TARTU ÜLIKOOL

Tartu Ülikooli Teaduskool

Ettevalmistus füüsikaolümpiaadiks

Mehaanika

Koostas Urmo Visk

Toimetas Valter Kiisk

Tartu 2007

Sisukord

Suhteline kiirus

Suhteline kiirus näitab, kui kiiresti liigub keha teiste kehade suhtes. Tavaliselt mõõdetakse kiirusi seisvate asjade suhtes, mistõttu pole tarvis kiiruse suhtelisust rõhutada. Autoga sõites me ju ei mõtle, et spidomeeter näitab auto kiirust maapinna suhtes. Maa on paigal, mistõttu peaks auto suhteline kiirus maa suhtes olemagi auto tõeline kiirus.

Tegelikult pole tõelist kiirust olemas. Kiirus on alati suhteline. Oleme harjunud, et kiirused maapinna suhtes on tõelised, sest maapind on paigal. Kuid ka Maa liigub: see pöörleb oma telje ümber ja liigub teiste planeetide ning tähtede suhtes. Maa ainult tundub meile seisvat, sest meie liigume Maaga kaasa. Terves kosmoses pole ühtegi sellist keha, mida saaks pidada absoluutselt paigalseisvaks ja mille abil saaksime arvutada kehade tõelised kiirused. Nii tulebki leppida suhteliste kiirustega ja leida, kui palju liigub üks keha teisest kiiremini.

Mõnikord on mugav tarvitada ka absoluutset kiirust. See on keha kiirus teistest taustsüsteemidest paremas taustsüsteemis. Meie jaoks on parimaks taustsüsteemiks Maa, sest me oleme ise Maa peal ja meie jaoks tundub see paigalseisvana. Kuna Maa siiski liigub, on seda ebamugav käsitleda absoluutse taustsüsteemina niipea, kui vaadeldakse kosmoselende või teisi planeete ja tähti.

19. sajandil arvati, et on olemas ka kõige parem taustsüsteem, mis on alati paigal ja mille abil saab leida kõikide kehade absoluutsed kiirused. Selleks kõikvõimsaks taustsüsteemiks oli maailmaeeter (nimetus pole seotud keemias tuntud eetritega). Enne eelmist sajandit arvati, et maailmaeeter on aine, milles valgus levib. Nimelt ei usutud siis, et valgus suudaks kosmoses olevas vaakumis levida (heli näiteks ei saagi). Kuna aga valgus kosmoses siiski liikus, pidi teadlaste arvates vaakumi sees eksisteerima veel mingi senitundmatu aine. Seda tundmatut ainet nimetatigi maailmaeetriks. Maailmaeetri idee autoriks oli Vana-Kreeka filosoof Aristoteles. Eelmise sajandi algul selgus aga, et idee maailmaeetri olemasolust on vastuolus mitmete katsetega, mistõttu kadus nii maailmaeeter kui ka ainus tõeliselt absoluutne taustsüsteem ajalukku.

Vaatleme ka suhteliste kiiruste arvutamist. Kui meil on kaks keha, näiteks auto ja buss, mille kiirused maapinna suhtes on vastavalt v_a ja v_b, siis on auto kiirus bussi suhtes

$$v_{ab} = v_a - v_b \,. \tag{1}$$

Bussi kiirus auto suhtes on

$$v_{ba} = v_b - v_a \,. \tag{2}$$

Kiirused võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed. Keha kiirus on positiivne, kui keha liigub koordinaatteljega samas suunas. Koordinaattelje suund on kokkuleppeline, kuna ka absoluutset suunda pole olemas. Kui autod sõidavad Tallinn – Tartu maanteel ja koordinaattelg on suunatud Tallinnast Tartusse, siis on kõigi Tartusse sõitvate autode kiirused positiivsed. Tallinnase sõidavad autod aga negatiivsete kiirustega, mis ei tähenda sugugi, et autod tagurpidi liiguksid.

Kui ülesandes öeldakse, et auto kiirus bussi suhtes on -10 km/h, siis tähendab see, et auto liigub koordinaattelje negatiivses suunas bussist 10 km/h võrra kiiremini. Esmapilgul võib ju tunduda, et auto liigub bussist aeglasemalt, kuna auto kiirus bussi suhtes on negatiivne, kuid tegelikkuses näitab kiiruse märk liikumise suunda koordinaattelje, mitte aga bussi suhtes.

Olgu bussi ja auto kiirused maapinna suhtes vastavalt 80 km/h ja 100 km/h. Siis on auto kiirus bussi suhtes

$$v_{ab} = v_a - v_b = 100 \text{ km/h} - 80 \text{ km/h} = 20 \text{ km/h}.$$

Järelikult sõidab auto koordinaattelje positiivses suunas bussist 20 km/h võrra kiiremini. Bussi kiirus auto suhtes on

$$v_{ba} = v_b - v_a = 80 \text{ km/h} - 100 \text{ km/h} = -20 \text{ km/h}.$$

Seega liigub buss koordinaattelje negatiivses suunas kiirusega 20 km/h. Kuna buss jääb autost maha, siis autost vaadates tundub tõesti, et buss liigub koordinaattelje negatiivses suunas.

Segasemaks muutub olukord siis, kui sõidukite kiirused on negatiivsed. Olgu auto kiirus maapinna suhtes -100 km/h ja auto kiirus bussi suhtes -30 km/h. Auto sõidab bussist 30 km/h võrra kiiremini koordinaattelje negatiivses suunas, liikudes samal ajal maapinna suhtes kiirusega 100 km/h jällegi koordinaattelje negatiivses suunas. Bussi kiirus maapinna suhtes on

$$v_b = v_a - v_{ab} = -100 \text{ km/h} - (-30 \text{ km/h}) = -70 \text{ km/h}.$$

Buss sõidab maapinna suhtes kiirusega 70 km/h koordinaattelje negatiivses suunas.

Näidisülesanne

Rattur sõidab tuuletu ilmaga kiirusega 30 km/h. Kui suur on tuule kiirus ratturi jaoks? Kas tuul on ratturile vastu või mitte?

Tuuletu ilmaga on õhu kiirus maapinna suhtes null. Samas on ratturi kiirus maapinna suhtes 30 km/h. Tuule kiirus ratturi suhtes on $v_{tr} = v_t - v_r = 0 - 30$ km/h = -30 km/h (vaata valemeid (1) ja (2)). Kuna tuule kiirus on negatiivne, siis on tuul ratturile vastu.

Taustsüsteemid

Taustsüsteemid on kehad, mille suhtes saab uuritava keha liikumist vaadelda. Kui varem oli juttu auto kiirusest maapinna suhtes, siis taustsüsteemiks oligi maapind, sest auto liikumist kirjeldati maapinna suhtes. Kui kirjutati auto kiirusest bussi suhtes, siis oli taustsüsteemiks buss. Suhtelise kiirusega kaasneb alati taustsüsteem, mille suhtes liikumist vaadeldakse.

Keha kiirus mingis taustsüsteemis on keha suhteline kiirus selle taustsüsteemi suhtes. Liikumise uurimine eri taustsüsteemides ongi keha suhtelise kiiruse leidmine erinevate teiste kehade suhtes. Taustsüsteemidega käib kaasas ka koordinaadistik. Sellega saab lisaks suhtelisele kiirusele kirjeldada ka keha suhtelist asukohta teiste kehade suhtes (nagu absoluutset kiirust, nii pole olemas ka absoluutset asukohta).

Näidisülesanne

Maanteel sõidab veok kiirusega 90 km/h. Selle järel liigub sõiduauto, mille kiirus on 110 km/h. Kui sõiduauto alustab veokist möödasõitu, märkab sõiduauto juht vastassuunast tulevat bussi, mis liigub kiirusega 90 km/h. Milline on sõiduauto väikseim kaugus bussini, et see saaks möödasõidu lõpetada ega põrkaks bussiga kokku? Möödasõidu alguses oli sõiduauto veokist 15 m tagapool ja möödasõidu lõppedes peab sõiduauto olema veokist 20 m eespool. Sõiduauto pikkus on 5 m ja veoki pikkus on 20 m.

Vaatleme liikumist sõiduautoga seotud taustsüsteemis, võttes koordinaattelje positiivseks suunaks sõiduauto liikumissuuna. Veoki kiirus on siis

$$v_{vs} = v_v - v_s = 90\ \text{km/h} - 110\ \text{km/h} = -20\ \text{km/h}.$$

Bussi kiirus on

$$v_{bs} = v_b - v_s = -90\ \text{km/h} - 110\ \text{km/h} = -200\ \text{km/h}.$$

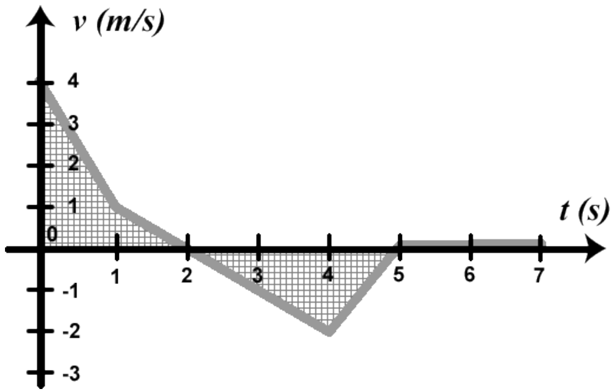
Möödasõidu sooritamiseks peab sõiduauto läbima veoki taga oleva vahemaa 15 m, siis veoki pikkuse 20 m, sõiduauto enda pikkuse 5 m ja veoki ees oleva vahemaa 20 m. Kokku tuleb läbida teepikkus s = 60 m.

Sõiduautoga seotud taustsüsteemis on sõiduauto paigal ja liigub hoopis veoauto. Seega läbib möödasõidul veoauto vahemaa s kiirusega v_{vs} = -20 km/h. Veok läbib vahemaa s ajaga $t = s/|v|$ = 60 m/ 20 km/h = 2,4 s. Selle aja jooksul ei tohi sõiduautoni jõuda buss. Bussi kiirus sõiduautoga seotud taust-süsteemis on v_{bs} = -200 km/h. Buss läbib möödasõiduks kuluva ajaga vahemaa l = 2,4 s · |-200 km/h| = 133 m. Sõiduauto peab veokist mööda sõitmiseks olema bussist kaugemal kui 130 meetrit.

Graafikud

Graafikuid kasutatakse liikumise kirjeldamiseks, kui liikumine on keeruline ja keha kiirus ning liikumissuund muu-tuvad tihti. Kui graafikutel pole keha kiirust või asukohta arvuliselt kirjas, siis saab need graafikult arvutada. Levinuimad on kahte tüüpi graafikud: esimesel esitatakse keha kiiruse sõltuvus ajast (*vt* – graafikud), teisel keha poolt läbitud vahe-maa sõltuvus ajast (*st* – graafikud). Olümpiaadiülesannetes tuleb mõnikord ette ka pöördsõltuvuste graafikuid, kus kujuta-takse näiteks vahemaa pöördväärtuse sõltuvus ajast. Ka leidub graafikuid, millel esitatakse ühe keha kiiruse sõltuvust teise keha kiirusest.

Joonisel 1 on toodud kiiruse ajast sõltuvuse graafik. Keha kiirust kujutab joonisel hall joon. Keha algkiirus on kiirus punktis, kus hall joon lõikab vertikaalset telge. Kui keha kiirus muutub, siis hall joon graafikul kas tõuseb või langeb. Kui hall joon on horisontaalne, siis liigub keha muutumatu kiirusega. Kui kiiruse graafik on vertikaalne, siis muutub keha kiirus hüppeliselt: kiiruse väärtus muutub hetkeliselt ühelt väärtuselt teisele. Mõnikord ei kujutata graafikutel vertikaalset joont, vaid katkestatakse joon seal, kus toimub kiiruse hüpe. Tegelikkuses pole kiiruse hetkeline muutumine võimalik. Küll aga võib kiirus muutuda nii kiirelt, et kiiruse muutust võib pidada hetkeliseks (näiteks kahe piljardikuuli põrkel). Joone tõus graafikul võrdub keha kiirendusega, sellest tuleb aga juttu gümnaasiumis.



Joonis 1: Graafikul on näidatud, kuidas muutub keha kiirus aja kulgedes. Kiirust näitab hall joon. Graafikualust pindala kujutatakse ruudulise mustriga.

Kiiruse ajast sõltuvuse graafiku hea omadus on, et graafikult saab lihtsalt leida läbitud vahemaa. Nimelt võrdub kiiruse graafikualune pindala läbitud vahemaaga (mustriga osa joonisel 1). Kui graafikualune pindala on ülalpool horisontaaltelge, siis läbis keha positiivse vahemaa. Kui graafikualune pindala on allpool horisontaaltelge, siis läbis keha negatiivse vahemaa ehk liikus tagasi.

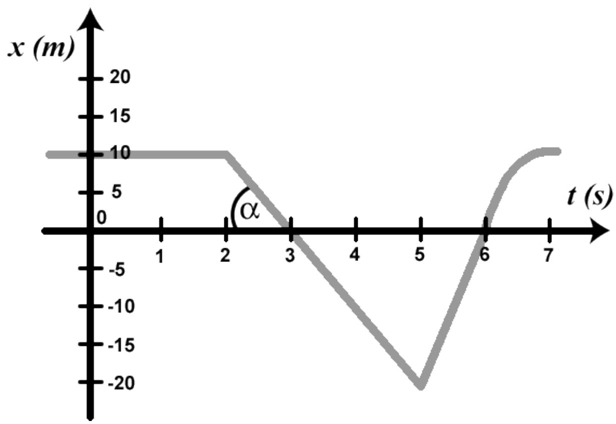
Näitame, et graafikualune pindala on tõepoolest läbitud vahemaa. Kui keha kiirus muutub ühtlaselt, siis saab läbitud teepikkuse arvutada valemist

$$s=\frac{v_{alg}+v_{lõpp}}{2}t\ , \qquad (3)$$

kus v_{alg} on keha algkiirus ja $v_{lõpp}$ on keha lõppkiirus, t on liikumiseks kulunud aeg. Jaotame joonisel 1 oleva graafiku osadeks, nii et halli joone igas murdepunktis algab uus osa. Nüüd koosneb graafik paljudest kolmnurkadest ja trapetsitest. Iga kolmnurga või trapetsi pindala saab leida valemist

$$S=\frac{h_{max}+h_{min}}{2}t\ . \qquad (4)$$

Siin on t trapetsi või kolmnurga aluse pikkus. Trapetsi suurim ja väikseim kõrgus on h_{max} ja h_{min} (kolmnurga korral on kas h_{max} või h_{min} null ja valem lihtsustub kujule $S = 0{,}5\ h\ t$). Kolmnurga ja trapetsi suurim ja väikseim kõrgus graafikul on ühtlasi keha suurim ja väikseim kiirus: $h_{max} = v_{max}$ ja $h_{min} = v_{min}$. Aluse pikkus graafikul võrdub aga liikumiseks kulunud ajaga. Valemid (3) ja (4) on oma kujult sarnased, erinedes vaid selle poolest, et valemis (3) on tegu alg- ja lõppkiirustega, kuid valemis (4) kasutatakse suurimat ja väikseimat kiirust. Kuna graafik on murdepunktide järgi jaotatud osadeks, siis saame keha kiirust graafiku iga osa alguses ja lõpus vaadelda ka keha suurima või väikseima kiirusena selle graafiku osa piires. Seega on graafiku osade jaoks valemid (3) ja (4) ühesugused ning graafiku ühe osa pindala võrdub keha poolt läbitud vahemaaga. Kui nüüd liita kõikide kolmnurkade ja trapetsite pindalad kokku, siis saame ühelt poolt kogu graafikualuse pindala ja teisest küljest graafiku iga osaga läbitud vahemaade summa. Seega ongi graafikualune pindala läbitud vahemaa.



Joonis 2: Vahemaa muutus ajas.

Joonisel 2 kujutatakse läbitud vahemaa sõltuvust ajast *st* – graafikul. Graafiku vertikaalteljel on toodud keha asukoht ja horisontaalteljel aeg. Keha algkoordinaat on vertikaaltelje ja halli joone lõikepunkt. Algkoordinaat on keha asukoht hetkel, kui alustatakse keha liikumise vaatlemist ehk ajahetkel null. Kui keha on paigal, siis on graafikuks horisontaalne joon. Kui keha liigub, siis on hall joon graafikul viltu. Kui hall joon on sirge, siis liigub keha muutumatu kiirusega. Kui keha kiirus muutub hetkeliselt, siis on graafikul halli joone murdepunkt. Kui keha kiirus muutub pidevalt, siis tekib graafikule kõverjoon: graafikul oleval hallil joonel on siis väga palju murdepunkte, mis sulavad üksteisega kokku, nii et graafikule tekib kõverjoon. Kui graafikuks on vertikaalne joon, siis muutus keha asukoht hetkeliselt. Selline käitumine on võimalik eelkõige füüsikaülesannetes, mitte aga tegelikkuses (plahvatuse hetkel võib keha ühest kohast teise liikuda peaaegu hetkeliselt, aga ainult peaaegu).

Teepikkuse ajast sõltuvuse graafikul ei anna graafikualune pindala kasulikku teavet. See-eest võrdub graafiku tõus keha kiirusega. Kuna kiirus $v = s/t$, millest vahemaa s on vertikaalteljel ja aeg t horisontaalteljel, siis on keha kiirus:

$$v = \frac{s}{t} = \tan\alpha = \text{joone} \quad \text{tõus} \qquad (5)$$

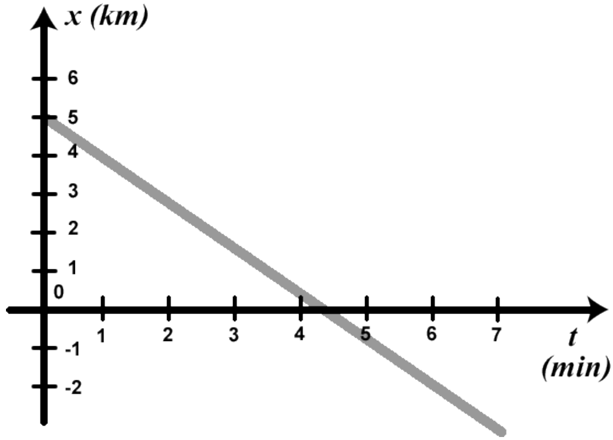
Siin on $\tan\alpha$ graafikul oleva joone tõus ja α on nurk horisontaaltelje ja graafikul oleva joone vahel (vt joonist 2).

Joonisel 2 on keha kiirus vahemikus t = (0 ÷ 2) s null, kuna v= s/t = 0/2 = 0 m/s. Keha kiirus ajavahemikus t = (2÷5) s on v = (-20 – 10) /3= -10 m/s. Ajavahemikus t = (5÷6) s on keha kiirus v = (0 - (-20)) /1= 20 m/s. Edaspidi liigub keha muutuva kiirusega, kuna graafikuks pole sirge.

Kiiruse leidmisel graafikutelt tuleb tähelepanu pöörata sellele, et vertikaal- ja horisontaalteljel ei pruugi ühikud olla võrdse pikkusega (enamasti nii ongi). Sel juhul ei tohi graafikult pikkusi joonlauaga mõõta, vaid tuleb telgedelt ühikuid loendada.

Näidisülesanne

Vaatleme bussi ja sõiduauto liikumist maanteel. Bussi kiirus maapinna suhtes on 70 km/h. Joonisel 3 on toodud sõiduauto koordinaadi muutus maapinna suhtes. Kus kohtuvad buss ja sõiduauto, kui a) graafik on esitatud maapinna suhtes (alghetkel on bussi koordinaat siis null) ja b) bussi suhtes.



Joonis 3: Sõiduauto asukoha muutus ajas.

Graafikult leiame, et kuue minuti jooksul läbis auto 7 kilomeetrit. Auto kiirus on v = 7/6 km/min = 70 km/h. Kuna sõiduauto koordinaat väheneb, siis liigub auto koordinaattelje negatiivses suunas: v = -70 km/h.

a) Kui graafik on esitatud maapinna suhtes, siis liigub auto maapinna suhtes kiirusega -70 km/h ja buss kiirusega 70 km/h. Leiame kohtumispunkti võrrandisüsteemist. Kui auto asus alghetkel kaugusel 5 km, siis aja t möödudes on auto koordinaat $x_a = 5 – 70t$. Bussi koordinaat oli alghetkel null ja aja t võrra hiljem on bussi koordinaat $x_b = 70t$. Kuna kohtumispunktis on buss ja auto samas kohas, siis nende koordinaadid võrduvad:

$$x_a = x_b$$
$$5 - 70t = 70t$$
$$5 = 140t \rightarrow t = 2{,}1 \text{ min}$$

Sõidukid kohtuvad 2,1 minuti möödudes. Bussi koordinaat on siis x_b = 2,1 min · 70 km/h = 2,5 km.

b) Kui graafik on esitatud bussi suhtes, siis liigub auto bussi suhtes kiirusega 70 km/h koordinaattelje negatiivses suunas: v_{ab} = -70 km/h. Auto kiirus maapinna suhtes on

$$v_a = v_{ab} + v_b = -70 \text{ km/h} + 70 \text{ km/h} = 0 \text{ km/h}$$

Auto seisab maapinna suhtes paigal. Sõidukid kohtuvad, kui nende koordinaadid on võrdsed. Kohtumishetkel on auto koordinaat bussi suhtes null, mistõttu toimub sõidukite kohtumine siis, kui graafikul olev joon lõikab horisontaaltelge. Seda vahemaad ei saa graafikult täpselt määrata, vaid tuleb leppida ligikaudse hinnanguga. Kohtumine toimub umbes 4,5 minuti möödudes. Buss on läbinud vahemaa 5 km ja auto on olnud paigal.

Hetkkiirus ja keskmine kiirus

Keha hetkkiirus on kiirus ühel konkreetsel momendil. Näiteks oli Tallinn – Tartu bussi hetkkiirus kaks minutit pärast sõitma hakkamist 50 km/h. Minuti pärast oli bussi kiirus aga 30 km/h, sest buss pidi tegema linnast välja sõites järsu pöörde. Hetkkiirus ei ütle midagi keha pikemaajalise liikumise kohta. Kui teame, et bussi kiirus oli kaks minutit pärast sõidu alustamist 50 km/h, siis ei saa me kahjuks kuidagi hinnata, kui kaua buss Tartusse sõitis. Hetkkiirusest on reaalset abi, kui teame hetkkiirust kogu teekonna vältel, sest siis saab leida igal ajahetkel läbitud vahemaa ja ka vahemaa läbimiseks kulunud aja. Kui hetkkiirust tuleb kasutada, siis antakse see tavaliselt graafikuna. Näiteks on joonisel 1 toodud keha hetkkiirused kogu liikumise aja (0 – 7) s jaoks.

Kui leiame hetkkiiruse graafikult läbitud vahemaa ja selle läbimiseks kulunud aja, siis võime hetkkiiruse asemel kasutada keskmist kiirust. Keskmine kiirus näitab, milline oli keha kiirus vahemaa läbimisel keskmiselt. Tavaliselt antaksegi füüsikaülesannete andmetes keskmine kiirus, mitte hetkkiirus. Keskmise kiiruse leidmiseks tuleb vahemaa kogupikkus jagada selle läbimiseks kulunud ajaga. Kui auto läbis tee kolmes osas, nii et kiirus igas teelõigus oli erinev ja lõikude pikkused olid s_1, s_2 ja s_3 ning teelõikude läbimiseks kulus autol aega vastavalt t_1, t_2 ja t_3, siis on auto keskmine kiirus

$$v_{kesk}=\frac{s_1+s_2+s_3}{t_1+t_2+t_3}\ . \qquad (6)$$

Loomulikult kehtib see valem ka siis, kui tee läbiti rohkemate või vähemate osadena. Kui teelõikude läbimine kestis alati ühekaua, siis saab keskmise kiiruse leida ka lihtsama valemiga:

$$v_{kesk} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t + t + t} = \frac{v_1 t + v_2 t + v_3 t}{3t} = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \text{ .} \tag{7}$$

Kui teelõigud läbiti ühesuguse ajaga, siis on keskmine kiirus lõikude kiiruste aritmeetiline keskmine. Valem (7) kehtib aga üksnes siis, kui tee osad läbiti võrdsete aegadega. Valem (7) ei kehti, kui võrdsed olid läbitud teelõikude pikkused või iga lõik oli ise pikkusega ja läbiti erineva kiirusega.

Näidisülesanne

Leidke keha keskmine kiirus ajavahemikus (0 ÷ 6) s, kui keha liikumist kirjeldab joonis 2.

Jooniselt leiame, et keha algkoordinaat oli 10 m ja lõppkoordinaat 0 m. Seega liikus keha 10 m. Liikumise algul oli aeg 0 s ja lõpus 6 s. Aega kulus 6 s. Keha keskmine kiirus on $v = s / t = 10$ m / 6 s = 1,7 m/s.

Ajavahemikus 0 s ÷ 2 s seisis keha paigal. Keskmise kiiruse leidmisel võib seda ajavahemikku arvestada, aga ei pea. Seisuaja arvestamine sõiduaja sisse sõltub ülesande mõttest: kui autojuht tegi sõidul Pärnust Riiga tunnise söögipausi sõidu keskel, siis võiks pausiks kulunud aja lugeda sõiduaja sisse; kui autojuht aga oli Pärnus tund aega kohvikus ja hakkas alles seejärel Riiga sõitma, siis võiks kohvikus oldud aja sõiduajast välja arvata.

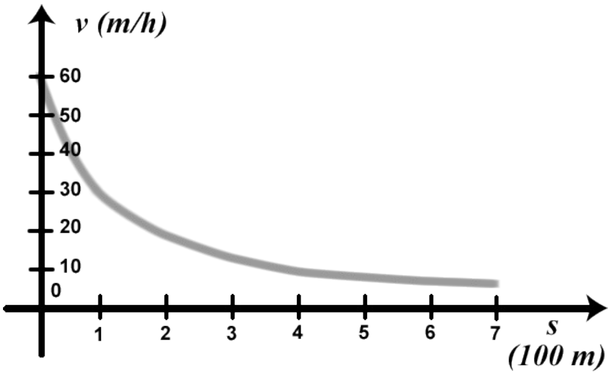
Pöördgraafikud

Kui graafikutel on esitatud pöördvõrdeline sõltuvus, siis on ülesannet tihti lihtsam lahendada, kui konstrueerida graafikul toodud sõltuvuse pöördväärtuse graafik. Kui graafikul on näiteks kujutatud kiiruse sõltuvus vahemaast kujul $v = C / s$ (C on konstant ja s on vahemaa; kiirus väheneb vahemaa kasvades), siis on ülesannet lihtsam lahendada, tehes uue graafiku, mille ühel teljel on vahemaa ja teisel teljel muutuja $1/v$. Uueks graafikuks on nüüd sirge, samas kui algsel graafikul oli pöördvõrdeline sõltuvus. Kui rohkem fantaasiat kasutada, siis võib pöördgraafikuid kasutada ka pöördvõrdelisest sõltuvusest erinevate funktsioonide jaoks.

Näidisülesanne

Graafikul on toodud sipelga kiiruse sõltuvus sipelga kaugusest pesast: mida kaugemale sipelgas pesast läheb, seda aeglasemalt ta liigub. Kui kaua kulub sipelgal koju jõudmiseks

400 m kauguselt?



Joonis 4: Sipelga kiirus väheneb pesast eemaldudes.

Kuna sipelga kiiruse graafikuks on pöördvõrdeline sõltuvus, siis ei oska me sellega praegusel kujul midagi teha. Teeme uue graafiku, kus kujutame sipelga kiiruse pöördväärtuse sõltuvust kaugusest pesast (graafiku ühel teljel on $1/v$ ja teisel s). Kui me leiame uue graafiku graafikualuse pindala, siis see on $1/v \cdot s = s/v = t$ ehk aeg, mis kulub sipelgal tagasi koju jõudmiseks.

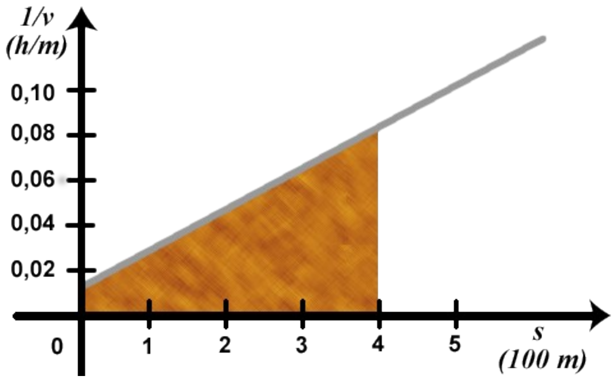
Konstrueerime $1/v$ graafiku, kasutades kiiruse väärtusi kaugustel null ($1/v_0 = 0{,}017$ h/m) ja 200 m ($1/v_{200} = 0{,}05$ h/m). Nendest andmetest leiame, et pöördgraafikul on sipelga kiiruse pöördväärtus sipelgapesas $1/v_0 = 0{,}017$ m/h ja sirge tõusuks on $a = (0{,}05 \text{ h/m} – 0{,}016 \text{ h/m}) / 200 \text{ m} = 1{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ h/m}^2$. Sipelga kiiruse pöördväärtus kodust 400 m kaugusel on seega

$$1/v_{400} = 1/v_0 + a \cdot s = 0{,}083 \text{ h/m}.$$

Pöördgraafikul on graafikualune pindala leitav trapetsi valemiga, kus trapetsi aluseks on sipelga kaugus kodust (400 m) ja trapetsi kõrgusteks on sipelga kiiruse pöördväärtused kodus ($1/v_0$) ja kodust 400 m kaugusel ($1/v_{400}$). Graafikualune pindala on

$$\mathbf{(1/v_0 + 1/v_{400})/2 \cdot 400\ m = 20\ h.}$$

Sipelgas jõuab 400 m kauguselt pessa 20 tunniga.



Joonis 5: Sipelga kiiruse pöördväärtuse graafik.

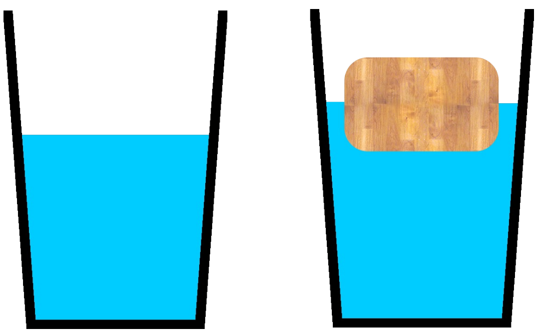
Üleslükkejõud

Vedelikus olevale kehale mõjub üleslükkejõud, mis tahab keha vedeliku seest välja lükata. Üleslükkejõu suurus on

$$F = \rho V g = m' g\ , \tag{8}$$

kus ρ on vedeliku tihedus, V on keha ruumala, g on raskuskiirendus ja m' on keha poolt välja tõrjutud vedeliku mass.

Kui keha asetati vedelikku, siis hõivas keha osa ruumist, kus varem oli vedelik. Veetase anumas tõusis, kuna eemaletõrjutud vedelik pidi kõrgemale liikuma. Seda osa vedelikust tõmbab raskusjõud aga tagasi madalamale, oma algsele kohale. Eemaletõrjutud vedelik mõjutab keha üleslükkejõuga, üritades keha vedelikust välja suruda, nii et vedelik saaks voolata tagasi oma algsesse asukohta. Kuna üleslükkejõu tekitab vesi, mille keha algsest asupaigast välja tõrjus, siis võrdubki üleslükkejõud keha poolt välja tõrjutud vedeliku massiga.



Joonis 6: Keha asetamisel vedelikku tõuseb veetase anumas.

Kangi reegel

Kang on tavaliselt varras või laud, mis on ühes punktis (toetuspunktis) kinnitatud ja saab selle punkti ümber pöörelda või painduda. Kangile mõjuva jõu rakenduspunkti kaugust toetuspunktist nimetatakse jõu õlaks.

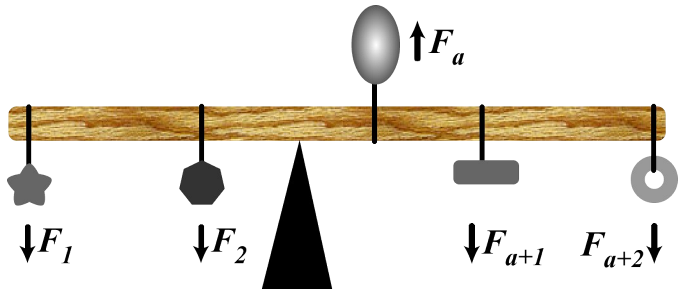
Kangi omaduseks on, et sellega saab jõudu muuta. Kui on vaja tõsta rasket kotti, siis tuleb kott panna kangi lühema õla peale ja pikemat õlga alla vajutada. Siis tõuseb kott üles väiksema jõu mõjul kui on koti enda kaal. Konks on selles, et koti tõstmiseks tuli kangi pikemat õlga liigutada palju rohkem, kui kott ise liikus. Nii pole head halvata: kotti on küll kergem tõsta, aga jõudu tuleb rakendada pikema teepikkuse vältel.

Kangi reegel kehtib olukorras, kus kang on tasakaalus ja ei kaldu ühele ega teisele poole toetuspunkti. Siis on kangile mõjuva jõu korrutis selle jõu õlaga võrdne mõlemal pool kangi toetuspunkti. Kui kangile mõjub palju jõudusid, siis tuleb omavahel liita kõikide jõudude korrutised jõuõlgadega:

$$F_1 l_1 + F_2 l_2 + \ldots F_n l_n = F'_1 l'_1 + \ldots F'_m l'_m \qquad (9)$$

Siin tähistavad F ja F' kangile mõjuvaid jõude (erinevatel jõududel on erinevad indeksid) ning l ja l' nende jõudude õlgasid.

Võrrandi vasakul poolel on jõud, mis mõjuvad kangile toetuspunktist vasakul, ja võrrandi paremal poolel olevad jõud mõjuvad kangile toetuspunktist paremal.



Joonis 7: Kangi reegel. Kangi vasakule poolele mõjuvad jõud on võrrandi (9) vasakul poolel ja kangi paremale poolele mõjuvad jõud on võrrandi (9) paremal poolel. Võrrandis (9) on üles- ja allapoole mõjuvad jõud vastasmärgilised.

Tavaliselt tuleb kangi reegli (9) kasutamisel arvestada ka kangi enda massiga ja sellest tingitud raskusjõuga. Raskusjõud mõjub kangi keskpunktis, kui kang on kõikjal ühesuguse paksuse või läbimõõduga. Kangi massi võib vaadelda ka kahes osas, millest üks osa on kangi toetuspunktist ühel pool ja teine osa teisel pool. Olgu kangi esimeseks ja teiseks pooleks vasak ning parem pool. Siis mõjub kangi vasaku poole mass kangi vasaku poole keskpunkti. Sarnaselt mõjub kangi parema poole mass kangi parema poole keskpunkti.

Enamasti mõjutab kangi raskusjõud, mis on suunatud allapoole (nt. kangkaal). Võimatu pole ka olukord, et kangile mõjuv jõud on suunatud ülespoole. Kui kangi külge kinnitada heeliumiga täidetud õhupall, millele mõjub õhu üleslükkejõud, siis tahab kangile mõjuv jõud kangi ülespoole tõsta.

Näidisülesanne

Kiige ühte otsa on kinnitatud suur kuuma õhuga täidetud õhupall. Õhupallile mõjuv üleslükkejõud on F_{pall} = 50 N. Kui kaugele toetuspunktis peab istuma laps, et kiik oleks tasakaalus? Lapse mass on m_{laps} = 15 kg. Kiige pikkus l =2 m ja mass m = 20 kg. Kiige toetuspunkt asub õhupallist kaugusel 0,4l.

Kiige õhupallipoolse otsa mass on 0,4m ja teise poole mass on 0,6m. Kui jaotada kiige mass kaheks osaks, siis mõjub õhupallipoolse otsa mass toetuspunktist kaugusel 0,2l ja teise otsa mass kaugusel 0,3l (kui kiik jaotada toetuspunktis kaheks, siis on raskusjõu õlgade pikkused kiige kahe osa keskpunktide kaugused toetuspunktist). Õhupalli kaugus toetuspunktist on 0,4l. Lapse kaugus toetuspunktist olgu L. Paneme kirja kangi reegli selle ülesande jaoks, kirjutades võrduse paremale poolele jõud, mis mõjuvad kiige õhupalliga poolele, ja võrduse vasakule poolele jõud, mis mõjuvad kiige õhupallita poolele. Eeldame, et laps istub kiige õhupallita poolel. Kangile mõjuv raskusjõud on F_{kang}, nii et kiige õhupallita poolele mõjub raskusjõud $0{,}6F_{kang}$ ja vastaspoolele raskusjõud $0{,}4F_{kang}$. Kuna õhupalli üleslükkejõud mõjub raskusjõuga vastassuunas, siis on võrrandites üleslükkejõud F_{pall} negatiivne.

$$F_{laps}\, L+0{,}6\,F_{kang}\cdot 0{,}3\,l=-F_{pall}\cdot 0{,}4\,l+0{,}4\,F_{kang}\cdot 0{,}2\,l$$
$$m_{laps}\,g\,L+0{,}6\,m\,g\cdot 0{,}3\,l=-F_{pall}\cdot 0{,}4\,l+0{,}4\,m\,g\cdot 0{,}2\,l$$

$$L=(-0{,}4\,F_{pall}\,l-0{,}1\,m\,g\,l)/(m_{laps}\,g)=-53\,\text{cm}.$$

Lapse kaugus toetuspunktist tuli negatiivne. Sel juhul on laps toetuspunktist algselt eeldatust teisel pool ehk laps istub kiige õhupallipoolses otsas. Laps istub kiige toetuspunktist 53 cm kaugusel ehk kiige õhupallipoolsest otsast 2 m • 0,4 – 53 cm = 27 cm kaugusel.