TARTU ÜLIKOOL

Teaduskool

Jäävuse seadused mehaanikas

Koostanud Kaljo Schults

Tartu 2009

Eessõna

Käesoleva õppevahendi kasutajana on mõeldud eelkõige täppisteaduste vastu huvi tundvaid gümnaasiumi õpilasi, kes on koondunud TÜ Teaduskooli juurde. Seetõttu põhineb õppematerjali esitus peamiselt gümnaasiumi füüsikakursusel. Õppevahendit võivad teatud määral kasutada ka kõrgkoolide üliõpilased, kelle erialaks ei ole füüsika.

1. Jäävuse seadustest üldse

Pikaajalise looduse vaatluse tulemusena on inimkond avastanud terve rea fundamentaalseid füüsika seadusi, mille kehtivust on kontrollitud sajandite jooksul ja mis ikka ja alati on osutunud kehtivateks. Ühe suure klassi nendest moodustavad jäävuse seadused, kus mingi füüsikaline suurus jääb protsesside käigus konstantseks. *Jäävuse seaduste rakendamisel on oluline vaadeldavatest füüsikalistest kehadest koosneva süsteemi isoleeritus.* See tähendab, et vaadeldav süsteem on nagu suletud nähtamatute seintega ruumi nii, et välisilmaga pole mingit kontakti. Arusaadav, et süsteemi isoleeritus on tinglik mõiste. Pole näiteks võimalik gravitatsiooniväljast vabaneda. Kuid paljudel juhtudel pole see oluline, sest väline gravitatsiooniväli mõjub väikeses piirkonnas kõikidele kehadele ühesuguse raskuskiirendusega. Jäävuse seaduste rakendamisel on seetõttu vaja alati jälgida kuivõrd on isoleerituse nõue täidetud.

Tundmatuteks jäävuse seadusteks on massi, impulsi, pöörlemishulga, laenguhulga, energia jt. jäävuse seadused. Järgnevalt lahendame ülesandeid, mis on seotud impulsi ja energia jäävuse seadusega.

2. Impulss ja jõuimpulss

Impulsiks ehk *liikumishukgaks* nimetatakse keha massi m ja kiiruse v korrutist:

$$\vec{K} = m\vec{v}. \tag{1}$$

Et mass on skalaarne ja kiirus vektoriaalne suurus, siis on impulss vektor — skalaari korrutis vektoriga on vektor. Nii tuleb impulssi liita kui vektoreid. Impulsi ühikuks saame

$$[K] = 1\ \mathrm{kg} \cdot 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1\ \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .$$

Oletame, et keha massiga m liigub ühtlaselt sirgjooneliselt kiirusega $\vec{v_1}$. Tema impulss oleks siis

$$\vec{K_1} = m\vec{v_1}\ .$$

Mõjugu sellele kehale väikese ajavahemiku Δt jooksul konstantne jõud $\vec{F}$. Newtoni II seaduse kohaselt hakkab keha liikuma siis kiirendusega

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{\Delta t}\ ,$$

millest

$$\vec{F}\Delta t = m\left(\vec{v_2} - \vec{v_1}\right) = m\vec{v_2} - m\vec{v_1} = \vec{K_2} - \vec{K_1} = \Delta\vec{K}. \qquad (2)$$

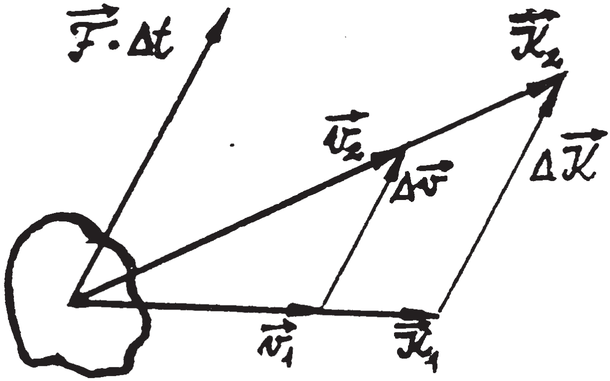
Jõu ja tema mõjumisaja korrutist nimetatakse *jõuimpulsiks*. Tulemusest järeldub, et jõuimpulss on võrdne keha impulsi muutusega. Seda illustreerib joonis 1, kus on ühte punkti kantud liikumist iseloomustavad vektorid enne ja pärast ajavahemiku Δt möödumist.

Valemist (2) võib avaldada jõu

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{K}}{\Delta t}. \qquad (3)$$

ja ütelda, et jõud on võrdne impulsi muutusega ajaühikus. Niisugune määrang oli Newtoni II seaduse esialgseks kujuks.

Ülesanne 1. Jalgpallur lõi paigalseisvat $m = 0{,}5$ kg massiga palli nii, et see lendas kiirusega $v = 14$ m/s. Löögi kestus $\Delta t = 1/50$ s. Arvutada pallile mõjunud löögi jõud.



Joonis 1: Jõuimpulsi ja impulsi seos

Antud juhul võime arvutada löögi keskmise jõu F_k. Löök oli küll lühikese kestusega, kuid ka selle aja jooksul jõud muutub. Jagame kogu ajavahemiku Δt niivõrd väikesteks osadeks, et nende vältel võime jõu lugeda konstantseks. Siis $F_1\Delta t_1 + F_2\Delta t_2 + \ldots = F_k\Delta t$, kus F_1, F_2, ... on löögi jõud vastavalt ajavahemikel Δt_1, Δt_2, ...

Impulsi muutus $\Delta K = mv - m \cdot 0 = mv$. Pallile mõjuv keskmine jõud valemi (3) alusel

$$F_k = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{mv}{\Delta t} = \frac{0{,}5 \cdot 14}{0{,}02} = 0{,}5 \cdot 700 = 350 \text{ N}.$$

On huvitav märkida, et jalgpalluri löögi tugevus võib ulatuda 7000 njuutonini.

Ülesanne 2. Jalgpallur lööb $m = 0{,}6$ kg palli, mis lendab tema poole kiirusega $v_0 = 10$ m/s ja eemaldub pärast lööki kiirusega $v_1 = 15$ m/s. Arvutada löögi jõud F, kui löögi kestus on $\Delta t = 1/40$ s. *Vastus*: $F = 600$ N.

Ülesanne 3. Rühm sõdalasi ründasid keskaegse kindluse väravat rammiga, mille mass oli $m = 400$ kg. Sõdalased kandsid rammi õlgadel ja jooksid rammiga värava poole. Enne väravat nad peatusid, ramm aga libises mööda sõdalaste õlgadel olevaid nahkkatteid kiirusega $v = 3$ m/s vastu väravat. Ramm nihutas väravat kuni peatumiseni $d = 15$ cm võrra. Arvutada väravale mõjuv jõud F. *Vastus*: $F = 12000$ N.

3. Impulsi jäävuse seadus

Valime süsteemi, milles liiguvad kaks keha massidega m_1 ja m_2 ning kiirustega $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$. Oletame, et nende kehade vahel mõjuvad mingid jõud, mida nimetame süsteemi sisejõududeks. Jõudude mõjumisel ajavahemiku Δt jooksul peavad mõlema keha impulsid seaduse (2) alusel muutuma:

$$\vec{F}_{12}\Delta t = \Delta\vec{K}_1, \quad \vec{F}_{21}\Delta t = \Delta\vec{K}_2\,,$$

kus $\vec{F}_{12}$ on esimesele kehale teise keha poolt mõjuv jõud ja $\vec{F}_{21}$ — teisele kehale esimese poolt mõjuv jõud. Newtoni III seaduse kohaselt on need jõud võrdsed ja vastassuunalised: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ja seega ka $\Delta\vec{K}_1 = -\Delta\vec{K}_2$. Viimasest järeldub, et süsteemi kehade impulsside muutuste summa pärast vastastikust mõjumist on võrdne

$$\Delta\vec{K}_1 + \left(-\Delta\vec{K}_2\right) = \vec{0}.$$

Seega süsteemi kehade omavahelisel mõjumisel süsteemi impulss ei muutu. Taoline arutelu on õige ükskõik kui suurest arvust kehadest koosneva süsteemi kohta. Tulemuse formuleerime *impulsi jäävuse seadusena*: *isoleeritud süsteemis on kõikide kehade impulsside summa jääv.*

Matemaatiliselt võime sellele seadusele anda kuju

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = const. \tag{4}$$

Märk $\sum_{i=1}^{n}$ (Σ — kreeka täht ”sigma”) tähendab, et tuleb liita n korrutist $m_i\vec{v}_i$ (i on üldistav indeks).

Nagu näha, on see seadus lihtne ja lakooniline nagu enamus füüsika põhiseadusi. Erilise jõu omandab see seadus koos energia jäävuse seadusega. Vaatame nüüd, kuidas impulsi jäävuse seadust võib kasutada praktiliste küsimuste lahendamisel.

Ülesanne 4. Meteoriit ja rakett liiguvad teineteisele vastu 90° nurga all. Meteoriidi mass on m ja raketi mass $m/2$. Meteoriidi kiirus on v ja raketi kiirus — $2v$. Pärast põrget liiguvad nad koos edasi. Leida meteoriit-raketi impulss ja kiirus.

Antud juhul jätame tähele panemata asjaolu, et meteoriidi mass on kaks korda suurem raketi massist ja et suurte kiiruste korral tekib tõenäoliselt plahvatus. Purunevad nii meteoriit kui rakett. Kuid sellest hoolimata on impulsi jäävuse seadused ikkagi täidetud. Kui summeerime kõikide kildude impulsid, saame impulsi, mis on võrdne raketi ja meteoriidi esialgsete impulsside summaga.

Raketi impulss

$$K_r = \frac{m \cdot 2v}{2} = mv$$

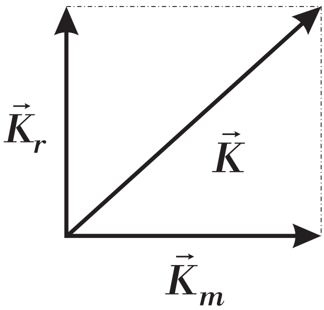
ja meteoriidi impulss $K_m = mv$. Väärtuselt on impulsid võrdsed, kuid suunatud 90° nurga all (joonis 2).

Summaarse impulsi väärtus (moodul), nagu näha jooniselt 2, on arvutatav Pythagorase teoreemiga:

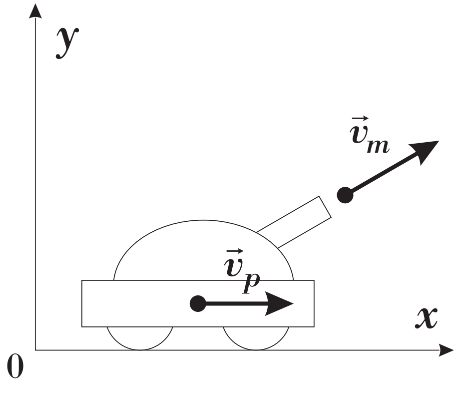
$$K = \sqrt{K_m^2 + K_r^2} = \sqrt{(mv)^2 + (mv)^2} = \sqrt{2}\,mv.$$

Tähistame meteoriit-raketi kiiruse pärast põrget u-ga. Tekkinud keha mass on $m + m/2 = 3m/2$. Impulsi jäävuse seaduse alusel peab summaarne impulss säiluma. Seega

$$\sqrt{2}\,mv = \frac{3}{2}mu \quad \Rightarrow \quad u = \frac{2\sqrt{2}}{3}v.$$



Joonis 2: vt. ül. 4



Joonis 3: vt. ül. 5

Meteoriit-rakett liigub vektori $\vec{K}$ suunas.

Ülesanne 5. Rööbastel liigub platvorm kiirusega $v = 36$ km/h. Platvormil on kahur, mis tulistab mürsu horisondi suhtes $\alpha = 30°$ nurga all. Kuidas muutub platvormi liikumine, kui mürsu kiirus kahuri torust väljumisel on $u = 60$ m/s? Platvormi mass koos kahuriga on $M = 20$ tonni ja mürsu mass $m = 10$ kg.

Lahutame mürsu kiiruse kaheks komponendiks, millest üks on suunatud horisontaalselt (x-telje suunaline) ja teine vertikaalselt (y-telje suunaline). Seega oleme lahutanud ka mürsu impulsi x- ja y-telje sihiliseks komponendiks. Kui loeme mürsust ja platvorm-kahurist koosneva süsteemi isoleerituks, siis peab x- ja y-telgede suunas olema täidetud impulsi jäävuse seadus. y-telje suunas: $0 = m_m v_m \sin\alpha + m_p v_{py}$, millest platvormi liikumise kiirus y telje sihis

$$v_{py} = -\frac{m_m}{m_p} v_m \sin\alpha.$$

Miinus näitab, et platvorm peaks liikuma y-telje negatiivses suunas. See pole aga võimalik, sest platvorm toetub maapinnale. Süsteem pole isoleeritud — maapind mõjub platvormile reaktsioonijõuga. Kui nüüd vagun lugeda Maaga üheks tervikuks, siis tuleks platvormi massile lisada Maa mass ($m = 6 \cdot 10^{24}$ kg) ning kiirus v_{py} on ainult teoreetiliselt nullist erinev. Kui aga Maa ja platvorm lugeda eraldi elastseteks kehadeks, siis põrkuks platvorm rööbastelt kiirusega v_{py} (vt. p. 7).

Kui hõõrdejõuga mitte arvestada, siis x-telje suunas süsteemile mingeid välisjõude ei mõju. Impulsi jäävuse seaduse alusel

$$(m_p + m_m)\, v_p = m_m v_m \cos\alpha + m_p v_{px},$$

millest

$$v_{px} = \frac{(m_p + m_m)\, v_p - m_m v_m \cos\alpha}{m_p}\,.$$

Kuna $m_m \ll m_p$, siis

$$v_{px} \approx v_p - \frac{m_m}{m_p}\, v_m \cos\alpha = 10 - \frac{10}{20000}\, 600\, \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 9{,}74 \text{ m/s}.$$

Platvormi liikumise kiirus väheneb.

Ülesanne 6. Kahurist lasti mürsk horisondi suhtes $\alpha = 60°$ nurga all algkiirusega $v_0 = 200$ m/s. Trajektoori kõrgeimas punktis lõhkes mürsk kaheks killuks, mille massid $m_1 = 1$ kg ja $m_2 = 1{,}5$ kg. Suurema killu kiirus oli horisontaalne $v_2 = 250$ m/s. Leida kaugus l kohtade vahel, kuhu kukkusid killud. *Vastus*: $l = 4000$ m.

Ülesanne 7. Üle liikumatu ploki on pandud köis, mille vasakus otsas ripub raskus massiga $2m$ ja paremas otsas redel, millel seisab inimene. Redeli mass on m ja inimese mass m. Algmomendil on süsteem paigal. Kui suure kiirusega liigub maapinna suhtes redel, kui inimene ronib mööda redelit kiirusega v (redeli suhtes) üles? *Vastus*: $v/4$.

4. Massikeskme liikumine

Eelpool selgus, et isoleeritud süsteemi impulss on jääv. Seega võiks kujutada selle süsteemi liikumist niiviisi, et kogu süsteemi mass on koondunud ühte punkti C, millesse kujutame ka kogu süsteemi impulsi vektori. Kuna süsteemi mass ei saa muutuda — isoleeritud süsteemis on täidetud massi jäävuse seadus, siis liigub kujuteldav punkt konstantse kiirusega. Seda punkti nimetatakse *massikeskmeks* ehk ka *inertsikeskmeks*. Inertsikese ühtib keha raskuskeskmega, kui väline gravitatsiooniväli on süsteemi piirides ühtlane.

Praktiliselt meid huvitab, kuidas arvutada kehade süsteemi massikeskme koordinaate. Oletame, et väga väike keha liigub kiirusega $\vec{v}$. Kiirus on rakendatud selle keha massikeskmesse. Mingite sisejõudude toimel see keha lõhkes. Valime koordinaadistiku nii, et lõhkemise momendil asus keha koordinaatide alguspunktis. Impulsi jäävuse seaduse põhjal võime kirjutada, et x-telje sihis

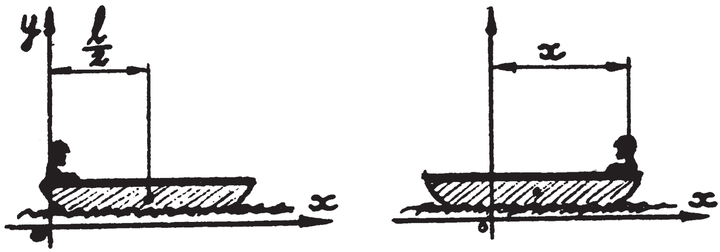
$$(m_1 + m_2 + \ldots)\, v_{cx} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \ldots,$$

kus m_1, m_2, ... on kildude massid ja $v_{1x}, v_{2x}, \ldots$ vastavate kildude kiiruste projektsioonid x-teljele. Kui kõik kehad liiguvad pärast lõhkemist ühtlaselt sirgjooneliselt, siis on nende poolt läbitud teepikkused võrdelised kiirustega ja koordinaadid võrdelised kiiruste projektsioonidega. Seega saame massikeskme koordinaatide arvutamiseks valemid:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}, \quad y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots},$$

$$z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}. \tag{5}$$

Ülesanne 8. Kalamees, kelle mass on $m_1 = 70$ kg asub järvel paadi ahtris. Paadi pikkus $l = 5$ m ja mass $m_2 = 280$ kg. Kalamees läheb ahtrist paadi ninasse. Millise teepikkuse läbib kalamees järve põhja suhtes? Hõõrdumisega ei arvestata.



Joonis 4: vt. ül. 8

Kui hõõrdumisega mitte arvestada, siis saab paadist ja kalamehest koosneva süsteemi horisontaalne liikumine olla ainult niisugune, et süsteemi massikese jääb paigale. Seega võime valemi (5) alusel esimese ja teise olukorra kohta kirjutada:

$$x_c = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot l/2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x + m_2 (x - l/2)}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m_2 \frac{l}{2} = m_1 x + m_2 x - m_2 \frac{l}{2} \, ,$$

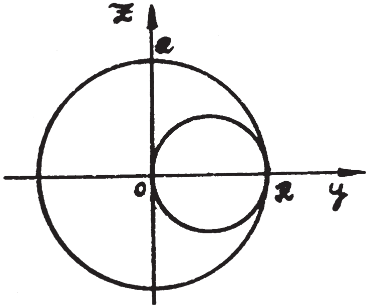
millest kalamehe teepikkus järve põhja suhtes

$$x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{280 \cdot 5}{280 + 70} = 4 \text{ m.}$$

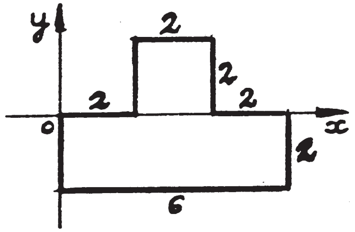
Ülesanne 9. Kerasse raadiusega R on tehtud sfääriline õõnsus, nii et õõnsuse pind läbib kera keskpunkti ja puudutab kera pinda (joonis 5). Arvutada massikeskme koordinaadid.

Võime kujutada, et õõnsusega kera koosneb suurest kerast raadiusega R ja väikesest kerast raadiusega $R/2$, mille massi loeme negatiivseks. Kui valime koordinaatteljed joonisel näidatud viisil, siis tarvitseb arvutada ainult koordinaat y_c, sest sümmeetria tõttu on $x_c = z_c = 0$. Kehade massid on võrdsed ruumala ja tiheduse korrutisega.

$$y_c = \frac{(4/3)\,\pi R^3 \rho \cdot 0 - (4/3)\,\pi (R/2)^3 \rho \cdot R/2}{(4/3)\,\pi R^3 \rho - (4/3)\,\pi (R/2)^3 \rho} = -\,\frac{R}{14}\,.$$



Joonis 5: vt. ül. 9



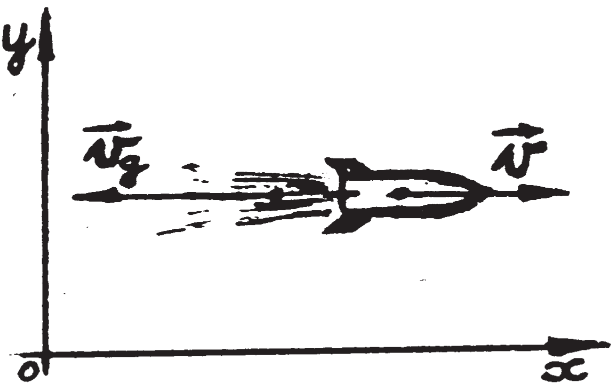
Joonis 6: vt. ül. 10

Ülesanne 10. Arvutada joonisel 6 toodud tasapinnalise kujundi massikeskme koordinaadid. Mass on jaotunud ühtlaselt. <u>*Vastus*</u>: $x_c = 3$, $y_c = -0{,}5$.

5. Reaktiivne liikumine

Reaktiivne liikumine põhineb impulsi jäävuse seadusel. Kui raketist väljuvad gaasid tahapoole, siis peab rakett liikuma ettepoole, et süsteemi gaas-rakett impulss oleks ikkagi konstantne. Impulsi muutus ajaühikus on võrdne reaktiivjõuga.

Olgu raketi mass mingil ajamomendil m ja kiirus v. Väga väikese ajavahemiku jooksul väljub raketist gaas, mille mass on Δm ja kiirus v_g (mõõdetud raketi suhtes). Selle tulemusena väheneb raketi



Joonis 7: Reaktiivne liikumine

mass Δm võrra ja kiirus suureneb Δv võrra. Impulsi jäävuse seaduse alusel võime kirjutada, et impulss enne gaaside väljumist on võrdne impulsiga pärast gaaside väljumist:

$$mv = \Delta m \underbrace{(v + \Delta v - v_g)}_{\text{(gaaside kiirus taustsüsteemi suhtes)}} + (m - \Delta m)(v + \Delta v),$$

$$mv = \Delta mv + \Delta m\Delta v - \Delta mv_g + mv - \Delta mv + m\Delta v - \Delta m\Delta v$$

millest $\Delta mv_g = m\Delta v$.

Raketi kiiruse muutus

$$\Delta v = \frac{\Delta m}{m} v_g \tag{6}$$

Reaktiivjõud

$$F = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} v_g. \tag{7}$$

Nagu näha, on raketile mõjuv reaktiivjõud määratud gaaside väljumiskiirusega ja ajaühikus raketist väljuva gaaside massiga. Mõlemad suurused on tehniliste võimalustega piiratud.

Valem (6) lubab arvutada raketi kiiruse kasvu kui raketist väljub üks ports gaasi. Lõppkiiruse saamiseks tuleb liita kõikide portsude väljumisel saavutatud kiiruse kasvud. Taoline arvestus on aga ainult ligikaudu õige, sest gaas väljub raketist mitte portsude Δm kaupa, vaid pideva joana. Nii väheneb ka mass pidevalt ja kasvab kiirus pidevalt. Arvutus on seda täpsem, mida väiksemateks portsudeks kogu väljuva massi jagame. Kui rakett oli algul paigal, siis pärast esimese gaaside portsu väljumist on raketi kiirus:

$$v_1 = \Delta v_1 = \frac{\Delta m}{m_0}\, v_g.$$

Pärast teise portsu väljumist on raketi kiirus:

$$v_2 = v_1 + \Delta v_2 = v_1 + \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m}\, v_g = \left(\frac{\Delta m}{m_0} + \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m}\right) v_g.$$

Pärast n-da portsu väljumist on raketi kiirus:

$$v_n = v_{n-1} + \Delta v_n =$$
$$= \left(\frac{\Delta m}{m_0} + \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} + \ldots + \frac{\Delta m}{m_0 - (n-1)\,\Delta m}\right) v_g.$$

Kui suuruse $\Delta m / m_0$ tähistada C-ga, saaksime valemile kuju:

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{1 - C} + \ldots + \frac{1}{1 - (n-1)\,C}\right) C v_g.$$

Arvutame selle valemi järgi raketi kiiruse kui raketi algmass on 20 kg, gaaside väljavoolu kiirus 1000 m/s ja raketist väljub 19 portsu gaasi, iga kord 1 kg. Arvutustulemused on toodud tabelis; m/m_0 on raketi massi jagatis raketi algmassiga. Viimases lahtris on toodud kiirus v, mis saadakse täpsete arvutuste korral (need ei mahu antud kursuse raamidesse), eeldusel, et gaasid väljuvad pideva joana.[1].

---

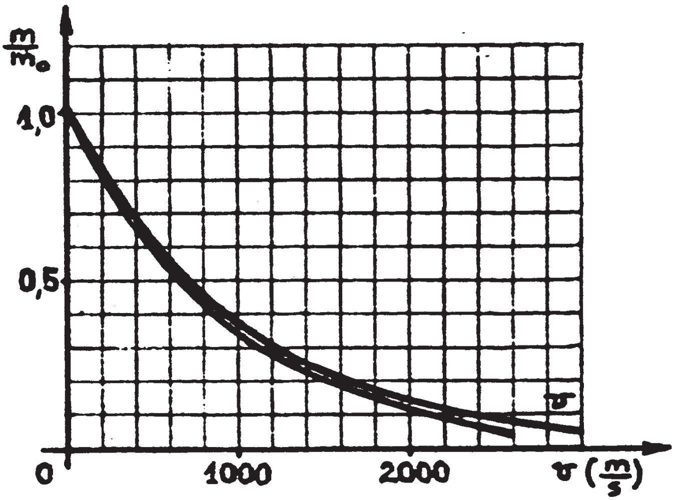
[1]Täpne valem omab kuju

$$v = v_g \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

ning kannab vene teadlase Konstantin Tsiolkovski nime.

v	v_n, m/s	m/m_0	v, m/s
0	0	1,00	0
2	103	0,90	104
4	217	0,80	222
6	346	0,70	356
8	495	0,60	510
10	668	0,50	692
12	879	0,40	915
14	1150	0,30	1200
16	1530	0,20	1610
18	2100	0,10	2300
19	2600	0,05	2950

Joonisel 8 on toodud kiiruse graafikud. Jooniselt on näha, et raketi kiiruse kasv on hiljem tunduvalt suurem, sest raketi mass pidevalt väheneb.



Joonis 8: Kiiruse muutus reaktiivse liikumise puhul

Ülesanne 11. Raketist, mille mass on pool tonni ja asub horisontaalsel alusel, paiskub $n = 2$ portsu ainet kiirusega $v_g = 1000$ m/s. Kummagi portsu mass on $m = 25$ kg. Kui suur on raketi kiirus v?
Vastus: $v = 103$ m/s

6. Energia jäävuse seadus

Liikumist kirjeldatakse mitmesuguste füüsikaliste suuruste abil. Teepikkus, kiirus, kiirendus, mass, jõud, aeg jt. on kõigile tuntud. Üldiselt mõistetakse aga liikumise all mitte ainult mehaanilist liikumist, kus keha koordinaadid ajaliselt ruumis muutuvad, vaid üldse teatud protsesside (soojuslike, optiliste, tuumasiseste) kulgu. Kõiki liikumise vorme iseloomustavaks *skalaarseks* suuruseks on *energia*. Mehaanilist liikumist iseloomustatakse kineetilise ja potentsiaalse energiaga.

Kineetiline energia

$$W_k = \frac{mv^2}{2} \tag{8}$$

on määratud keha kiiruse ja massiga. Kineetilise energia väärtus sõltub taustsüsteemi valikust, sest viimasest sõltub ka keha kiirus. Kui reisija istub rongis, siis rongi suhtes on tema kineetiline energia null, maapinna suhtes aga määratud rongi kiirusega ja reisija massiga.

Potentsiaalne energia on määratud kehade vahel mõjuvate jõududega, mis sõltuvad kehade asendist. Et jõude on looduses mitu liiki (gravitatsioonijõud, elastsusjõud, elektromagnetilised jõud jne.), siis on ka valemeid potentsiaalse energia arvutamiseks mitmeid. Näiteks kahe keha gravitatsioonilise külgetõmbe potentsiaalne energia

$$W_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \;, \tag{9}$$

kus m_1, m_2 on kehade massid, r — kehade vaheline kaugus ja γ gravitatsioonikonstant. Miinusmärk viitab asjaolule, et nende kehade teineteisest eemaldamiseks peavad välisjõud tegema tööd. Kui kehad asetsevad teineteisest lõpmata kaugel, siis on nende vahel mõjuv külgetõmbejõud

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = 0$$

ning ka süsteemi potentsiaalne energia on 0. Kehade lähenemisel mõjuvad nende vahel külgetõmbejõud, mis nihutavad kehi ja teevad tööd. Kokkuleppeliselt loeme, et kui mingi süsteemi jõud teevad tööd, siis süsteemi potentsiaalne energia väheneb. Seega tulebki potentsiaalne energia miinusmärgiga.

Võtame näiteks süsteemi Maa ja keha. Maa pinnal oleva keha potentsiaalne energia (õigemini süsteemi Maa-keha potentsiaalne energia) on valemi (9) kohaselt $W_p = -\gamma mM/R_0$, kus M on Maa mass ja R_0 — Maa raadius. Tõstame keha maapinnast kõrgusele h. Selleks peavad välisjõud tööd tegema ning süsteemi potentsiaalne energia kasvab (absoluutväärtuselt väheneb). Potentsiaalne energia kõrgusel h

$$W_p' = -\gamma \frac{mM}{R_0 + h} \,.$$

Tavaliselt mõõdame me potentsiaalset energiat mingi sobivalt valitud nivoo suhtes. Antud juhul sobib selleks Maa pind. Kõrgusele h tõstetud keha potentsiaalne energia on siis maapinna suhtes:

$$W_{ph} = W_p' - W_p = -\gamma \frac{mM}{R_0 + h} - \left(-\gamma \frac{mM}{R_0}\right) =$$

$$= -\gamma mM \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_0 + h}\right) = m \frac{\gamma M}{R_0^2} \frac{h}{1 + h/R_0} = mg_0 \frac{h}{1 + h/R_0} \,,$$

kus $\gamma M/R_0^2 = g_0$ on raskuskiirendus maapinnal. Juhul, kui $h \ll R_0$, siis $W_p = mg_0 h$.

Saime meile hästi tuntud potentsiaalse energia valemi, mis, nagu selgus, on tegelikult ligikaudne.

Elastselt deformeeritud keha potentsiaalne energia avaldub aga hoopis teise valemiga:

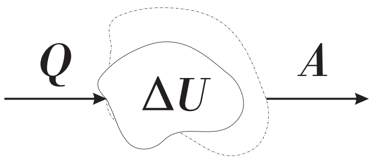
$$W_p = \frac{kx^2}{2}\ , \tag{10}$$

kus k on keha jäikus ja x — keha deformatsioon. Jäikus on võrdne jõuga, mille mõjul keha deformatsioon on ühikuline.

Pikaajalise looduse vaatluse tulemusel on jõutud järeldusele, et *isoleeritud süsteemi energia on jääv.* Kõige üldisemalt esitatakse see seadus nn. *termodünaamika esimese seadusena*:

$$Q = \Delta U + A \tag{11}$$

kus Q on süsteemile antud soojushulk, ΔU siseenergia muutus ja A süsteemi poolt tehtud töö. Siseenergia all mõistetakse kõigi antud süsteemi kuuluvate kehade energiate summat. Näiteks koosneb gaasi siseenergia molekulide liikumise kineetilisest energiast ja molekulide vastastikust mõju iseloomustavast potentsiaalsest energiast. Aatomisisese energia jätame praegu mängust välja. Valem (11) tähendab, et kui me gaasile anname väljastpoolt mingi soojushulga, siis selle tagajärjel gaasi siseenergia muutub ning gaas võib paisuda ja teeb tööd (joonis 9). Võib ka nii juhtuda, et siseenergia ei muutu, siis on antud soojushulk võrdne tööga. Soojushulga ülekandmine ja töö tegemine on kaks energia ülekandmise protsessi.



Joonis 9: Seos töö, siseenergia ja välisenergia vahel

Mehhanismides liiguvad rattad, võllid, kangid jne., millel on oma kineetiline ja potentsiaalne energia. Nende energiate summa moodustab siseenergia. Oletame, et mehhanismi liikumisel saavutavad kõik masinaosad oma esialgse asendi ja kiiruse. Hõõrdumist ei arvesta. Siis on mehhanismil ka endine siseenergia ning siseenergia muutus $\Delta U = 0$. Valemist (11) aga järeldub, et antud süsteem võib nüüd tööd teha ainult siis, kui talle kantakse üle väljastpoolt teatud energia. Siit järeldub, et energia jäävuse seadus ei luba ehitada nn. perpetuum mobile't ehk igiliikurit, mis peaks igavesti töötama ilma väljastpoolt energiat saamata. Tõepoolest, kui $Q = 0$, siis $A = -\Delta U$, mis tähendab, et masin võib küll tööd teha, kuid ainult oma siseenergia arvel. Viimane on aga lõplik suurus — ükskord saab otsa. Sellepärast lõppesidki kõik katsed igiliikuri ehitamiseks tulemusteta, kui mitte arvestada konstruktorite uusi ideid, mida oli võimalik muuks otstarbeks kasutada.

Mehaanikas kasutatakse sageli mehaanilise energia jäävuse seadust, mille kohaselt kineetilise ja potentsiaalse energia summa on jääv. See seadus on täidetud, aga ainult ideaalsel juhul, s.t. kui puudub hõõrdumine. Hõõrdumise esinemisel muundub osa mehaanilist energiat soojusliikumise energiaks — kehade temperatuur kasvab. Loomulikult on täidetud üldine energia jäävuse seadus.

Kui näiteks langevarjur langeb avamata langevarjuga ühe kilomeetri (algkiirus olgu 0), siis mehaanilise energia jäävuse seaduse $mgh = mv^2/2$ kohaselt oleks tema kiirus pärast kilomeetri läbimist

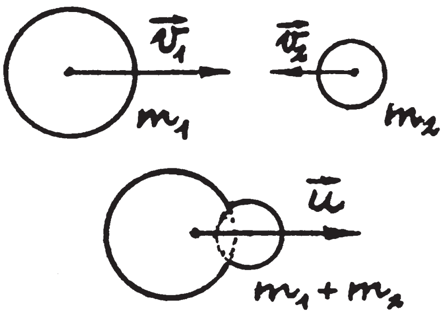
$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1000} \approx 140 \text{ m/s} \approx 500 \text{ km/h}.$$

Hõõrdejõudude tõttu ei ületa aga langemise kiirus ≈ 200 km/h. Nagu näha, teeme siin õige suure vea, kui rakendasime mehaanilise energia jäävuse seadust. Arvutustes tuleb sellele alati mõtelda.

Vaatleme nüüd probleemi, kus kasutame nii energia kui ka impulsi jäävuse seadust.

7. Kehade põrge

Sõna "põrge" omab antud juhul laiemat tähendust tema igapäevase tähendusega võrreldes. Põrke all mõistetakse ükskõik millist kahe või enama keha kohtumist, mis kestab lühikest aega. Põrke termini alla mahub piljardikuulide kokkupõrge ja aatomituumade põrge, hüpe trammile, kuuli tungimine seina jne. Allpool vaatleme tsentraalset põrget. Tsentraalsel põrkel liiguvad põrkuvad kehad mööda raskuskeskmeid läbivat sirget. Vaatleme kahte äärmist juhtu: absoluutselt plastilist ja absoluutselt elastset põrget.



Joonis 10: Absoluutselt mitteelastne (plastiline) põrge

Absoluutselt plastilisel põrkel kehad deformeeruvad, ühinevad ning liiguvad koos edasi (joonis 10). Kui kehadele ei mõju välisjõude, siis võime kasutada impulsi jäävuse seadust:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, u,$$

millest kehade liikumise kiirus

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\,. \qquad (12)$$

Plastilisel põrkel muutub osa kehade kineetilisest energiast põrkel tekkiva jääva deformatsiooni tõttu teisteks energialiikideks, peamiselt soojusenergiaks. Energia jäävuse seaduse rakendamisel võime selle osa arvutada.

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)\, u^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2}\ .$$

Absoluutselt elastsel põrkel säilib nii süsteemi impulss kui ka kineetiline energia. See tähendab, et pärast põrget taastuvad täielikult põrke vältel deformeeritud kehade kujud. Tähistame põrkuvate kerade kiirused enne põrget v_1 ja v_2 ja pärast põrget u_1 ja u_2. Eelduse kohaselt täidetakse impulsi ja kineetilise energia jäävuse seadused:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{1}{2}\, m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\, m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 u_2^2 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} m_1\,(v_1 - u_1) = m_2\,(u_2 - v_2) \\ m_1\,(v_1^2 - u_1^2) = m_2\,(u_2^2 - v_2^2) \end{cases}\ .$$

Jagades teise võrrandi esimesega ning arvestades, et

$$a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b),$$

saame $v_1 + u_1 = u_2 + v_2$, millest

$$u_2 = v_1 + u_1 - v_2.$$

Asetades saadud tulemuse esimesse võrrandisse, leiame, et esimese kera kiirus pärast põrget

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)\, v_1}{m_1 + m_2} \tag{13}$$

ja analoogiliselt teise kera kiirus pärast põrget

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)\, v_2}{m_1 + m_2}\ . \tag{14}$$

Vaatleme kahte olulist erijuhtu:

1. Põrkuvate kehade massid on võrdsed: $m_1 = m_2 = m$. Siis $u_1 = v_2$ ning $u_2 = v_1$. Põrkuvad kehad vahetavad oma kiirused nii suuruselt kui ka suunalt. Kui teine on paigal, siis pärast põrget jääb esimene paigale.

2. Olgu $v_2 = 0$ ning $m_2 \gg m_1$, siis

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)\, v_1}{m_1 + m_2} \approx -v_1, \quad u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \approx 0.$$

Esimene kera põrkub niisama suure, kuid vastassuunalise kiirusega. Teine kera jääb paigale (nagu põrge vastu seina).

Ülesanne 12. Kera, mille mass $m = 100$ g, põrkub seinalt seina suhtes $\alpha = 30°$ nurga all. Lugedes põrke absoluutselt elastseks, arvutada põrkumisel kerale mõjuv jõuimpulss.

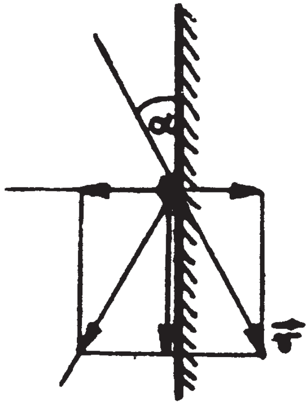
Jõuimpulss on võrdne impulsi muutusega. Kera kiiruse võib jagada kaheks komponendiks: pinna suunaliseks ja pinnaga ristiolevaks (joonis 11). Pinna suunaline komponent jääb põrkel muutumatuks, sest selles suunas ei mõju mingeid jõude. Pinnaga ristiolev komponent muutub aga vastupidiseks. Selle tulemusena põrkuv kera nagu peegelduks seinalt. Kerale mõjub jõuimpulss:

$$F\Delta t = mv \sin\alpha - (-mv \sin\alpha) = 2mv \sin\alpha = 0{,}1v.$$

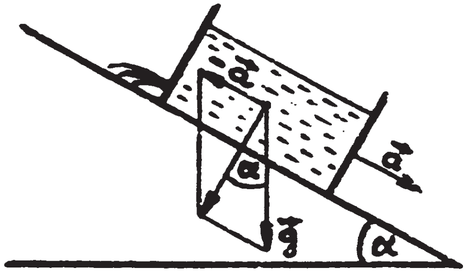
Ülesanne 13. Veejuga, mille ristlõike pindala $S = 6$ cm^2, põrkub seinalt kiiruse kaotuseta normaali suhtes $\alpha = 60°$ nurga all. Leida seinale mõjuv jõud, kui vee kiirus on $v = 12$ m/s.

Jõud on võrdne impulsi muutusega ajaühikus. Iga vee osake, mis põrkub seinalt, annab seinale jõuimpulsi

$$F\Delta t = 2mv \cos\alpha.$$



Joonis 11: vt. ül. 12



Joonis 12: vt. ül. 14

Aja Δt jooksul langeb seinale $v\Delta t\,(\rho/m)\,S$ osakest, kus ρ on vee tihedus. Seinale mõjuv jõud

$$F = \frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t}\,v\Delta t\,\frac{\rho}{m}\,S = 2\rho v^2 S\cos\alpha \approx 86{,}4\ \mathrm{N}.$$

Ülesanne 14. Anum veega liigub mööda kaldpinda, mille kaldenurk on α, nii et vee pind on paralleelne kaldpinnaga (joonis 12). Anuma põhja lähedal olevast avast voolab vesi kiirusega v. Arvutada hõõrdetegur anuma ja kaldpinna vahel, kui anuma mass koos veega on m ja väljavoolu ristlõikepindala S.

Kujutleme, et vee osakesed anumas on nagu inimesed rongis, mis hakkab liikuma kiirendusega. Me teame, et sel juhul mõjub inimestele inertsijõud, mis püüab inimest paisata tahapoole. See on arusaadav, sest inimesed peavad Newtoni esimese seaduse kohaselt liikuma ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Kinnituste ja hõõrdumise puudumisel libiseksid inimesed vastu vaguni seina.

Inimestele mõjuv inertsijõud $F_i = -ma$, kus a on vaguni kiirendus. Miinusmärk viitab asjaolule, et vagunisolijaile, kes määravad oma asendi vaguni suhtes, on kiirendus vaguni kiirendusega vastupidine. Sama olukord on ka vedelikuga anumas. Vedeliku osakesed paiskuvad tahapoole ning vedeliku nivoo kaldub, võttes niisuguse asendi, et vedeliku pind on risti resultantjõuga s.o. raskusjõu ja inertsijõu geomeetrilise summaga. Siit järeldub, et anum peab liikuma kiirendusega $a = g \sin \alpha$.

Kaldpinnal liikuvale anumale mõjub raskusjõud, veevoolu reaktiivjõud, pinna reaktsioon ja hõõrdejõud. Pinna reaktsiooni projektsioon liikumise suunale on 0 — ta ei kiirenda ega aeglusta liikumist. Newtoni II seaduse põhjal

$$ma = mg \sin \alpha - F_h + F_r.$$

Kiirendus $a = g \sin \alpha$, hõõrdejõud $F_h = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ ja reaktiivjõud (vt. ül. 13) $F_r = \rho v^2 S$. Seega

$$mg \sin \alpha = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha + \rho S v^2,$$

millest

$$\mu = \frac{S v^2 \rho}{mg \cos \alpha} .$$

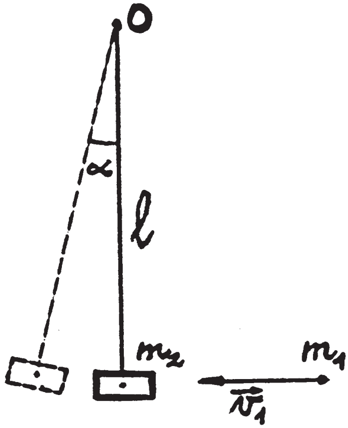
Ülesanne 15. Kuul lendab horisontaalselt kiirusega $v_1 = 400$ m/s ja tungib puuklotsi, mis on riputatud $l = 4$ m pikkuse niidi otsa. Määrata nurk α, mille võrra kaldub niit, kui kuuli mass on $m_1 = 20$ g ja klotsi mass $m_2 = 5$ kg.

Sageli lahendatakse see ülesanne järgmiselt. Klotsi tungides muundub kuuli kineetiline energia kuuli ja klotsi potentsiaalseks energiaks (joonis 13). Seega

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = (m_1 + m_2)\, gh = (m_1 + m_2)\, gl\, (1 - \cos \alpha),$$

millest

$$\cos \alpha = 1 - \frac{m_1 v_1^2}{2gl\,(m_1 + m_2)} = -7 \text{ ?!}$$



Joonis 13: vt. ül. 15

Sisuliselt tähendaks see, et pendel hakkab tiirlema ümber punkti 0. Viga on selles, et kui kuul tungib puusse ja sinna jääb, siis on meil tegu absoluutselt plastilise põrkega ning enamus kuuli kineetilisest energiast muutub soojusenergiaks. Siis peame pendli algkiiruse määrama impulsi jäävuse seadusest

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

ja siis kasutama mehaanilise energia jäävuse seadust pendli kohta, arvestades, et hõõrdumine on tühine:

$$\frac{(m_1 + m_2)\, v_2^2}{2} = (m_1 + m_2)\, gl\, (1 - \cos\alpha),$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{v_2^2}{2gl} = 1 - \frac{(m_1 v_1)^2}{2gl\,(m_1 + m_2)^2} = 0{,}968 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 15°.$$

Ülesanne 16. Teraskuul, mille mass on $m = 2$ g, langeb kõrguselt $h_1 = 1$ m terasplaadile ja põrkub temalt kõrgusele $h_2 = 81$ cm. Leida *1)* jõuimpulss, mis mõjub kerale põrkemomendil ja *2)* põrkel eralduv soojushulk. *Vastus*: $F\Delta t = 16{,}8 \cdot 10^{-3}$ kg·m/s, $Q = 3{,}72 \cdot 10^{-3}$ J.

Ülesanne 17. Kelgumäelt, mille kõrgus on $h = 2$ m ja pikkus (mõõdetud horisontaalselt) $l = 5$ m, sõidavad kelgud, mis libisevad mäe jalamist $s = 35$ m kaugusele. Arvutada hõõrdetegur. *Vastus*: $\mu = 0{,}05$.

Ülesandeid kontrolltöödeks

1. Mürsk, mille mass on $m = 20$ kg, alustab lendu horisondi suhtes $\alpha = 60°$ nurga all kiirusega $v_0 = 200$ m/s. Kõrgeimas lennu punktis tabab ta märki ja kaotab oma kiiruse $\Delta t = 0{,}02$ s jooksul. Leida keskmine löögijõud F. Õhutakistusega mitte arvestada.

2. Platvormvagunile, mis liigub kiirusega v, on kinnitatud suurtükk. Toru on suunatud liikumissuunale ja asetatud horisondi suhtes nurga all α. Suurtükist lasti mürsk, mille tulemusel platvormi kiirus vähenes n korda. Platvormi mass on koos suurtükiga M ja mürsu mass m. Leida mürsu algkiirus.

3. Tasasel põrandal asetseb platvorm, mis võib veereda praktiliselt hõõrdevabalt. Platvormi ühes otsas seisab inimene. Millise kiirusega u hakkab liikuma platvorm, kui inimene liigub platvormi suhtes kiirusega $v = 2$ m/s? Platvormi mass on $M = 20$ kg ja inimese mass $m = 80$ kg.

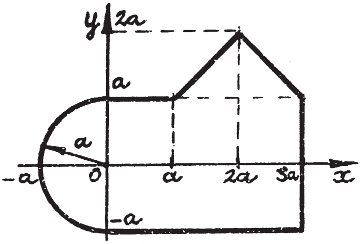
4. Kaks uisutajat, kelle massid on $m_1 = 80$ kg ja $m_2 = 50$ kg, hoiavad kinni pingutatud nööri otstest näoga teineteise poole. Üks nendest hakkab kerima nööri kiirusega $v = 1$ m/s. Kui suure kiirusega liiguvad uisutajad jääl? Hõõret ei arvestata.

5. Paadis, mille mass on $M = 240$ kg, seisab $m = 60$ kg massiga inimene. Paat sõidab kiirusega $u = 2$ m/s. Inimene hüppab paadist horisontaalses suunas kiirusega $v = 4$ m/s Leida paadi kiirus kui hüpe toimus paadi liikumissuunale vastu ja risti.

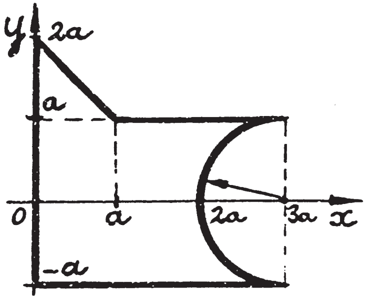
6. Kivi visatakse horisondi suhtes $\alpha = 60°$ nurga all. Kivi kineetiline energia on algmomendil $W_k = 20$ J. Leida kivi kineetiline ja potentsiaalne energia kõrgeimas punktis. Õhutakistusega ei arvesta.

7. Kui suur peab olema pumba võimsus, et pumbata Q liitrit vett ühe sekundi jooksul kaevust, mille sügavus on h meetrit? Veejoa diameeter on d millimeetrit.

8. Leida joonisel 14 toodud tasapinnalise kujundi raskuskeskme koordinaadid.



Joonis 14: vt. ül. 8



Joonis 15: vt. ül. 9

9. Leida joonisel 15 toodud tasapinnalise kujundi raskuskeskme koordinaadid.

10. Õhupüssist tulistatakse tikutopsi, mis seisab $s = 30$ cm kaugusel laua äärest. Kuul, mille mass on $m = 1$ g, lendab horisontaalselt kiirusega $v_0 = 150$ m/s, läbib karbi ja lendab edasi kiirusega $v_0/2 = 75$ m/s. Topsi mass on $M = 50$ g. Kui suur peaks olema hõõrdetegur, et karp ei libiseks laualt?

11. Lennuki kiirus maandumisel lennukikandja pardale on $v = 108$ km/h. Aheldatuna pidurdusköiest läbib ta teepikkuse $s = 30$ m kuni täieliku peatumiseni. Leida piloodi maksimaalne kaal (arvestades ülekoormusega pidurdamisel) kui köie jäikus on konstantne. Piloodi mass on $m = 70$ kg.

12. Kaks kera, mille massid on m_1 ja m_2 hakkavad libisema teineteisele vastu algkiirusega 0 ja kõrguselt H (joonis 16). Toimub absoluutselt mitteelastne põrge. Kui kõrgele tõusevad ühinenud kerad? Hõõrdumist ei arvesta.

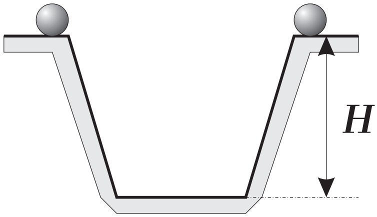
13. Osake, mille mass on m ja kiirus v, lendab paigalseisvale osakesele massiga $m/2$ ja pärast elastset põrget liigub nurga all $\alpha = 30°$ esialgse liikumissuuna suhtes. Kui suure kiirusega alustab liikumist teine osake?

14. Kera, mille mass on m_1, liigub kiirusega v ja põrkub absoluutselt elastselt paigalseisvalt keralt, mille mass on m_2. Leida, millise masside suhte korral lendavad kuulid pärast põrget vastupidises suunas võrdse kiirusega.

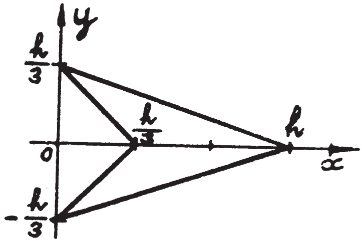
15. Kaks ühendatud anumat ristlõike pindaladega S_1 ja S_2 on täidetud veega ja kaetud kergete kolbidega. Süsteem on tasakaalus. Suurema läbimõõduga kolvile asetatakse raskus P. Kui suur soojushulk eraldub üleminekul uude tasakaaluasendisse? Anda lahendus üldkujul, samuti arvutada soojushulk juhul, kui $S_1 = S_2 = 100$ cm^2 ja $P = 10$ N.

16. Niidi otsa kinnitatud väike raske kuulike sooritab ringliikumist vertikaalasendis. Näidata, et see pole võimalik kui niit ei pea vastu tõmbele, mis ületab kuuli kaalu kuuekordselt.

17. Sputnik, mille mass on $m = 1$ t, lendab $H = 200$ km kõrgusel ringorbiidil ümber Maa. Pidurdamisel orbiidi raadius väheneb ning ta jõuab uuele orbiidile, mille kõrgus on $h = 180$ km. Kui palju kaotab sputnik pidurdamisel energiat? Arvutustäpsus mitte üle $\delta = 5\%$.



Joonis 16: vt. ül. 12



Joonis 17: vt. ül. 23

18. Kosmoselaev liigub Kuu poole Kuu külgetõmbe mõjul. Suurel kaugusel oli laeva kiirus Kuu suhtes 0. Vaba langemise kiirendus on Kuu pinnal 6 korda väiksem kui maapinnal. Kuu raadius on $R = 1700$ km. Millisel kõrgusel h tuleb käivitada pidurdusmootorid, et sooritada pehme maandumine (koormus ei ületa 5g)? Massi muutused kütuse põlemisel jätame tähele panemata.

19. Kuulike, mille raadius on $r = 15$ mm ja mass $m = 5$ g, on paigutatud vette $H = 30$ cm sügavusele. Vabastamisel kargas kuulike välja $h = 10$ cm kõrgusele vee pinnast. Milline osa mehaanilisest energiast hajus hõõrdumise tõttu soojusena?

20. Klots, mille mass on m, hoitakse õhus N altpurskava veejoaga. Iga veejoa ristlõige on S ja väljavoolu kiirus v. Klotsilt põrkudes hajub vesi horisontaalselt. Kui kõrgel seisab klots? Vee tihedus on ρ ja raskuskiirendus g.

21. Parv, mille mass on $M = 100$ kg, liigub kiirusega $u = 1$ m/s piki jõekallast. Parvele hüppab risti kaldaga inimene, kelle mass on $m = 75$ kg ja kiirus $v = 4$ m/s. Arvutada parve kiirus pärast inimese parvele minekut. Hõõrdumisega ei arvesta.

22. Mitu korda väheneb heeliumi aatomi kiirus pärast tsentraalset põrget paigalseisva vesiniku aatomiga? Põrge lugeda absoluutselt elastseks.

23. Leida joonisel 17 toodud tasapinnalise kujundi massikeskme koordinaadid.

24. Kaheastmelisest raketist, mille kogumass $M = 1000$ kg, eraldus momendil, mil rakett saavutas kiiruse $v_0 = 191$ m/s, teine aste. Teise astme mass $m_2 = 400$ kg ja kiirus $v = 185$ m/s. Kui suure kiirusega hakkas liikuma esimene aste?

25. Vertikaalse vedru ülemisele otsale paigutatud raskus surub vedru kokku $d = 2$ mm võrra. Kui palju surub vedru kokku seesama raskus, kui ta kukub vedrule vedru ülemise otsa suhtes $h = 5$ mm kõrguselt? Soojuskadudega ei arvesta.

26. Kui kõrgele tõuseb Maa pinnast rakett, mis on laetud vertikaalselt üles esimese kosmilise kiirusega ($v_I = 7900$ m/s).

27. Pendel kujutab endast $l = 1{,}5$ m pikkust kaaluta varrast, mille otsa on kinnitatud $M = 1$ kg massiga terasest kuul. Kuulile langeb horisontaalselt lendav $m = 20$ grammise massiga kuulike. Pendli maksimaalse kalde nurk on $\alpha = 30°$. Arvutada kuulikese kiirus, kui põrge lugeda absoluutselt elastseks ja tsentraalseks.

Kontrolltööde variandid

Variant 1: 1, 3, 8, 10, 13, 18, 19.

Variant 2: 2, 4, 9, 11, 14, 17, 20.

Variant 3: 2, 5, 7, 9, 12, 15, 16.

Variant 4: 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27.

Kontrolltööks .... tuleb lahendada

variandi ..... ülesanded.

Tähtaeg ....