TARTU ÜLIKOOL
Teaduskool

V. Väinaste

Kehade pöördliikumine

TARTU 2009

Kehade pöördliikumine

Mehaanikas eristatakse kehade liikumise kahte põhiliiki:

a) kulgliikumine

b) pöördliikumine

Kulgliikumise korral liiguvad kõik keha punktid ühtviisi. Gümnaasiumi füüsika kursuses õpitakse seda liikumise liiki võrdlemisi põhjalikult. Hoopis vähe on aga õpiku lehekülgedel ruumi jäetud teise põhilise liikumise liigi iseloomustamiseks. Samal ajal kohtame pöördliikumist igapäevases elus ja tehnikas mitte harvemini kui kulgliikumist.

Looduses sooritavad pöördliikumist näiteks Päike, Maa ning teised planeedid, tehnikas on sellega tegemist mitmesuguste hammas- ja rihmülekannete puhul.

Pöördliikumiseks nimetatakse sellist liikumist, mille puhul keha kõik punktid liiguvad mööda ringjooni, kusjuures nende ringjoonte keskpunktid asuvad ühel sirgel — pöörlemisteljel. *Pöörlemiseks* nimetame sellist pöördliikumist, mille puhul pöörlemistelg läbib pöördliikumises olevat keha.

Nagu selgub, on pöördliikumise korral keha punktide liikumise joonkiirused ja joonkiirendused erinevad. Et iseloomustada pöördliikumises oleva keha liikumist, tuleb leida selline füüsikaline suurus, mis kirjeldaks kogu keha liikumist. Pole raske näha, et selliseks suuruseks võib võtta *keha pöördenurga* — nurga, mille võrra pöördub keha mingist punktist pöörlemisteljele tõmmatud ristsirge. Valinud nii pöördliikumist iseloomustava suuruse, näeme, et *pöördliikumisega seotud põhiülesandeks on osata määrata keha pöördenurka mistahes ajamomendil.* Selleks on vaja teada pöördenurka ajamomendil $t = 0$ ning pöördenurga muutumise sõltuvust ajast. Viimast iseloomustab nurkkiirus ω, mis mõõdab pöördenurga φ muutust ajaühikus (SI-süsteemis mõõtühikuks $1\ \mathrm{rad/s}$). Sellest lähtudes

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}, \text{ millest}$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega t\,.}$$

Saadud seos võimaldabki määrata pöördenurka mistahes ajamomendil, kuid ainult juhul, kui $\omega = \mathrm{const}$ (ühtlane pöördliikumine).

Kui $\omega \neq \mathrm{const}$, siis nimetatakse sellist pöördliikumist *mitteühtlaseks*.

Sellisel juhul on põhiülesande lahendamiseks vaja teada nurkkiiruse muutumise seadust. Vaatleme alljärgnevalt lihtsamat mitteühtlase pöördliikumise juhtumit, kus

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \mathrm{konst}$$

s.o. ühtlaselt muutuvat pöördliikumist.

Suurust, mis mõõdab nurkkiiruse muutumist ajaühikus, nimetatakse *nurkkiirenduseks*:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

SI-süsteemis mõõtühikuks 1 rad/s^2. Analoogiliselt kulgliikumisega võib pöörlemine olla *ühtlaselt kiirenev* $(\varepsilon > 0)$ või *ühtlaselt aeglustuv* $(\varepsilon < 0)$. Nende pöördliikumise liikide korral keskmine nurkkiirus

$$\omega_k = \frac{\omega + \omega_0}{2}$$

ning pöördenurk $\varphi = \omega_k t$. Pärast asendamist

$$\varphi = \frac{(\omega_0 + \omega) \cdot t}{2}$$

ning edasi teisendades

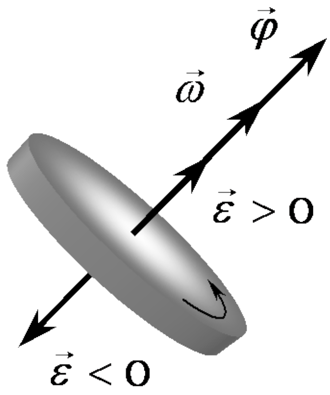
$$\varphi = \frac{\omega_0 + \omega_0 + \varepsilon t}{2} = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

saame:

$$\boxed{\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.}$$

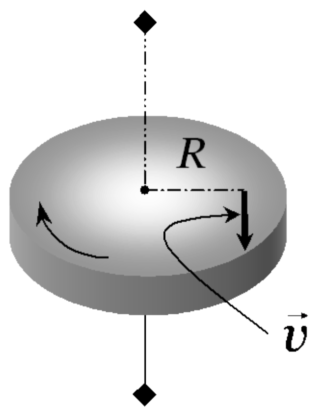
Sellest on näha, et pöördliikumise kinemaatika valemid on sarnased kulgliikumisel kehtivate valemitega, kus teatud suurused on asendunud teistega (läbitud tee *s* on asendunud pöördenurga φ-ga, joonkiirus *v* ω-ga ning *a* ε-ga).

Seni on juttu olnud pöördliikumist iseloomustavate vektoriaalsete põhisuuruste φ, ω, ε arvuliste väärtuste leidmisest. Nende suuruste suuna määrab ära keha pöörlemise suund. Pöördenurga ja nurkkiiruse vektorite siht langeb ühte pöörlemistelje sihiga ning suund määratakse nn "kruvireegliga". *Kui kruvi pea pöörlemissuund ühtib keha pöörlemissuunaga, siis kruvi liikumise suund määrab $\vec{\varphi}$ ja $\vec{\omega}$ suuna* (vt. joonis 1).



Joonis 1

Samuti langeb nurkkiirenduse vektori siht ühte pöörlemistelje sihiga, kuid suund oleneb sellest kas $\varepsilon > 0$ või $\varepsilon < 0$ (vt. joonis 1).



Joonis 2

Seega taandub ühtlaselt muutuva pöördliikumise korral pöördenurga määramine nurkkiirenduse leidmisele. Järgnevalt vaatleme võimalusi, kuidas saaks määrata nurkkiirendust. Lähtume sellest, et iga pöördliikumises oleva keha punkti võib vaadelda kui ringjoonel liikuvat masspunkti (vt. joon. 2). Selle masspunkti joonkiirendus $a = \Delta v / \Delta t$. Kuna $v = \omega R$, siis

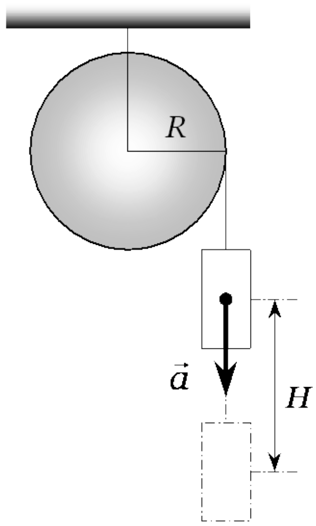
$$a = \frac{\Delta\omega R}{\Delta t}.$$

Kuna aga $\varepsilon = \Delta\omega / \Delta t$, siis $a = \varepsilon R$, millest

$$\boxed{\varepsilon = a / R.}$$

Saadud seos võimaldabki määrata nurkkiirendust.

Joonisel 3 on kujutatud katseseade, mille abil on võimalik saadud seose põhjal leida ε. Plokile keeratud nööri ühte otsa on kinnitatud koormis, mis liigub alla jääva kiirendusega a. Sama kiirendusega liiguvad kõik plokiratta punktid, mis asetsevad keskpunktist raadiuse kaugusel. Eespool toodud seoses $\varepsilon = a / R$ võime asendada $a = 2H / t^2$ (kulgliikumise valemist $H = at^2 / 2$).



Joonis 3

Kuna H, R, ja t on mõõdetavad, siis saamegi seosest

$$\varepsilon = 2H / Rt^2$$

leida nurkkiirenduse väärtuse. Pöördenurga leiame valemi

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$ põhjal.

Taoline nurkkiirenduse määramine ei ole alati võimalik. Kuidas siis toimida? Vastuse leidmiseks on vaja põhjalikumalt tundma õppida pöördliikumise seaduspärasusi, täpsemini öeldes, uurida tingimusi, mis määravad nurkkiirenduse väärtuse. Sellele annab vastuse *pöördliikumise dünaamika.*

Taolist uurimist võib lihtsamal juhul teostada joonisel 3 kujutatud katseseadmega. Muutes koormuse massi ja nööri kaugust keskpunktist selgub, et nende muutmisel muutub ka nurkkiirendus. Üheks pöördliikumist iseloomustavaks suuruseks on valitud korrutis FR, mida nimetatakse *jõumomendiks (M).*

Rakendades kettale erinevaid jõumomente ning mõõtes neile vastavad nurkkiirendused selgub, et nende vastavate väärtuste suhe on antud ketta korral jääv suurus.

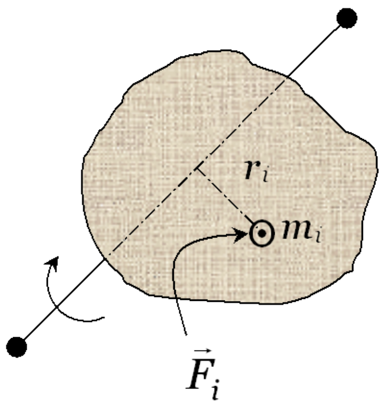
$$\frac{M_1}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{\varepsilon_2} = \cdots = \frac{M_n}{\varepsilon_n} = \text{konst}.$$

Suhte M / ε jäävus ei ole juhuslik, vaid peab iseloomustama pöördliikumises oleva keha mingit üldist omadust. Kui vaadeldav suurus on määratud ja leitud võimalus selle mõõtmiseks, siis on ka ε leidmise küsimus lahendatud. Suhet M / ε, mis iseloomustab keha inertsust pöördliikumisel, nimetatakse keha *inertsimomendiks (J).*

Seega $M / \varepsilon = J$ ning

$$\boxed{M = J\varepsilon .}$$

Saadud seost nimetatakse *pöördliikumise dünaamika põhivõrrandiks*. Nimetatud võrrandi põhjal on võimalik katseandmete põhjal määrata keha inertsimomenti. Taolised mõõtmised näitavad, et keha inertsimoment sõltub keha massist, mõõtmetest ja massi jaotusest pöörlemistelje suhtes. Joonisel 3 kujutatud katseseadme abil, mõõtes ε ja M väärtusi, saab leida põhivõrrandi kaudu keha inertsimomendi. Sellist eksperimentaalset meetodit ei ole aga alati võimalik kasutada. Järgnevalt vaatleme, kuidas saab inertsimomenti lihtsamatel juhtudel leida arvutuste teel.



Joonis 4

Olgu m_i pöörleva keha massielement ja r_i selle kaugus pöörlemisteljest (vt. joon. 4, kus ⊙ tähistab joonise tasandiga risti olevat lugeja poole suunatud vektorit). Newtoni II seaduse põhjal massielemendile mõjuv jõud $F_i = m_i a_i$, kus $a_i = \varepsilon r_i$.

Asendades $F_i = m_i \varepsilon r_i$ ning korrutades saadud võrduse mõlemaid pooli r_i-ga, saame $F_i r_i = m_i r_i^2 \varepsilon$ ehk

$$M_i = m_i r_i^2 \varepsilon .$$

Analoogiliselt avalduvad mistahes teistele massielementidele mõjuvad jõumomendid:

$$M_1 = m_1 r_1^2 \varepsilon ,$$

$$M_2 = m_2 r_2^2 \varepsilon ,$$

– – – – – – – –

$$M_n = m_n r_n^2 \varepsilon$$

Summeerides saame:

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \\ = \varepsilon \cdot \left(m_1 r_1^{\,2} + m_2 r_2^{\,2} + \ldots + m_n r_n^{\,2} \right)$$

Sulgavaldis kujutabki antud keha inertsimomenti, milline üldkujul avaldub järgmiselt:

$$\boxed{J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^{\,2} .}$$

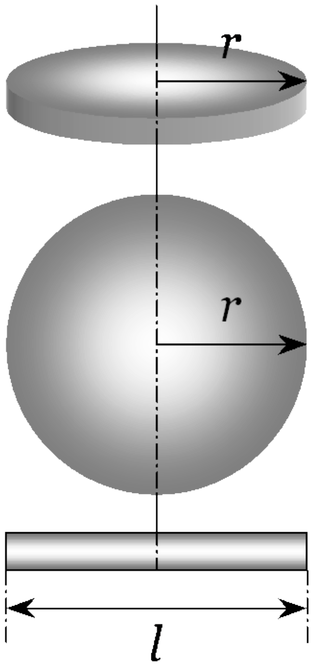
Saadud seost saame rakendada järgmiste lihtsamate kehade inertsimomentide leidmiseks:

a) peenikese varda otsa kinnitatud masspunkt tiirleb ringjoonel raadiusega r. Üldisest seosest $J = mr^2$.

b) peenike rõngas, mille mass on m, raadius r.

$$J = m_1 r_1^{\,2} + m_2 r_2^{\,2} + \ldots + m_n r_n^{\,2} = \\ = \left(m_1 + m_2 + \ldots + m_n \right) \cdot r^2 = mr^2 .$$

Teiste kehade (ketas, varras, kera jne.) inertsimomentide leidmine elementaarmatemaatika põhjal ei ole võimalik, vaid tuleb rakendada integraalarvutust.



Joonis 5

Olgu siin lisatud mõnede kehade inertsimomendid ilma arvutusteta (vt. joon. 5):

1) ketas (mass m, raadius r):

$$J = \frac{1}{2} \cdot mr^2,$$

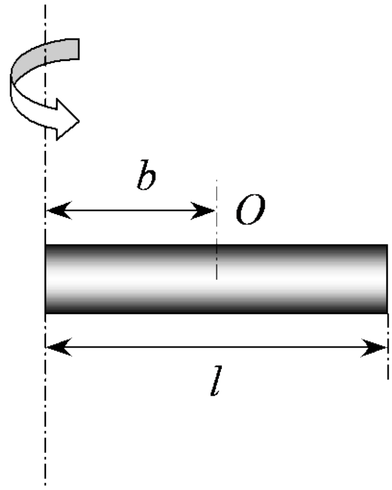
2) kera (mass m, raadius r):

$$J = \frac{2}{5} \cdot mr^2,$$

3) ühtlane varras (mass m, pikkus l):

$$J = \frac{1}{12} \cdot ml^2.$$

Need valemid kehtivad ainult sel juhul, kui pöörlemistelg läbib massikeset. Kui pöörlemistelje asend muutub, siis omab ka keha inertsimoment erineva väärtuse. Sellisel juhul võimaldab inertsimomenti määrata *Steineri teoreem*.



Joonis 6

Esitame selle ilma tõestuseta:

Keha inertsimoment meelevaldselt valitud punkti O_1 läbiva telje suhtes võrdub sama keha inertsimomendiga J_0 massikeset läbiva ja esimese teljega paralleelse telje suhtes, millele on liidetud korrutis mb^2, kus m on pöörleva keha mass ja b massikeskme kaugus pöörlemisteljest (vt. joonis 6).

Toodud pika sõnastusega teoreem avaldub valemi kujul järgmiselt:

$$\boxed{J = J_0 + mb^2.}$$

Rakendame Steineri teoreemi varda inertsimomendi leidmiseks, kui pöörlemistelg läbib varda otspunkti ning on risti varda teljega:

$$J = J_0 + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot ml^2 + \frac{ml^2}{4} = \frac{1}{3} \cdot ml^2.$$

Eeltooduga aga ei piirdu pöördliikumise seaduspärasused.

Pöördliikumise dünaamika põhivõrrandist $M = J\varepsilon$ saame, asendades

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}, \text{ et}$$

$$M = \frac{J \cdot (\omega - \omega_0)}{t} = \frac{J\omega - J\omega_0}{t}.$$

Korrutist $J\omega$ nimetatakse keha impulssmomendiks (ka liikumishulga moment). Sellise nimetuse põhjuseks on asjaolu, et lihtsamal juhul

$$J\omega = mr^2 \cdot \frac{v}{r} = mrv = (mv) \cdot r.$$

Seega $J\omega = (mv) \cdot r$, kus mv — masspunkti impulss ja r masspunkti kaugus pöörlemisteljest. Korrutise $J\omega$ kasutuselevõtmine pöördliikumise iseloomustamiseks ei ole juhuslik, sest selle kaudu on võimalik väljendada üht tähtsat seaduspärasust pöördliikumises olevate kehade puhul:

Kui seoses $M = \frac{J\omega - J\omega_0}{t}$ $M = 0$, siis $J\omega - J\omega_0 = 0$ ning $\underline{J\omega = J\omega_0}$.

Viimasest võrdusest järeldub, et *juhul, kui kehale mõjuvate väliste jõumomentide summa on null, siis keha impulssmoment on jääv.*

Saadud tulemus on aga üks looduses kehtivatest põhilistest jäävusseadustest — *impulssmomendi jäävuse seadus.* Igapäevases elus tuleb selle jäävuse seadusega eelkõige arvestada balletitantsijail, iluuisutajail, akrobaatidel jne. Selleks, et iluuisutaja saaks muuta pöörlemiskiirust, muudab ta käte ja jalgade asendi muutmisega keha inertsimomenti. Kui võrduses $J\omega = \text{konst}$ J väheneb, siis peab sama arv korda ω suurenema (iluuisutaja toob sel juhul käed kehale lähemale).

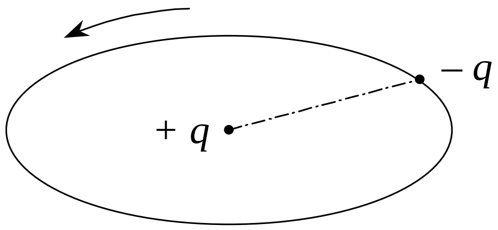
Seni oli juttu ainult impulssmomendi arvulisest väärtusest. Nii nagu keha impulss on vektoriaalne suurus, on ka impulssmoment vektor, mille suund langeb ühte nurkkiiruse vektori suunaga. Impulssmomendi jäävuse seadust tuleb mõista üldisemal kujul — kui väliste jõumomentide summa on null, jääb impulssmomendi suund samaks. Selle seaduspärasuse kehtivus ilmneb mitmete pöörlevate kehade juures (vurr, Maa pöörlemine jt.). Heaks näiteks on kettaheide, kus ketta pöörlemisega on võimalik anda kettale lennul vajalik suund.

Impulssmoment osutub sobivaks suuruseks ka aatomites toimuvate protsesside iseloomustamiseks. 1913. a. esitas Taani füüsik Niels Bohr vesiniku aatomi mudeli, mille kohaselt elektron liigub ümber tuuma ringorbiidil, kus elektroni impulssmoment võib omada ainult teatud kindlaid väärtusi.

Valemi kaudu oleks ülaltoodu esitatud järgmiselt:

$$mvR = n\hbar,$$

kus $\hbar$ — konstant ja n mistahes täisarv (1, 2, 3, 4 jne.). Sellega oli kasutusele võetud kvantteooria põhimõtted aatomi kirjeldamisel. Klassikalise füüsika seisukohalt võiks mvR omada mistahes väärtusi. Kaasaja füüsika seisukohalt on aatom siiski keerukam süsteem, kui seda Bohr ette kujutas. Vaatamata sellele oli Bohri aatomimudel suur samm edasi keeruka mikrosüsteemi uurimisel. Huvitavatele järeldustele Bohri teooria põhjal jõuame lihtsate arvutuste teel. Olgu joonisel 7 kujutatud vesiniku aatomi mudel Bohri järgi, kus elektron (laeng $-q$) liigub ümber tuuma (laeng $+q$) ringorbiidil raadiusega R.



Elektroni kesktõmbekiirendus

$$a_n = v^2 / R$$

ning Newtoni II seaduse põhjal

$$a_n = F_e / m,$$

kus F_e — elektriline tõmbejõud elektroni ja tuuma vahel. Katsed näitavad, et elektriline jõud F_e on pöördvõrdeline kauguse ruuduga s.t.

$$F_e = kq^2 / R^2,$$

kus k — konstant.

Asendamisel saame, et

$$\frac{v^2}{R} = \frac{kq^2}{mR^2} \text{ ehk } v^2 = \frac{kq^2}{mR}.$$

Bohri poolt esitatud seose põhjal:

$$v = \frac{n\hbar}{mR}.$$

Kahe viimase seose kaudu saame:

$$\frac{kq^2}{mR} = \frac{n^2\hbar^2}{m^2R^2}$$

ning pärast lihtsustamist

$$R = \frac{n^2\hbar^2}{kmq^2}, \text{ kus } \frac{\hbar^2}{km} = \text{konst}.$$

Tähistades saadud konstantse suuruse $R_0 = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm, saame, et $R = n^2 R_0$. Sellest järeldub, et elektron võib vesiniku aatomis liikuda ainult teatud orbiitidel: R_0, $4R_0$, $9R_0$ jne.

Tehnikas kasutatakse laialdaselt pöörlevate kehade kineetilist energiat, eelkõige mitmete seadmete hoorataste juures. Pöörleva keha kineetilise energia saab lihtsamal juhul (massipunkt m tiirleb pöörlemisteljest kaugusel r) leida järgmiselt:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Saadud valem kehtib ka teiste pöördliikumises olevate kehade kohta. Nii näiteks avaldub horisontaalsel pinnal veereva ketta kineetiline energia järgmiselt:

$$K = K_1 + K_2$$

(K_1 — kulg- ja K_2 — pöördliikumise kineetiline energia).

Pärast asendamist saame:

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} +$$

$$+\frac{(1/2)\cdot mr^2\omega^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{mr^2v^2}{4r^2};$$

$$K=\frac{3mv^2}{4}.$$

Avaldades pöördliikumise kineetilise energia muutuse, saame

$$\Delta K=\frac{\Delta(J\omega^2)}{2}=\frac{J\cdot(\omega^2-\omega_0^2)}{2}=$$

$$=\frac{J\cdot(\omega+\omega_0)\cdot(\omega-\omega_0)}{2}=$$

$$=\frac{J\cdot(\omega+\omega_0)\cdot(\omega-\omega_0)\cdot t}{2t}=$$

$$=\frac{J\cdot(\omega+\omega_0)\cdot\varepsilon t}{2};$$

$$\Delta K=J\omega_k\varepsilon t=J\varepsilon\varphi=M\varphi.$$

Analoogiliselt kulgliikumisega kujutab saadud valem töö arvutamise eeskirja pöördliikumisel, seega

$$\boxed{A=M\varphi.}$$

Lõpuks vaatleme ülevaatlikku tabeli, kus saame võrrelda kulg- ja pöördliikumise tähtsamaid valemeid; paneme sealjuures tähele analoogiat kulg- ja pöördliikumise vastavate valemite vahel. Et saada kulgliikumise valemitest vastavaid pöördliikumise valemeid, tuleb asendada joonkiirus v nurkkiirusega ω, kiirendus a nurkkiirendusega ε, mass m inertsimomendiga J, jõud F jõumomendiga M.

Kulgliikumine	**Pöördliikumine**
läbitud tee ühtlasel liikumisel $s=vt$	pöördenurk ühtlasel pöörlemisel $\varphi=\omega t$
kiirendus $a=(v-v_0)/t$	nurkkiirendus $\varepsilon=(\omega-\omega_0)/t$
läbitud tee ühtlaselt muutuval liikumisel $s=v_0t+at^2/2$	pöördenurk ühtlaselt muutuval pöörlemisel $\varphi=\omega_0t+\varepsilon t^2/2$
dünaamika põhivõrrand $F=ma$	dünaamika põhivõrrand $M=J\varepsilon$
kineetiline energia $K=mv^2/2$	kineetiline energia $K=J\omega^2/2$
töö $A=Fs$	töö $A=M\varphi$

Märkus: Pöördenurga mõõtmise ühikuks SI-süsteemis on teatavasti rad/s ja nurkkiirenduse mõõtmise ühikuks rad/s^2. Olgu märgitud, et SI-süsteemis radiaan on tegelikult dimensioonita suurus ning korrektne kirjaviis oleks vastavalt 1/s ja 1/s^2. Seda tuleks eriti silmas pidada ülesannete lahendamisel. (Näiteülesandest lehekülgedel 11 võime näha, mis juhtuks, kui nurkkiiruse dimensiooniks kirjutaksime mitte 1/s vaid rad/s).

Kehade liikumise kirjeldamine pöördliikumist sooritavates süsteemides

Seni me ei pööranud tähelepanu taustsüsteemi valikule, sest kõigi vaadeldud juhtumite korral kirjeldaksime pöördliikumist Maaga seotud taustsüsteemi suhtes. Selline valik on enamikel juhtudel õigustatud, sest meie igapäevane elu ja tegevus on seotud orienteerumisega Maa suhtes. Taustsüsteemi valiku küsimus tekib tavaliselt siis, kui on vaja kirjeldada mingi keha liikumist juhul, kui see asub pöörleval kehal (näiteks klots, mis liigub pöörleval kettal).

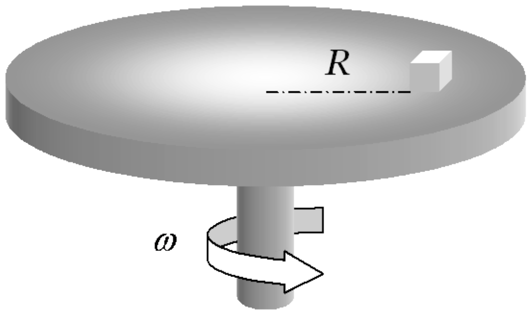
Sellisel juhul osutub lihtsamaks antud keha liikumist kirjeldada nii, et paigalseisev taustsüsteem seotakse pöörleva kehaga (näiteks, kettaga). Niiviisi saadud võrrandid on sageli palju lihtsamad. Kuid ka siin tekivad omamoodi raskused. See tuleb ilmseks lihtsa katse juures, kus kettale tuleb asetada klots ning ketas panna pöörlema. Teatud pöörlemissageduse korral lendab klots kettalt ära. Selle katse tulemus ei ole aga kooskõlas Newtoni seadustega. Klots ei tohiks liikuma hakata, kuna talle mõjuvate jõudude summa on null! Kuidas saab antud katse tulemust esitada? Vastus on siin lihtne: Newtoni seadused kehtivad ainult inertsiaalsüsteemides. Antud juhtumil on tegemist mitteinertsiaalse süsteemiga. Selleks, et antud klotsi "käitumist" viia kooskõlla Newtoni seadustega, võetakse kasutusele eriliiki jõud — inertsjõud (F_i).

Pöörlevates süsteemides nimetatakse seda jõudu *tsentrifugaalinertsjõuks*. See jõud on suunatud raadiuse sihis tsentrist eemale ning avaldub valemiga: $F_i = ma$ ehk

$$F_i = m \cdot \frac{v^2}{R} = M\omega^2 R\,.$$

Võttes kasutusele inertsijõu, võime klotsi olekut kettal kirjeldada järgmiselt (vt. joon. 8): klots püsib paigal seni, kuni tsentrifugaalinertsijõud ületab maksimaalse paigaloleku hõõrdejõu:

$$F_i \le F_h\text{, kus } F_h = \mu m g\,.$$



Joonis 8

Asendades inertsijõu, saame

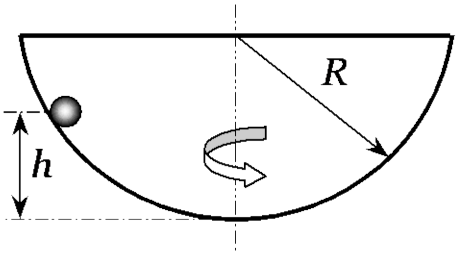
$$m\omega^2 R \le \mu m g\,.$$

Siit avaldub klotsi paigaloleku tingimus: $\omega \le \sqrt{\mu g / R}$.

<u>*Märkus*</u>: Gümnaasiumi füüsika kursuses taoline ülesanne lahendatakse tavaliselt Maaga seotud taustsüsteemi suhtes.

Analoogiliselt võime lahendada ka teisi ülesandeid, kus võtame kasutusele tsentrifugaalinertsijõu.

Vaatleme ühte ülesannet, milline oli esitatud lahendamiseks füüsika olümpiaadi lõppvoorus 9. kl. 1970. aastal.



Joonis 9

Õõnes poolkera raadiusega $R = 2\,\mathrm{m}$ pöörleb ühtlaselt ümber oma sümmeetriatelje sagedusega $30\,\mathrm{p/min}$. Poolkera sees, selle siledal pinnal, asub kuulike. Leida kõrguse *h*, mis vastab kuulikese tasakaaluasendile poolkera suhtes.

Loeme paigalseisvaks poolsfääri. Sel juhul mõjuksid kuulile kolm jõudu: raskusjõud mg (mõjub alla), pinna elastsusjõud N (mõjub poolkera keskpunkti suunas) ja tsentrifugaalinertsjiõud F_i (joonisel mõjub vasakule). Kuna kuulike on paigal, siis peab kehtima seos

$$N + mg + F_i = 0$$

Olgu r kuulikese kaugus poolkera pöörlemisteljest.

Sarnastest kolmnurkadest saame, et

$$\frac{R-h}{r} = \frac{mg}{F_i},$$

kus $F_i = m\omega^2 r$, siis

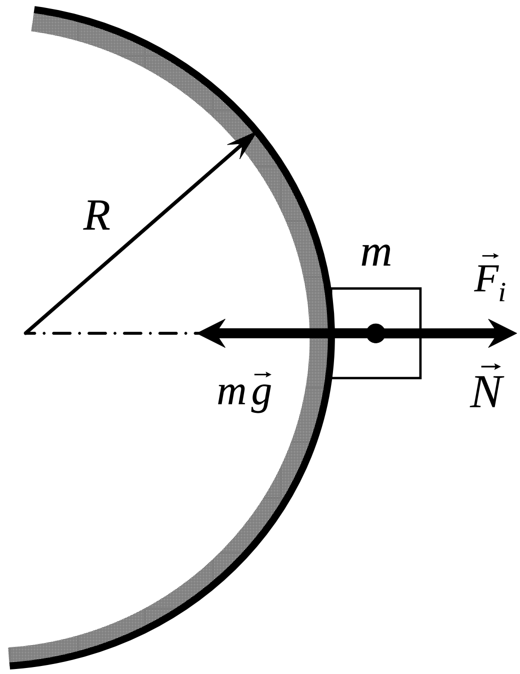
$$\frac{R-h}{r} = \frac{mg}{m\omega^2 r}$$

ning pärast lihtsustamist:

$$R - h = \frac{g}{\omega^2} \;\Rightarrow\; h = R - \frac{g}{\omega^2};$$

$$h = 2 - \frac{9{,}8}{(2\pi \cdot 0{,}5)^2} = 1\,\mathrm{m}.$$

Tsentrifugaaljõuga on tegemist ka maakeral. Olgu siin lisatud, et maakera väikese nurkkiiruse tõttu on inertsijõud väike ning loeme Maaga seotud taustsüsteemi tavaliselt inertsiaalsüsteemiks. Kuid mitmetel juhtudel on inertsijõu mõju vajalik arvestada. Tsentrifugaalinertsijõu mõjuga on seletatav keha kaalu vähenemine sõltuvalt geograafilisest laiusest. Keha kaal sõltub peale selle ka keha kaugusest Maa keskpunktist.



Joonis 10

Vaatleme keha kaalu arvutamist lihtsamal juhul — Maa ekvaatoril. Joonisel 10 on kujutatud kehale massiga

m mõjuvad jõud: raskusjõud $m\vec{g}$, pinna elastsusjõud N ja tsentrifugaalinertsijõud $\vec{F}_i$, kus

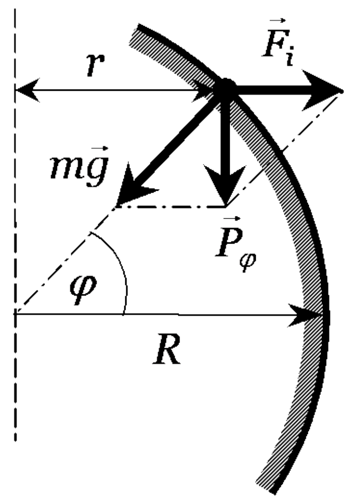
$$F_i = m\omega^2 R.$$

Keha kaal ekvaatoril:

$$P = mg - F_i = mg - m\omega^2 R;$$

$$P = m \cdot \left(g - \omega^2 R\right).$$

Vaatleme järgnevalt keha kaalu arvutamist mingil laiuskraadil φ. Sellisel juhul keha kaalu vektori suund ei lange ühte raskusjõu suunaga (vt. joon. 11).



Joonis 11

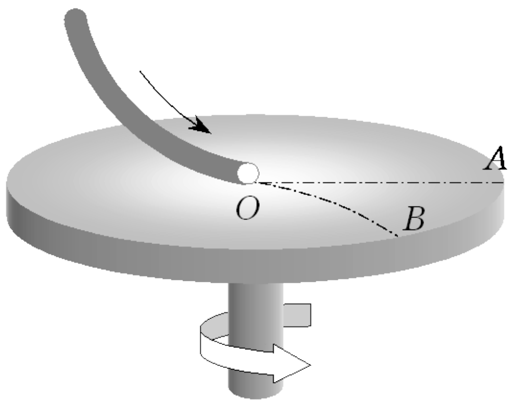
Jooniselt nähtub, et $F_i = m\omega^2 r$ ja $r = R\cos\varphi$.

Keha kaal avaldub: $\vec{P}_\varphi = \vec{F}_i + m\vec{g}$. Lahutades inertsijõu kaheks komponendiks, saame pärast mõningaid teisendusi (selle teisenduse läbiviimist on soovitav õpilastel endil proovida) järgmise seose kaalu arvestamiseks:

$$P_\varphi = mg \cdot \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g} \cdot \cos^2\varphi\right).$$

Tegelikult kehtib siin pisut teistsugune valem, kus on arvestatud ka Maa lapikust ning

$$P_\varphi = mg \cdot \left(1 - \frac{1}{191} \cdot \cos^2\varphi\right).$$



Joonis 12

Seni vaadeldud näidete puhul oli tegemist pöörlevas süsteemis paigalseisvate kehadega. Mis aga ilmneb siis, kui keha antud süsteemi suhtes liiguks? Vaatleme siin juhtumit, kus kehale antakse pöörlevas süsteemis normaalsuunaline (tsentrist eemale) algkiirus. Võtame vaatluse alla jälle pöörleva ketta (vt. joon. 12). Kui ketas ei pöörle, siis rennilt eemaldunud kuulike liigub mööda sirgjoonelist trajektoori *OA*. Paneme ketta pöörlema nurkkiirusega ω. Sel juhul kuulikene liigub hoopis mööda kõverjoonelist trajektoori *OB*.

Kuulikese kõrvalekaldumine ei ole jällegi seletatav Newtoni seadustega.

Analoogiliselt eelnevaga võtame kasutusele inertsijõu F_i, mis mõjub kuulikese kiirusega ristsihis vastupidiselt pöörlemissuunale. Seda inertsijõudu nimetatakse *Coriolisi jõuks*. Coriolisi jõud sõltub võrdeliselt keha massist ja kiirusest antud pöörlevas süsteemis. Osutub, et nimetatud jõudu tuleb arvestada ka maakera suhteliselt väikese nurkkiiruse korral. Nii ilmneb, et Maa põhjapoolkeral on jõgede parempoolsed kaldad rohkem uhutud. Samasuguse efektiga on seotud raudteedel rööpmete kulumine. Tuntud on ekvatoriaalpiirkondadele lähedastel aladel tekkivad passaattuuled, millede kõrvalekaldumine lõuna-põhja sihist on tingitud liikuvatele õhumassidele mõjuvast Coriolisi jõust. Üks katsetest, mis kinnitab maakera pöörlemist, on vabalt langevate kehade kõrvalekaldumine vertikaalasendist ida suunas. Ka siin põhjustab kõrvalekalde kehale mõjuv Coriolisi jõud.

Harjutusülesandeid

1. Näidata, et pöörleva keha kõigi punktide nurkkiirused on samad (teha joonis!). Milline on erinevus mõistete “pöördliikumine” ja “pöörlemine” vahel?

2. Näidata, et pöördliikumist teostava keha kõigi punktide nurkkiirused on samad (teha joonis!). Vaadelda juhtu, kus pöörlemistelg asub väljaspool keha. Kas on tegemist pöörlemisega?

3. Leida maakera inertsimoment pöörlemistelje suhtes, kui keskmine raadius on 6400 km ja kesk-mine tihedus 5,5 $\mathrm{g/cm^3}$.

4. Ketas kaaluga 20 N veereb ilma libisemata horisontaalsel pinnal kiirusega 4 m/s. Leida ketta kineetiline energia.

5. Ventilaator pöörleb sagedusega 900 p/min. Pärast mootori väljalülitamist pöörleb ventilaator ühtlaselt aeglustavalt ning peatub 10 s pärast. Mitu täispööret sooritas ventilaator peatumiseni?

6. Hooratas, mille inertsimoment on $245\ \mathrm{kg\cdot m^2}$, pöörleb sagedusega 20 p/s. Kui pöörlemist tekitava jõumomendi mõju lakkab, siis pöörleb ketas jääva nurkkiirendusega ja peatub 1 minuti pärast. Leida hõõrdejõumoment ja täispöörete arv, mis hooratas sooritab peatumiseni.

7. Homogeenne kera massiga m lükatakse algkiirusega v_0 libisema horisontaalsel pinnal. Kera ja pinna vaheline hõõrdetegur libisemisel on μ. Millise vahemaa s läbib kera, kuni lakkab libisemine? Milline on selleks momendiks kera kiirus?

8. Kaldpinna kaldenurk on α. Milline peab olema hõõrdetegur μ, et homogeenne silinder liiguks mööda kaldpinda alla libisemata?

9. Milline jääv jõumoment tuleks rakendada maakerale, et pöörlemine lakkaks 10^8 aasta pärast?

10. Horisontaalasendis pöörleva ketta (raadius R, inertsimoment J) serval seisab inimene massiga m.

Ketta pöörlemissagedus on n. Kuidas muutub pöörlemissagedus, kui inimene liigub ketta servalt tsentrisse?

11. Hooratas pöörleb sagedusega 5 p/s. Kui rakendada kettale jääva suurusega pidurdav moment 9800 N·m, siis hooratas peatub 20 sekundiga. Milline on hooratta inertsimoment?

12. Kass ronides mööda puuoksa, jalad ülespidi, kukub alla 8 m kõrguselt. Kui kiiresti ta peab tiirutama oma saba, et ta maanduks jalgadele?

13. Vertikaalne varras pikkusega 2 m ja kaaluga 12 kg võib pöörelda ümber horisontaalse telje, mis läbib varda ülemist otsa. Horisonaalsuunas liikuv kuul massiga 10 g ja kiirusega 800 m/s tabab varda keskpunkti ning peatub selles. Millise nurkkiirusega alustab varras pöörlemist?

14. Poiss veeretab horisontaalsel teel rõngast kiirusega 7,2 km/h. Kui pika tee läbib rõngas oma kineetilise energia arvel mööda kaldteed üles, mille kaldenurk on 6°?

15. Vasest kera raadiusega 10 cm pöörleb sagedusega 2 p/s ümber keskpunkti läbiva telje. Kui palju tuleb teha tööd, et nurkkiirust suurendada kaks korda?

16. Inimene massiga 60 kg seisab liikumatul horisontaalsel kettal, mille mass on 100 kg, raadius 10 m. Millise pöörlemissageduse omandab ketas, kui inimene hakkab liikuma jääva kiirusega 4 km/h ringjoont mööda nii, et ta kaugus pöörlemisteljest on 5 m?

17. Koormised massidega m_1 ja m_2 on omavahel ühendatud peenikese niidiga, mis on asetatud üle liikumatu ploki. Plokiratta inertsimoment on J, raadius R. Leida ühendusniidile mõjuvad jõud (vt. joon. 3).

18. Maanteel kurvi kaldenurk on α ja kõverraadius R. Kurvis liigub jalgrattur sellise kiirusega, et jalgratast läbiv tasapind on risti maanteega. Jalgratturi mass on m ning hõõrdetegur kummide ja tee vahel μ. Määrata jalgratturi kiirus ja toereaktsioon.

19. Vagun liigub kiirusega 72 km/h kurvis, mille kõverusraadius on 400 m. Milline on vedrukaalu otsa riputatud 10 kg koormise kaal?

20. Pöörleval kettal 50 cm kaugusel tsentrist asetseb koormis. Maksimaalne paigaloleku hõõrdetegur on 0,05. Millise ketta pöörlemissageduse korral lendab koormis kettalt ära?

21. 62,8 cm pikkune kett moodustab rõnga, mis on paigutatud puust kettale. Keti mass on 40 g. Leida ketis tekkiv elastsusjõud, kui ketas panna pöörlema sagedusega 1 p/min.

22. Homogeenne varras, mille pikkus on l ja mass m, pöörleb jääva nurkkiirusega ümber varda ühte otsa läbiva pöörlemistelje. Leida vardas tekkiv elastsusjõud kaugusel x pöörlemisteljest.

Kontrolltöödeks lahendamisele kuuluvate ülesannete variante:

I variant: 2, 3, 4, 5, 8, 12, 13, 16, 18, 19, 22.

II variant: 1, 3, ,4, 6, 9, 10, 12, 14, 17, 18, 20.

III variant: 2, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 18, 21, 22.

Teil tuleb järgmiseks kontrolltööks ______ lahendada variant ____.

Tähtaeg: __________________.