TARTU ÜLIKOOL

Teaduskool

Galilei relatiivsusprintsiip

Koostanud Gunnar Karu

Tartu 2008

Eessõna

Käesoleva õppevahendi kasutajana on mõeldud eelkõige täppisteaduste vastu huvi tundvaid gümnaasiumi õpilasi, kes on koondunud TÜ Teaduskooli juurde. Seetõttu põhineb õppematerjali esitus peamiselt gümnaasiumi füüsikakursusel. Õppevahendit võivad teatud määral kasutada ka kõrgkoolide üliõpilased, kelle erialaks ei ole füüsika.

1 Inertsiaalsüsteemid

Noor sõber! Koolis oled juba tutvunud (või lähiajal tutvud) Newtoni I seadusega, mida nimetatakse ka *inertsiseaduseks*. Käesolevas brošüüris pakume Sulle lahendamiseks ülesandeid, mis on seotud liikumise vaatlemisega erinevates taustsüsteemides. Esialgu aga vaatleme veel mõningaid teooriaküsimusi.

Formuleerime kõigepealt inertsiseaduse nii, et sellesse oleks võetud ka vihje taustsüsteemile.

Sõnastus võiks olla järgmine: *on olemas vähemalt üks selline taustsüsteem, milles keha*[1] *liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt, kui temale ei mõju teised kehad või teiste kehade mõjud kompenseeruvad.*

Kui on olemas üks selline taustsüsteem, siis kehtib inertsiseadus ka kõikides taustsüsteemides, mis liiguvad selle süsteemi suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Seega on looduses taolisi taustsüsteeme lõpmata palju ja kõiki neid nimetatakse *inertsiaalsüsteemideks*. Inertsiseaduse võime aga formuleerida veel üldisemalt: *on olemas taustsüsteemid, milledes nähtusi saab kirjeldada kõige lihtsamate võrranditega. Need on sellised taustsüsteemid, mille suhtes punktmass liigub kiirenduseta, kui talle ei mõju teised kehad* (või talle mõjuvate jõudude resultant on null).

Sellises sõnastuses on inertsiseadus kehtiv ka mittemehaaniliste nähtuste jaoks.

Inertsiaalsüsteemides ei ole mitte ainult hõlpsam maailma uurida, vaid nendes kulgeb hõlpsamalt ka kogu inimkonna tegevus. Võrdle näiteks korvpallimängu või keerulist operatsiooni, mis toimub maapinnal või tormisel merel oleva laevadekil (esimese nendest võime lugeda inertsiaalsüsteemiks, teise peame lugema mitteinert-

[1]siin ja edaspidi mõistame keha all punktmassi, kuna Newtoni I seadus on kehtiv ainult punktmassi kohta.

siaalsüsteemiks).

Inertsiaalsüsteem on abstraktsioon, mis realiseerub praktikas ainult teatud ligikaudsusega. Tõepoolest, iga taustsüsteem on seotud kehadega, aga kõik looduses olevad kehad on vastastikuses mõjutuses. Mõningatel juhtudel on aga vastastikune mõju niivõrd nõrk, et me võime jätta selle arvestamata. Kuidas määrata kindlaks, kas uuritav taustsüsteem on inertsiaalne või mitte? Selleks peab uurima punktmassi liikumist selles taustsüsteemis juhul, kui võime jätta arvestamata teiste kehade mõju. Kui selgub, et $\vec{v} = const$ (s.t. ei muutu kiirusvektori moodul ega suund), siis on uuritav taustsüsteem inertsiaalsüsteem.

Tõsi, võib juhtuda, et täpsemad mõõtmised näitavad, et selles taustsüsteemis $\vec{v} \neq const$. Sel juhul ütleme, et antud täpsuse juures peame loobuma eeldusest, et antud süsteem on inertsiaalsüsteem.

Sa tead, et enamiku arvutuste juures loeme me Maad inertsiaalsüsteemiks. Samal ajal näitavad aga täpsemad mõõtmised, et kõik maapinnale langevad kehad kalduvad "põhjuseta" vertikaalsihist kõrvale — ida poole. See on tingitud Maa ööpäevasest pöörlemisest, mis toimub nurkkiirusega 2π rad ööpäevas. Järelikult selle efekti selgitamisel ei saa Maad lugeda inertsiaalsüsteemiks.

Seega siis <u>vastuse</u> küsimusele, kas antud taustsüsteem on inertsiaalsüsteem või mitte võib anda <u>ainult katse</u>, kusjuures erineva täpsusega tehtud mõõtmised võivad anda erinevad tulemused.

2 Galilei relatiivsusprintsiip

Liikugu punkmass mingis taustsüsteemis inertsi mõjul. Järelikult ei muutu selles taustsüsteemis punkmassi kiiruse suurus ja suund. Liikugu teine taustsüsteem esimese suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Meie punktmassil on selles taustsüsteemis teistsugune kiirus, kuid ka see on jääv nii suuruselt kui ka suunalt. (Ülalöeldu konkretiseerimiseks lahenda ülesanne 1 ja veendu, et see on tõepoolest nii!) Järelikult võib öelda, et teine taustsüsteem on samuti inertsiaalsüsteem nagu esimenegi. Selliselt arutelu jätkates jõuamegi tulemusele, et inertsiaalsüsteeme on lõpmata palju, nad kõik liiguvad üksteise suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt ning ühtki neist ei saa teistele eelistada. Jõudsime tähtsa looduseaduseni, mida tuntakse *Galilei relatiivsusprintsiibi* all. Selle võiks sõnastada järgmiselt: *mehaanilised protsessid kulgevad kõikides inertsiaalsüsteemides ühesuguselt.*

Ehk teisiti öeldes: taustsüsteemi ühtlast ja sirgjoonelist liikumist pole võimalik kindlaks teha mitte mingisuguste selles süsteemis sooritatavate mehaanika katsetega.

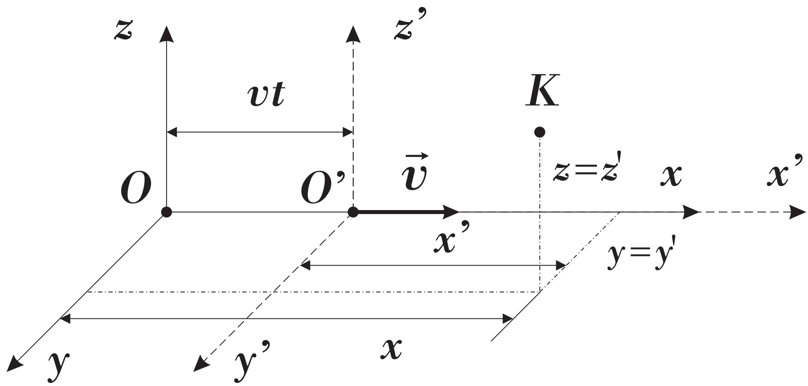
Galilei relatiivsusprintsiibi edasise analüüsi tulemusena jõudis Albert Einstein 1905. a. järeldusele, et *taustsüsteemi paigalolekut või jääva kiirusega liikumist ei ole võimalik määrata* ***mitte mingisuguste*** *selles süsteemis sooritatud katsetega.*

Viimast väidet nimetatakse Einsteini relatiivsusprintsiibiks ja see on üheks erirelatiivsusteooria aluseks. Sellest lühidalt veel edaspidi.

3 Galilei teisendus

Kui punktmassi koordinaadid on teada mingis inertsiaalsüsteemis, siis on võimalik välja arvutada selle punkti koordinaadid mistahes teises inertsiaalsüsteemis. Selliselt on võimalik kirjeldada liikumist ja välja kirjutada seda iseloomustavad suurused erinevates taustsüsteemides. Võrrandeid, mis seovad punktmassi koordinaate kahes, teineteise suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt liikuvas taustsüsteemis, nimetatakse *Galilei teisendusteks.* Galilei teisenduste tähtsus seisneb selles, et *nad võimaldavad üle minna liikumise kirjeldamiselt ühes inertsiaalsüsteemis selle kirjeldamisele teises inertsiaalsüsteemis.*

Tuletame seosed, mida tuntakse Galilei teisendustena. Konkreetsuse mõttes seome ühe taustsüsteemidest (x, y, z) Maaga ja loeme selle liikumatuks (eeldades seejuures, et Maaga seotud taustsüsteem on inertsiaalsüsteem), teise (x', y', z') Maa suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt liikuva rongiga, mille kiirus on $\vec{v}$. Võtame x-telje liikumise suunaliseks (vt. joon. 1) ja eeldame, et vaatluse algmomendil $(t = 0)$ koordinaattelgede alguspunktid O ja O' langevad kokku.



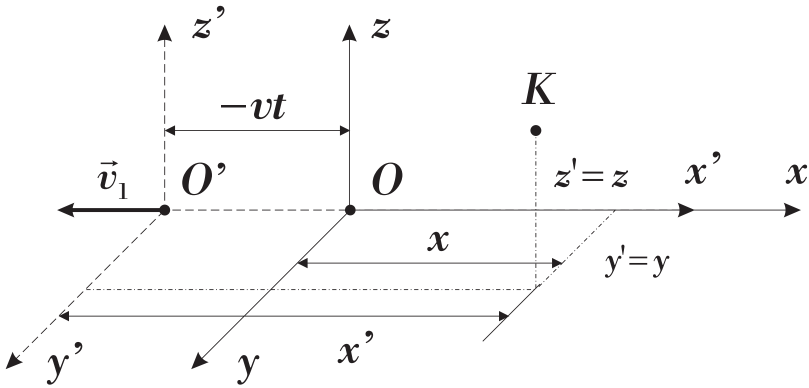
Joonis 1: Maaga seotud taustsüsteem

Jooniselt 1 on näha, et punkti K abtsissid ajahetkel t taustsüsteemides "Maa" ja "rong" erinevad lõigu $OO' = vt$ võrra, kui $y = y'$ ja $z = z'$.

Seega saame seosed:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \tag{1}$$

mis võimaldavad punkti K koordinaatide põhjal taustsüsteemis "Maa" leida sama punkti koordinaadid sellega ühtlaselt ja sirgjooneliselt kiirusega $\vec{v}$ liikuvas taustsüsteemis "rong".



Joonis 2: Rongiga seotud taustsüsteem

Et kontrollida, kas Galilei teisendused rahuldavad relatiivsusprintsiipi, leiame, millise kuju omandab võrrandisüsteem (1) kui vaatleja on rongis. Sel juhul rongiga seotud taustsüsteem (x, y, z) on paigal, aga maa (x', y', z') liigub vastupidises suunas kiirusega $\vec{v}_1 = -\vec{v}$ (vt. joon. 2).

Kuna $\vec{v}_1$ on suunatud vastu x-telje positiivsele suunale, võrdub tema projektsioon x-teljel kiirusvektori pikkusega, kuid selle ette pannakse miinusmärk.

Saame seosed:

$$x = x' - (-vt) = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z'. \tag{2}$$

Seoste (1) ja (2) võrdlemisel selgub, et liikumatuks võime lugeda ükskõik millise inertsiaalsüsteemi. Galilei teisendused seejuures ei muutu. Arvesse tuleb võtta vaid kiirusvektori projektsiooni märk.

See tähendab, et Galilei teisendused on kooskõlas relatiivsusprintsiibiga.

Punktmassi nihked on erinevates taustsüsteemides erinevad. Olgu hetkel t_1 punktmassi koordinaat taustsüsteemis "Maa" (joon. 1) x_1, ajahetkel t_2 olgu koordinaat x_2. Siis punktmassi nihke pikkus taustsüsteemis "Maa" on:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \ .$$

Sama punktmassi nihke pikkus taustsüsteemis "rong" oleks:

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = x_2 - vt_2 - (x_1 - vt_1) \ ,$$

$$\Delta x' = x_2 - x_1 - v \cdot (t_2 - t_1) = \Delta x - v\Delta t \ . \tag{3}$$

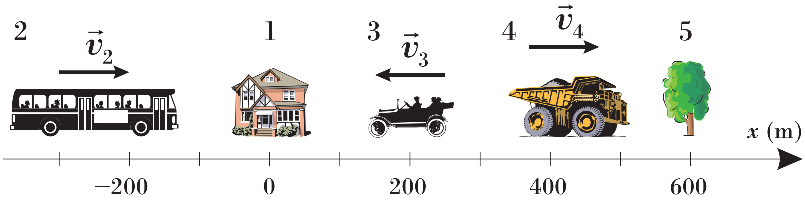
Ja vastavalt

$$\Delta x = \Delta x' + v\Delta t \ . \tag{4}$$

<u>Kontrolli</u>, kas ülesande 1 lahendamisel saadud liikumisvõrrandid on kooskõlas Galilei teisendustega!

<u>Arvuta</u> kõikides ülesandes 1 vaadeldavate kehade jaoks <u>nihked</u> taustsüsteemis "buss", "veoauto", "sõiduauto", "puu", kui $\Delta t = 5$ min. (vt. joon. 3).

Galilei teisendused on kehtivad, kui ühe inertsiaalsüsteemi liikumise kiirus teise inertsiaalsüsteemi suhtes on palju väiksem kui valguse kiirus vaakumis ja eeldusel, et aja kulgemise kiirus on kõikides taustsüsteemides ühesugune. Valguse kiiruse lähedaste kiiruste korral Galilei teisendused ei kehti ja nende asemel tulevad uued seosed, mis võimaldavad samuti sama liikumist kirjeldada erinevates inertsiaalsüsteemides.



Joonis 3: Liikumine erinevates taustsüsteemides

4 Klassikaline kiiruste liitmise seadus

Kiiruste liitmise seadus võimaldab arvutada punktmassi kiiruse $\vec{u}'$ mistahes inertsiaalsüsteemis, kui on teada selle punktmassi kiirus $\vec{u}$ ühes inertsiaalsüsteemis ja vaadeldava inertsiaalsüsteemi kiirus $\vec{v}$ antud inertsiaalsüsteemi suhtes.

Tuletame selle seose juhul, kui vaadeldavate taustsüsteemide suhtelise liikumise kiirus on x-telje sihiline.

Liikugu punktmass ühtlaselt taustsüsteemis "Maa" (vt. joon. 1) kiirusega

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \, .$$

Leiame selle punkti kiiruse taustsüsteemis "rong"

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t} \, .$$

Selleks kasutame valemit (3) ja jagame mõlemad pooled ajavahemikuga Δt

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{v \Delta t}{\Delta t} \, .$$

Saame

$$u' = u - v \ . \tag{5}$$

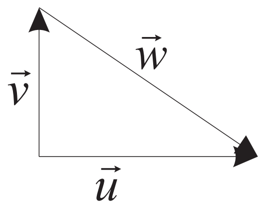
Kui aga taustsüsteem "rong" on liikumatu (vt. joon. 2) ja "Maa" liigub, lähtume valemist (4) ning saame analoogiliselt

$$u = u' + v \ . \tag{6}$$

Klassikaline kiiruste liitmise seadus üldiste vektorite jaoks on ühemõõtmelise juhu vahetu üldistus:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \ . \tag{7}$$

Näide. Kaks autot liiguvad teineteisega risti olevatel teedel, esimene kiirusega 11,1 m/s, teine kiirusega 8,35 m/s maapinna suhtes. Leida esimese auto kiirus teise suhtes.



Joonis 4: Näide

Olgu $\vec{u}$ esimese auto kiirus ja $\vec{v}$ teise auto kiirus maapinna suhtes. Teise autoga seotud taustsüsteemis liigub esimene auto kiirusega $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, kust saame $w = \sqrt{u^2 + (-v)^2} \approx 14$ m/s.

Ka klassikaline kiiruste liitmise seadus kui järeldus Galilei teisendustest on kehtiv vaid juhul, kui liikumiskiirused on palju väiksemad valguse kiirusest vaakumis. Sellisele järeldusele tulid teadlased aga alles eelmise sajandi algul. Galileist ja Newtonist alates olid teadlased peaaegu kolme sajandi vältel veendunud, et Galilei teisendused ja järeldused nendest on kehtivad kõikide füüsikaliste nähtuste korral. Ja alles 19. sajandi lõpul, kui Newtoni mehaanikat püüti rakendada valguse levimise uurimisel, tulid ilmsiks tõsised vastuolud, mis lõppkokkuvõttes viisid uue füüsikalise teooria — erirelatiivsusteooria loomisele. Erirelatiivsusteoorias kehtib invariantse valguse kiiruse printsiip: *valguse kiirus c vaakumis on kõigis inertsiaalsetes tausüsteemides ühesugune.* See võrdub $c = 299792458 \approx 3 \cdot 10^8$ m/s. Samasuunaliste kiiruste liitmiseks kasutatakse erirelatiivsusteoorias valemit

$$u' = \frac{u+v}{1+uv/c^2}. \tag{8}$$

Praegu lõpetame sellega, et soovitame Sul lahendada käesolevast brošüürist ülesanded 2 ja 3, kasutades kord klassikalist kiiruste liitmise seadust, kord relativistlikku kiiruste liitmise seadust ja teha järeldus, millal me peame kiirusi kindlasti liitma ERT-s tuletatud valemi järgi, millal võime kasutada Galilei poolt saadud valemit.

5 Ülesandeid kontrolltöödeks

Alljärgnevad ülesanded on kõik seotud liikumise vaatlemisega erinevates taustsüsteemides. Nende lahendamisel pööra täelepanu ka sellele, kuivõrd õige taustsüsteemi valik võimaldab lihtsustada lahenduskäiku. Kõikide ülesannete puhul on eeldatud, et kehasid võib vaadelda punktmassidena. Lahendamisel tee kindlasti selgitav joonis, kanna sellele taustsüsteem ja märgi, mille valid taustkehaks.

1. Joonisel 3 on kujutatud veoauto, sõiduauto, bussi ja puu liikumine majaga seotud taustsüsteemis. Nende kehade liikumisvõrrandid (ühikud SI-süsteemis) on

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -300 + 10t, \quad x_3 = 200 - 8t,$$

$$x_4 = 500 + 16t, \quad x_5 = 600.$$

Kujuta joonisel samade kehade liikumine: *a)* bussiga, *b)* sõiduautoga, *c)* veoautoga, *d)* puuga seotud taustsüsteemis ja kirjuta nendes süsteemides välja kõikide kehade liikumisvõrrandid. Kuidas muutub kiiruse arvväärtus ja suund üleminekul ühest taustsüsteemist teise? Kas muutub kehade liikumise iseloom üleminekul ühest taustsüsteemist teise? Põhjenda!

2. Kosmoselaev eemaldub Maast kiirusega $v = 10$ km/s. Laevalt tulistatakse liikumise suunas. Kuul lendab välja kiirusega $u = 1000$ m/s kosmoselaeva suhtes. Leida kuuli kiirus Maa suhtes klassikalise ja relativistliku kiiruste liitmise seaduse järgi.

3. Footonraketile, mis liigub kiirusega $v = 225000$ km/s Maa suhtes, on paigutatud kiirendi, mis annab elektronidele kiiruse $u = 240000$ km/s raketi suhtes selle liikumise suunas. Leida elektronide kiirus Maa suhtes klassikalise ja relativistliku kiiruste liitmise seaduse järgi.

4.[2] Taustsüsteemis K on punkti M koordinaadid $(2; 3; 0)$. Leida selle punkti koordinaadid taustsüsteemis K', mis liigub *a)* kiirusega 10 m/s x-telje sihis, *b)* kiirusega 5 m/s y-telje sihis, *c)* kiirusega -2 m/s x-telje sihis.

5. Taustsüsteemis K' on punktmassi liikumisvõrrand

[2]Märkus: kõigis ülesannetes on taustsüsteemide K ja K' teljed valitud samasuunalistena (nagu joonisel 1 ja 2).

$$x' = 5t + 4, \quad y' = 0, \quad z' = 0 \, .$$

Kirjutada välja selle punktmassi liikumisvõrrandid taustsüsteemis K, kui:

a) K' on K suhtes paigal ja selle alguspunkti koordinaadid on $O'(2; 0; 0)$,

b) K' liigub K suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt x-telje sihis kiirusega 10 m/s. Vaatluse algmomendil $t = 0$ langesid mõlemate koordinaatsüsteemide alguspunktide kokku.

6. Taustsüsteemis K', mis liigub kiirusega $v = 20$ m/s taustsüsteemi K x-telje sihis, on punkti M koordinaadid $x' = 10$ m, $y' = 5$ m, $z' = 3$ m. Leida selle punkti koordinaadid taustsüsteemis K, kui ajahetkest, mil nende taustsüsteemide algused ühtisid on möödunud $t = 10$ s.

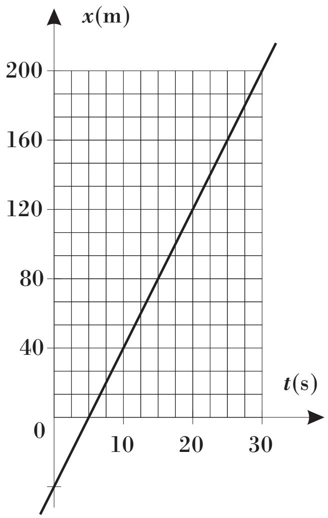
7. Taustsüsteemis K on punkti M koordinaadid $x = 5$ m, $y = 2$ m, $z = 8$ m. Leida selle punkti koordinaadid taustsüsteemis K', mis liigub: *a)* kiirusega 2 m/s x-telje sihis, *b)* kiirusega -4 m/s y-telje sihis, *c)* kiirusega 7 m/s z-telje sihis.

8. Joonisel 5 on kujutatud mootorratturi liikumise graafik veoautoga seotud taustsüsteemis.

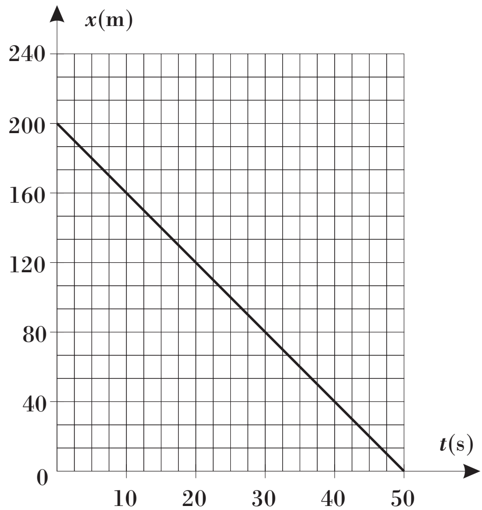
Kirjutada mootorratturi ja veoauto liikumisvõrrandid ja ehitada liikumisgraafikud Maaga seotud taustsüsteemis, kui veoauto kiirus Maaga seotud taustsüsteemis on 10 m/s.

Leida mootorratturi ja veoauto koordinaadid nende kohtumishetkel Maaga ja veoautoga seotud taustsüsteemis.

9. Kõik ülejäänud tingimused on samad, kuid veoauto kiirus Maaga seotud taustsüsteemis on -1 m/s.



Joonis 5: vt. ül. 8



Joonis 6: vt. ül. 12

10. Kõik ülejäänud tingimused on samad, kuid veoauto kiirus Maaga seotud taustsüsteemis on -8 m/s.

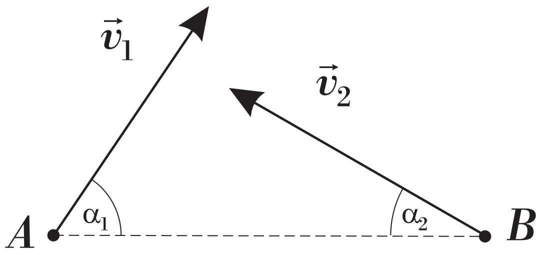
11. Kõik ülejäänud tingimused on samad, kuid veoauto kiirus Maaga seotud taustsüsteemis on -15 m/s.

12. Joonisel 6 on kujutatud reisirongi liikumise graafik kaubarongiga seotud taustsüsteemis. Kirjutada välja reisi- ja kaubarongi liikumisvõrrandid ja ehitada liikumisgraafikud Maaga seotud taustsüsteemis, kui kaubarongi kiirus Maa suhtes on 20 m/s. Leida reisi- ja kaubarongi koordinaadid nende kohtumishetkel Maaga ja kaubarongiga seotud taustsüsteemis.

13. Kõik ülejäänud tingimused on samad, kuid kaubarongi kiirus Maa suhtes on 3 m/s.

14. Kõik ülejäänud tingimused on samad, kuid kaubarongi kiirus Maa suhtes on 4 m/s.

15. Kõik ülejäänud tingimused on samad, kuid kaubarongi kiirus Maa suhtes on -12 m/s.



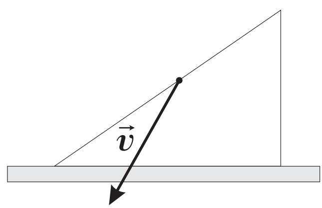
Joonis 7: vt. ül. 16

16. Kahe laeva algasendid ja kiirused on antud joonisel 7. Mõlemad laevad liiguvad ühtlaselt. *a)* Leida laevade kiirused esimese laevaga seotud taustsüsteemis. *b)* Leida laevadevaheline vähim kaugus, kui alghetkel on kaugus nende vahel l.

17. Rong liigub Maaga seotud taustsüsteemis ühtlaselt kiirusega 60 km/h. Kell 7.00 kustutati veduril tuled, kell 7.10 rongi lõpus olev latern. Määrata vahemaa nende kahe sündmuste vahel *a)* taustsüsteemis ”Maa”; *b)* taustsüsteemis ”rong”, kui rongi pikkus on 1 km.

18. Autokolonn, mille pikkus on 2 km, liigub kiirusega $v_k = 40$ km/h. Mootorrattur hakkas kolonni peast liikuma kiirusega $v = 60$ km/h. Kui pika aja möödudes jõuab ta kolonni lõppu? Ülesanne lahendada: *a)* taustsüsteemis ”Maa”; *b)* taustsüsteemis ”autokolonn”.

19*. Kiilult alla libiseva mündi kiirusvektor $\vec{v}$ on näidatud kõrvaloleval joonisel. Kiil libiseb hõõrdevabalt mööda horisontaalpinda. Konstrueerida kiilu kiirusvektor.



Kontrolltööde variandid

Variant 1: 1(a), 2, 3, 4(a), 7(a), 8, 12, 16, 17

Variant 2: 1(b), 2, 3, 4(b), 7(b), 9, 13, 16, 18

Variant 3: 1(c), 2, 3, 4(c), 6, 10, 14, 16, 17

Variant 4: 1(d), 2, 3, 5, 7(c), 11, 15, 16, 18

`Kontrolltööks ............. tuleb lahendada`

`variandi ....... ülesanded.`

`Lisaks on boonusülesanne 19, mille`

`lahendamine on vabatahtlik.`

`Tähtaeg ..................................`