huvitavaid tekstülesandeid. Nii omandate teadmisi, mis laiendavad teie silmaringi ja võivad olla abiks edukale esinemisele olümpiaadil.
Head õppimist!

Tutvume selle teemaga järgmise ülesande abil.

Näide 1. Jüri pidi lipsu eest maksma 19 eurot. Tal olid ainult 5-eurosed rahatähed, kuid müüjal oli tagasi anda vaid 2-euroseid münte. Kuidas saaks Jüri lipsu eest tasuda?

Ülesande põhiküsimus on selles, et meil on vaja teada saada, mitu 5-eurost rahatähte peab Jüri andma, et müüja saaks 2-euroseid münte nii tagasi anda, et lipsu eest oleks tasutud 19 eurot.

Olgu 5-euroste arv x ja 2-euroste arv y, siis on teksti põhjal võimalik koostada võrrand $5x-2y=19$.
Selles võrrandis on kaks tundmatut, mis peavad olema positiivsed täisarvud (rahatähtede arvud).
Kuidas sellist võrrandit lahendada?
Avaldame võrrandis selle tundmatu, mille kordaja on väiksem:
$2y=5x-19$, millest $y=\frac{5}{2}x-\frac{19}{2}=2\frac{1}{2}x-9\frac{1}{2}$.
Eraldame selles võrrandis osa, mis on täisarv (kokkuvõttes peab ju tundmatu y olema täisarv):
$y=2x+\frac{x}{2}-9-\frac{1}{2}=2x-9+\frac{x-1}{2}$, milles y, 2x ja 9 on täisarvud.

Viimane võrdus kehtib vaid juhul kui ka $\frac{x-1}{2}$ on täisarv.

Tähistame selle tähega t, seega $y=2x-9+t$, kus $t=\frac{x-1}{2}$.

Võrdusest $t=\frac{x-1}{2}$ saame $2t=x-1$ ja $x=2t+1$.

Kuna $x>0$, siis peab ka $2t+1>0$ ehk $t>-\frac{1}{2}$.

Avaldame nüüd ka tundmatu y t kaudu:
$y=2x-9+t=2(2t+1)-9+t=4t+2-9+t=5t-7$.

Kuna antud juhul ka $y>0$, siis peab $5t-7>0$ ehk $t>1\frac{2}{5}$.

Tingimustest $t>-\frac{1}{2}$ ja $t>1\frac{2}{5}$, saame teada, et täisarv t on suurem $1\frac{2}{5}$.

Seega saavad t väärtusteks olla kõik $1\frac{2}{5}$ suuremad täisarvud 2, 3, 4, … ja võrrandil $5x-2y=19$ on lõpmata palju lahendeid.

t	2	3	4	…
x = 2t + 1	5	7	9	…
y = 5t - 7	3	8	13	…

Taskuarvutil kontrollides selgub, et kõik leitud lahendid osutuvad sobivaks.
Seega eeldusel $x>0$ ja $y>0$, on võrrandi $5x-2y=19$ lahenditeks arvupaarid (5; 3), (7; 8), (9; 13), … ehk üldiselt (2t + 1; 5y – 7), kus t on positiivne $1\frac{2}{5}$ suurem täisarv.
Meie esialgse ülesande jaoks on ilmselt sobivaim esimene arvupaar (5; 3). Seega Jüri peaks andma 5 viieeurost rahatähte ja müüja peaks tagasi andma 3 kaheeurost münti.

Selles ülesandes oli võrrandi $5x-2y=19$ lahendamisel lisatingimus $x>0$ ja $y>0$ (rahatähtede arvud). Oletame, et seda lisatingimust pole ja t võib omada mistahes täisarvulisi väärtusi. Lahendite leidmiseks täidame tabeli:

t	…	-3	-2	-1	0	1	…
x = 2t + 1	…	-5	-3	-1	1	3	…
y = 5t - 7	…	-22	-17	-12	-7	-2	…

Siit saame lahenditeks arvupaarid (-5; -22), (-3; -17), (-1; -12), (1; -7), (3; -2), ….
Veenduge arvuti abil, et need arvupaarid samuti sobivad võrrandi $5x-2y=19$ lahenditeks.
Meil oli tegemist ühe võrrandiga, millel oli kaks tundmatut. Selline võrrand on **diofantiline võrrand**, seega võrrand $5x-2y=19$ on diofantiline võrrand.

Diofantiliseks võrrandiks nimetatakse mitme tundmatuga võrrandit, mille korral nõutakse vaid täisarvuliste lahendite leidmist. Lineaarse kahe tundmatuga diofantilise võrrandi üldkuju on $ax+by=c$, kus $a\neq 0$, $b\neq 0$ ja a, b, c on täisarvud, kusjuures SÜT(a, b) = 1.

Diofantiliste võrrandite lahendamine taandub üldiselt arvude jaguvuse probleemide uurimisele. Selliste võrrandite lahendamist uuris Aleksandria matemaatik Diophantose (elas 3. sajandil e.Kr), seepärast kutsutakse mitme tundmatuga võrrandeid ka diofantilisteks võrranditeks.

Näide 2. Lahendame diofantilise võrrandi $3x+5y=17$, kus x ja y on täisarvud.

Avaldame sellest võrrandist väiksema kordajaga tundmatu:
$3x=17-5y$, siit $x=\frac{17-5y}{3}=\frac{17}{3}-\frac{5}{3}y=5\frac{2}{3}-1\frac{2}{3}y.$
Eraldame selles osad, mis on kindlasti täisarvud.
$x=5+\frac{2}{3}-y-\frac{2y}{3}=5-y+\frac{2-2y}{3}=5-y+\frac{2(1-y)}{3}.$
Et x oleks täisarv, peab korrutis $2(1-y)$ jaguma arvuga 3. Kuna arv 2 ei jagu arvuga 3, peab $1-y$ jaguma arvuga 3 ehk $\frac{1-y}{3}=t$, kus t on täisarv.
Seega $1-y=3t$, millest $y=1-3t$.
Kui $y=1-3t$, siis $x=5-(1-3t)+2t=4+5t$.
Lahendite leidmiseks koostame tabeli, andest t väärtused -2, -1, 0, 1, 2, jne.

t	…	-2	-1	0	1	2	…
x = 4 + 5t	…	-6	-1	4	9	14	…
y = 1 – 3t	…	7	4	1	-2	-5	…

Võrrandi $3x+5y=17$ lahenditeks on seega arvupaarid (-6; 7); (-1; 4), (4; 1), (9; -2), (14; -5) jne ehk üldkujul (4 + 5t; 1 – 3t), kus t on täisarv.

Märkus. Selliseid y väärtusi, millal 1 – y jagub arvuga 3, võime leida ka lihtsalt proovimise teel ilma muutujat t kasutamata.

Näide 3. Lahendada diofantiline võrrand $7x-4y=5$.

Lahendus. $4y=7x-5$, siit $y=\frac{7}{4}x-\frac{5}{4}=1\frac{3}{4}x-1\frac{1}{4}=x+\frac{3x}{4}-1-\frac{1}{4}=x-1+\frac{3x-1}{4}.$
Et y oleks täisarv, peab $3x-1$ jaguma 4-ga.
Proovimise teel märkame, et $3x-1$ jagub 4-ga, kui x = -1, 3, 7, 11, jne.
Märkame, et tundmatu x väärtused suurenevad samm-sammult 4 võrra, seega võime üldkujul kirjutada, et $x=-1+4t$.

Vastavad tundmatu y väärtused on siis y = -3, 4, 11, 18, … ehk üldkujul $y=-3+7t$ (tundmatu y väärtused suurenesid samm-sammult 7 võrra).
Võrrandi lahendeiks on seega arvupaarid (-1; -3), (3; 4), (7; 11), (11; 18), … ehk üldkujul $(-1+4t;-3+7t)$, kus t on täisarv.

Näide 4. Matemaatikaülesannete lahendamise võistluse lõputseremooniaks tuli korraldajal osta 50 euro eest 100 mitmesugust maiustust. Valitud maiustuste hinnad olid järgmised.
Karp assortii komme, 5 eurot karp.
Tahvel šokolaadi „Nurr“, 1 euro tükk.
Pulgakommid, 10 senti tükk.
Mitu maiustust sai korraldaja osta igast nimetatud liigist?

Tähistades assortii karbi x, šokolaadi „Nurr“ y ja pulgakommi z, saame 3 tundmatust ja 2 võrrandist koosneva võrrandisüsteemi:
$\begin{cases}500x+100y+10z=5000\\x+y+z=100\end{cases}$.
Püüame seda võrrandisüsteemi teisendada nii, et saame kahe tundmatuga diofantilise võrrandi.
$\begin{cases}500x+100y+10z=5000\,|:10\\x+y+z=100\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}50x+10y+z=500\\x+y+z=100\end{cases}$.
Lahutades esimesest võrrandist teise, saamegi kahe tundmatuga diofantilise võrrandi $49x+9y=400$.
Lahendame selle võrrandi analoogiliselt eelmistega, kusjuures siin x, y ja z on positiivsed täisarvud.
$9y=400-49x$
$y=\frac{400-49x}{9}=\frac{400}{9}-\frac{49}{9}x=44\frac{4}{9}-5\frac{4}{9}x=44-5x+\frac{4}{9}-\frac{4x}{9}=44-5x+\frac{4(1-x)}{9}$.
Arv 44 ja liige 5x on täisarvud. Korrutises $4(1-x)$ arv 4 ei jagu 9-ga, seega peab selles korrutises $1-x$ jaguma 9-ga ehk $\frac{1-x}{9}=t$, kus t on täisarv.
Seega $1-x=9t$, millest $x=1-9t$.
Kui $x=1-9t$, siis $y=44-5(1-9t)+4t=39+49t$.
Kuna praegu tundmatud x ja y on positiivsed täisarvud, siis saame lahendite hulka kahandada tingimustest
$\begin{cases}1-9t>0\\39+49t>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t<\frac{1}{9}\\t>-\frac{39}{49}\end{cases}$, mille ainus täisarvuline lahend on $t=0$.
Seega $x=1-9\cdot0=1$ ja $y=39+49\cdot0=39$.
Et esialgse teise võrrandi põhjal $z=100-x-y$, siis täisarvu t kaudu
$z=100-(1-9t)-(39+49t)=100-1+9t-39-49t=60-40t$, seega $z=60-40\cdot0=60$.
Saime, et 50 euro eest saab tseremoonia korraldaja osta 1 karbi assortii kommi, 39 šokolaaditahvlit „Nurr“ ja 60 pulgakommi.

Mõnikord võib aga lahendust nõudev diofantiline võrrand olla väga suurte täisarvuliste kordajatega. Siis võib eelnevalt õpetatud loogiline arutelu ja tuginemine jaguvusele osutuda

liiga töömahukaks. Sellisel juhul on soovitav kasutada diofantiliste võrrandite lahendamise üldist meetodit, mis tugineb ahelmurdude ja lähimurdude leidmisele.
Tutvustame lisamaterjalina ka lühidalt seda üldist diofantiliste võrrandite lahendamise meetodit, kontrolltöö ülesandeid võite lahendada vabalt valitud viisil.

LISALUGEMIST

DIOFANTILISE VÕRRANDI LAHENDAMINE LÄHISMURDUDE ABIL

Õppematerjalis „Ahelmurrud“ õppisime arendama ratsionaal- ja irratsionaalarve ahelmurruks, samuti teame, kuidas leida lähismurde.
Tuletame need oskused meelde, sest diofantilisi võrrandeid on võimalik lahendada ka lähismurdude abil.

Näide 5. Arendame ratsionaalarvu $\frac{134}{51}$ ahelmurruks.

134	51	32	19	13	6	1
	2	1	1	1	2	6

Tabeli teine rida tekib siis järgmiselt:
134 : 51 = 2, jääk 32
51 : 32 = 1, jääk 19
32 : 19 = 1, jääk 13 jne
Seega $\frac{134}{51} = [2, 1, 1, 1, 2, 6]$.

Näide 6. Leiame arvu $\frac{134}{51}$ ahelmurru lähismurrud.

		2	1	1	1	2	6
0	1	2	3	5	8	21	134
1	0	1	1	2	3	8	51

Selle tabeli teise rea liikmed saadakse siis järgmiselt:
$1\cdot 2+0=2,\ 2\cdot 1+1=3,\ 3\cdot 1+2=5,\ 5\cdot 1+3=8,\ 8\cdot 2+5=21,\ 21\cdot 6+8=134$ ja
kolmanda rea liikmed:
$0\cdot 2+1=1,\ 1\cdot 1+0=1,\ 1\cdot 1+1=2,\ 2\cdot 1+1=3,\ 3\cdot 2+2=8,\ 8\cdot 6+3=51.$

Seega

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{2}{1},\quad \frac{P_2}{Q_2}=\frac{3}{1},\quad \frac{P_3}{Q_3}=\frac{5}{2},\quad \frac{P_4}{Q_4}=\frac{8}{3},\quad \frac{P_5}{Q_5}=\frac{21}{8},\quad \frac{P_6}{Q_6}=\frac{134}{51}.$$

Viimane lähismurd võrdub muidugi alati ahelmurru väärtusega.

Oleme meelde tuletanud arvu ahelmurruks arendamise ja lähismurdude leidmise, nüüd **tutvume kahe tundmatuga lineaarse diofantilise võrrandi lahendamisega lähismurdude abil.**

Vaatleme **lineaarse diofantilise võrrandi**

$$ax + by = c$$

lahendamist, kus a, b ja c on täisarvud ja SÜT (a, b) = 1.

Võrrandi lahendi saamiseks arendame $\frac{a}{b}$ ahelmurruks ning leiame eelviimase lähismurru $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$.

Sellise võrrandi erilahendid avalduvad kujul

$$x_0 = (-1)^n c \cdot Q_{n-1},\ y_0 = (-1)^{n-1} c \cdot P_{n-1},$$

kus n on elementide arv ahelmurrus.

Üldlahendid aga avalduvad kujul

$$x = x_0 + bt$$

$$y = y_0 - at$$, kus t on suvaline täisarv.

Näide 7. Lahendame võrrandi $29x + 41y = 35$.

Arendame murru $\frac{29}{41}$ ahelmurruks ja leiame eelviimase lähismurru (arvutuste õigsuse kontrollimiseks arvutame ka viimase lähismurru, mis peab võrduma $\frac{29}{41}$).

29	41	29	12	5	2	1
	0	1	2	2	2	2

Seega ahelmurruna $\frac{29}{41} = [0,1,2,2,2,2]$.

Edasi leiame lähismurrud, täites järgneva tabeli.

		0	1	2	2	2	2
0	1	0	1	2	5	12	29
1	0	1	1	3	7	17	41

Seega $P_5 = 12$, $Q_5 = 17$, $n = 6$ ja üheks erilahendiks on

$$x_0 = (-1)^6 \cdot 35 \cdot 17 = 595,$$

$$y_0 = (-1)^5 \cdot 35 \cdot 12 = -420.$$

Üldlahend avaldub aga järgmiselt:

$$x = 595 + 41t,$$

$$y = -420 - 29t,$$ kus t on mistahes täisarv.

Saadud üldlahendi kuju on ebasobiv, sest vabaliikmed on absoluutväärtuselt liialt suured. Selleks, et vähemalt üht vabaliiget vähendada, eraldame 595-st teatud kordse (jagame 595 41-ga nii, et saaksime absoluutväärtuselt vähima positiivse või negatiivse jäägi):

$595 = 41 \cdot 14 + 21$.

Seega $x = 21 + 41 \cdot 14 + 41 \cdot t = 21 + 41(14 + t) = 21 + 41u$, kus $u = 14 + t$.

Nüüd $y = -420 - 29(u - 14) = -420 - 29u + 406 = -14 - 29u$.

Niisiis oleme saanud võrrandi üldlahendile sobiva kuju:

$$x = 21 + 41u,$$

$$y = -14 - 29u,$$ kus u on mistahes täisarv.

Näide 8. Koolile osteti kaht liiki õpikuid, geograafia õpik maksis 23 eurot tükk ja matemaatika õpik 38 eurot tükk. Kui palju osteti geograafia õpikuid ja kui palju matemaatika õpikuid, kui kokku kulus täpselt 1359 eurot?

Tähistame geograafia õpikute arvu x ja matemaatika õpikute arvu y. Vastavalt teksti saame koostada võrrandi $23x + 38y = 1359$.

See on diofantiline võrrand. Lahendame seekord selle lähismurdude abil.

Arendame murru $\frac{23}{38}$ ahelmurruks.

23	38	23	15	8	7	1
	0	1	1	1	1	7

Seega $\frac{23}{38} = [0;1,1,1,1,7]$.

Leiame ahelmurru $[0;1,1,1,1,7]$ lähismurrud.

		0	1	1	1	1	7
0	1	0	1	1	2	3	23
1	0	1	1	2	3	5	38

Tabelist näeme, et $P_5 = 3$, $Q_5 = 5$, $n = 6$ ja üheks erilahendiks vastavalt valemile $x_0 = (-1)^n c \cdot Q_{n-1}$, $y_0 = (-1)^{n-1} c \cdot P_{n-1}$ on

$x_0 = (-1)^6 \cdot 1359 \cdot 5 = 6795,$

$y_0 = (-1)^5 \cdot 1359 \cdot 3 = -4077$.

Kohe on selge, et selline erilahend meile ei sobi, kuna raamatute arv ei saa olla negatiivne.

Avaldame üldlahendi:

$x = 6795 + 38t$

$y = -4077 - 23t$, *kus t on täisarv*.

Püüame seekord täisarvu t valida loogiliselt arutledes, kuna matemaatika raamatute arv y ei saa olla negatiivne, siis peab korrutis $-23t$ olema suurem kui 4077.

$-23t > 4077 \Rightarrow t < -177\frac{6}{23}$.

See on nii, kui näiteks $t = -178$ (sest $-23 \cdot (-178) = 4094 > 4077$).

Kui $t = -178$, siis $y = 17$ ja $x = 31$.

Kas see on ainus lahend? Oletame, et $t = -179$.

Kui $t = -179$, siis $y = 40$ ja $x = -7$, mis aga ei sobi, sest raamatute arv ei saa olla negatiivne.

Nii saime ülesande ainsaks lahendiks, et selle raha eest saab osta 31 geograafia õpikut ja 17 matemaatika õpikut.