TARTU ÜLIKOOL

Teaduskool

STAATIKA TASAKAALUSTAMISTINGIMUSED

Koostanud J. Lellep, L. Roots

Tartu 2008

Eessõna

Käesoleva õppevahendi kasutajana on mõeldud eelkõige täppisteaduste vastu huvi tundvaid gümnaasiumi õpilasi, kes on koondunud TÜ Teaduskooli juurde. Seetõttu põhineb õppematerjali esitus peamiselt gümnaasiumi füüsikakursusel. Õppevahendit võivad teatud määral kasutada ka kõrgkoolide üliõpilased, kelle erialaks ei ole füüsika.

1 Staatika põhimõisted ja aksioomid

1.1 Jõu mõiste

Staatikaks nimetatakse mehaanika osa, mille sisuks on õpetus kehade tasakaalust. Põhiliseks mõisteks on siin jõu mõiste.

Looduses eksisteerivad kehad võivad üksteist mehaaniliselt mõjutada. See võib toimuda nii vahetu kokkupuute teel (laual lebav raamat avaldab lauale survet) kui ka mingi välja vahendusel (Päikese ja planeetide vastastikune tõmbumine gravitatsiooniväljas).

Suurust, mis on kehade vastastikuse mehaanilise mõjutuse mõõduks, nimetatakse *jõuks*.

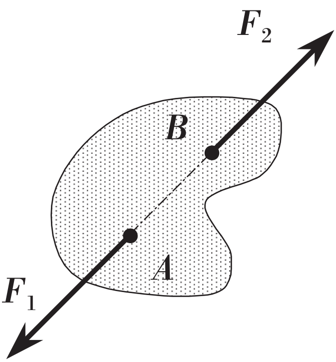
Rahvusvahelises mõõtühikute süsteemis on jõu ühikuks *njuuton* (lühendatult N). Vanas kirjanduses (ja vahel ka igapäevases elus) kohtab veel jõuühikuid kilogramm (kgf), gramm (gf) jt. Seejuures 1 kgf = 9,81 N.

Jõu määramisel on vaja teada jõu suurust (moodulit), tema mõjumise suunda ja rakenduspunkti. Kahte jõudu võime samastada ainult sel juhul, kui neil on ühesugune suurus, mõjumise suund ja rakenduspunkt. Kui kehale mõjub samaaegselt mitu jõudu, siis nende jõudude hulka nimetatakse *jõusüsteemiks*. Sellist jõusüsteemi, mille mõjul paigalseisev keha jääb paigalseisvaks, nimetatakse *tasakaalus olevaks jõusüsteemiks*.

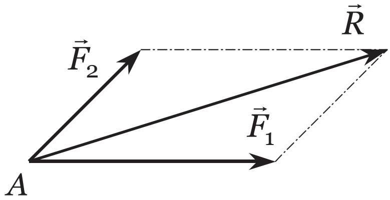
1.2 Staatika aksioomid

Võttes aluseks jõu mõiste ja allpool esitatud laused, on võimalik matemaatiliselt üles ehitada kogu staatika. Need laused kannavad aksioomide nime ning nad loetakse õigeks tõestuseta.

I. *Kaks absoluutselt jäigale kehale rakendatud jõudu on tasakaalus siis ja ainult siis, kui nad on võrdvastupidised ja mõjuvad piki sama sirget* (vt. joon. 1).



Joonis 1: Jõudude tasakaal



Joonis 2: Jõudude liitmine

Absoluutselt jäigaks kehaks nimetatakse mehaanikas niisugust keha, mis pole deformeeritav, ükskõik kui suurte jõududega teda mõjutada. Niisugune mõiste on loomulikult abstraktsioon, looduses esinevad kehad on kõik deformeeruvad; aga enamikel juhtudel on nende deformatsioonid väikesed ning nad võib arvestamata jätta.

II. *Tasakaalus oleva jõusüsteemi lisamine või ärajätmine ei mõjuta jäiga keha liikumist ega tasakaalu.* Siit järeldame, et jõudusid võime nihutada piki mõjusirgeid, s.t. jõud on libisevad vektorid.

III. *Keha mingis punktis rakendatud kahe jõu liitmine toimub rööpküliku reegli järgi, s.t. neid jõudusid tuleb liita nii nagu vektoreid* (vt. joon. 2).

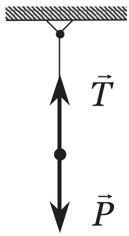
Rööpküliku reegli põhjal leitud jõudude summat nimetatakse *resultantjõuks* ehk lihtsalt *resultandiks.*

IV. *Kaks keha mõjutavad teineteist jõududega, mis on võrdvastupidised ja millel on ühine mõjusirge* (Newtoni III seadus).

1.3 Seose mõiste. Seostest vabastatavuse printsiip

Jäika keha nimetatakse *vabaks kehaks*, kui teda on võimalik antud asendist viia mistahes uude asendisse. Vabu kehi esineb mehaanikas harva. Enamasti on kehade liikumine kitsendatud mitmesuguste tingimustega. Neid tingimusi, mis kitsendavad kehade liikumist, nimetatakse *seosteks*.

Staatika ülesandeid võimaldab lahendada nn. *seostest vabastatavuse printsiip*, mille kohaselt iga mittevaba keha võib vaadelda kui vaba keha, kui jätta ära seosed ning asendada nende mõju reaktsioonjõududega. Kuna reaktsioonjõud ilmnevad kehale tegelikult rakendatud jõudude mõjul, siis nimetatakse neid ka *passiivseteks jõududeks*. *Aktiivseteks* loetakse seevastu kõik jõud, mis ei ole reaktsioonjõud.



Joonis 3: Aktiivsed ja passivsed jõud

Näiteks niidi otsa riputatud kuulikese puhul (vt. joon. 3) on aktiivne jõud raskusjõud $\vec{P}$ ning passiivne jõud niidi tõmme $\vec{T}$. Seostest vabastatavuse printsiibi kohaselt võime niidi katki lõigata, kui rakendame kuulikesele niidi sihilise jõu, mis on suuruselt võrdne niidi tõmbega.

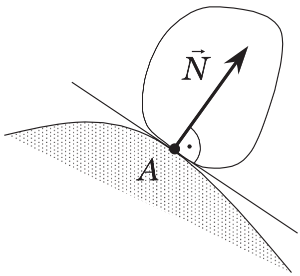
Tuleb rõhutada, et seostest vabastatavuse printsiip on aksiomaatilise iseloomuga. Seda ei tõestata.

1.4 Seoste põhitüübid

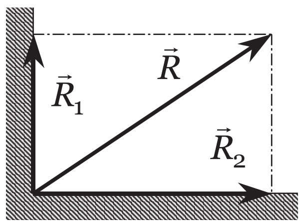
Kehade tasakaalu uurimisel on alati esmaseks ülesandeks vabastada keha seostest ja asendada nende mõju reaktsioonjõududega. Järgnevalt vaatleme, kuidas seda teha mõningate praktikas sagedamini esinevate seosetüüpide puhul.

Puutugu vaadeldav keha absoluutselt siledat pinda punktis A (vt. joon. 4).

Ideaalselt sile pind ei takista liikumist piki pinda (puutujatasapinnas), vaid ainult liikumist pinna sisse. Seega antud seose reaktsioonjõud peab olema pinna normaali sihiline. Niisugust reaktsioonjõudu nimetatakse *normaalreaktsiooniks*.



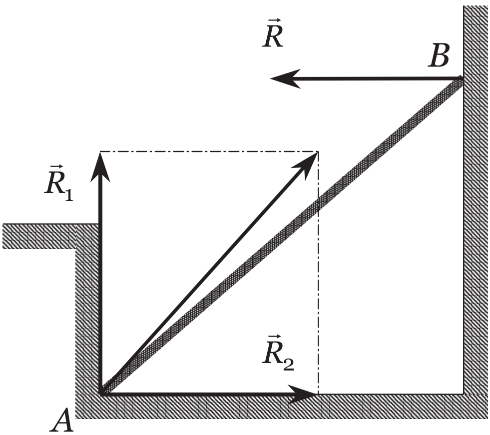
Joonis 4: Normaalreaktsioon



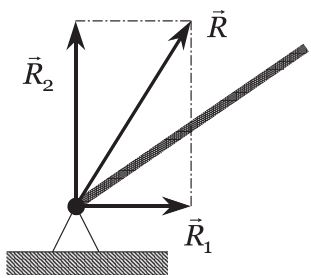
Joonis 5: Toereaktsiooni siht kahe pinna lõikepunktis

Kui keha toetuspunkt asub kahe sileda pinna lõikepunktis (joon. 5), siis koosneb reaktsioonjõud $\vec{R}$ kahest komponendist $\vec{R}_1$ ja $\vec{R}_2$, mis on vastavalt lõikuvate pindade normaalide sihilised jõud. Nende resultandi $\vec{R}$ suund on tavaliselt tundmatu.

Kui näiteks varras AB toetub punktis A vastu sileda põranda nurkki ning punktis B vastu siledat seina (joon. 6), siis on punktis B reaktsioonjõud risti seinaga, ent punktis A on reaktsioonijõul kaks komponenti R_1 ja R_2. Komponentide R_1 ja R_2 summa ei tarvitse



Joonis 6: Erinevaid toereaktsioone ühes süsteemis



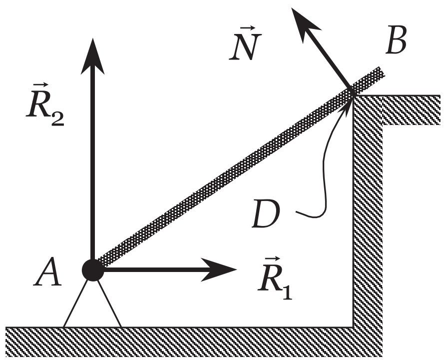
Joonis 7: Toereaktsiooni siht šarniiris

üldjuhul olla varda sihiline.

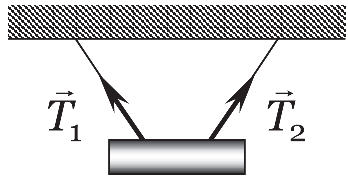
Tutvume järgnevalt šarniiri mõistega. Šarniiriks ehk liigendiks nimetatakse tehnikas niisugust keha kinnitust, mis võimaldab tal pöörelda ümber liikumatu telje (silindriline šarniir) või ümber punkti (sfääriline šarniir). Šarniirse kinnituse korral on reaktsioonjõu suund tavaliselt tundmatu, seetõttu asendatakse reaktsioonjõud kahe teineteisega risti oleva komponendiga $\vec{R}_1$ ja $\vec{R}_2$ silindrilise šarniiri korral (joon. 7) ja kolme üksteisega ristioleva komponendiga sfäärilise šarniiri korral.

Olgu varda AB ots A kinnitatud šarniirselt ning toetugu ta punktis D vastu serva (joon. 8). Sel juhul on punktis A reaktsioonjõul kaks komponenti $\vec{R}_1$ ja $\vec{R}_2$.

Kui keha hoitakse tasakaalus absoluutselt painduva niidi, (niisuguse niidi, mis ei avalda mingisugust vastupanu enda painutamisele), nööri, trossi või ahela abil, siis võime niisugusele seosele vastava



Joonis 8: Erinevaid toereaktsioone ühes süsteemis



Joonis 9: Toereaktsiooni siht niidis

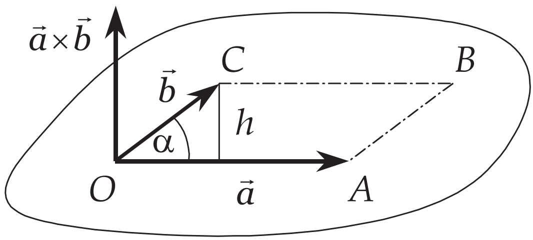
reaktsioonjõu suuna üheselt määrata. Kuna niit võib kehale avaldada ainult tõmbejõudu, siis on reaktsioonjõud niidi (või ahela puutuja) sihiline (joon. 9).

Tehnikas kasutatakse sageli vardaid, mis on šarniiride abil kinnitatud teiste konstruktsioonielementide külge. Mõnikord on varda kaal tühiselt väike võrreldes talle rakendatud jõududega ning ülesannetes on lubatud lugeda varras kaalutuks. Sel juhul on šarniiri reaktsioonjõud sihitud piki varrast, sest vastasel korral ei saaks varras olla tasakaalus (aktiivsed välisjõud on varda sihilised).

1.5 Kahe vektori vektorkorrutis

Järgnevas leiab kasutamist üks operatsioon vektoritega, mida koolimatemaatika kursuses ei käsitleta, nimelt kahe vektori vektorkorrutis. Peatume sellel lühidalt.

Olgu antud kaks vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ühise alguspunktiga O (joon. 10). Nende vektorkorrutiseks, mida tähistatakse $\vec{a}\times\vec{b}$, nimetatakse vektorit, mis rahuldab järgmisi nõudeid:



Joonis 10: Kahe vektori vektorkorrutis

1. tema moodul võrdub teguritele ehitatud rööpküliku pindalaga;
2. ta on risti tasandiga läbi mõlema teguri ning
3. ta on suunatud sinnapoole, kuhu liigub nimetatud tasandi normaalile asetatud parema käe kruvi telg, kui selle kruvi pead pöörata esimese teguri pealt teise teguri poole.

Et rööpkuliku $OABC$ pindala on $OA \cdot h$ ja $OA = |\vec{a}|$,

$$h = OC \cdot \sin\alpha = |\vec{b}| \cdot \sin\alpha,$$

siis vektorkorrutise moodul

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha.$$

Definitsioonist järeldub, et kahe vektori vektorkorrutis on null vaid juhtudel, kui vähemalt üks tema teguritest on nullvektor või mõlemad tegurid on samasihilised (neil juhtudel on rööpkuliku $OABC$ pindala null). Samuti nähtub sealt, et tegurite järjekorra muutmine muudab nende korrutise suuna, jättes suuruse endiseks, s.t.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a});$$

vektorkorrutis *pole kommutatiivne.*

Saab tõestada, et vektorkorrutis on distributiivne, s.t.

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$

samuti on

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

ning

$$(\lambda \vec{a}) \times (\mu \vec{b}) = \lambda\mu \cdot (\vec{a} \times \vec{b}),$$

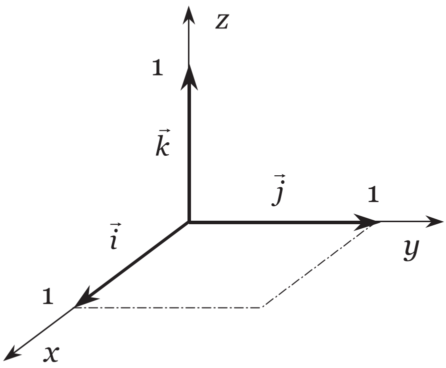
kus λ ja μ on skalaarsed tegurid.

Vaatleme ristkoordinaadistiku telgede suunaliste ühikvektorite vektorkorrutisi (joon. 11). Et vektoritele $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ ehitatud rööpkülik on ruut (kõik nurgad joonisel on täisnurgad) küljepikkusega 1 ühik, siis

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = 1;$$

suund peab vektorkorrutisel $\vec{i} \times \vec{j}$, nagu eespooltoodud definitsioonist järeldub, ühte langema z-telje positiivse suunaga, seega

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}.$$



Joonis 11: Ortogonaalsete ühikvektorite vektorkorrutis

Samuti on

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

aga

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Ühikvektorite vektorkorrutised iseenesega võrduvad nulliga:

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0.$$

sest neis on teguriteks samasihilised vektorid.

Olgu nüüd vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ antud oma koordinaatidega:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z),$$

siis

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

ning

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_xb_x\vec{i} \times \vec{i} + a_xb_y\vec{i} \times \vec{j} + a_xb_z\vec{i} \times \vec{k} + a_yb_x\vec{j} \times \vec{i} +$$
$$+ a_yb_y\vec{j} \times \vec{j} + a_yb_z\vec{j} \times \vec{k} + a_zb_x\vec{k} \times \vec{i} + a_zb_y\vec{k} \times \vec{j} + a_zb_z\vec{k} \times \vec{k}$$

ehk arvestades valemeid ühikvektorite vektorkorrutiste jaoks:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y) \cdot \vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z) \cdot \vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x) \cdot \vec{k}.$$

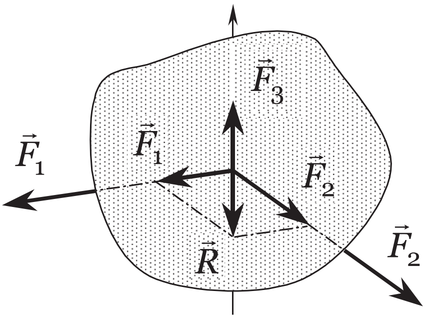
2 Jõusüsteemide tasakaal

2.1 Ühes punktis lõikuvate jõudude süsteem

Vaatleme järgnevalt juhtu, kui kõigi kehale rakendatud jõudude mõjusirged lõikuvad ühes punktis. Uurime, milliseid tingimusi täidavad need jõud tasakaalu korral.

Alustame juhuga, kui kehale mõjub kaks jõudu. Esimese aksioomi põhjal on need jõud tasakaalus parajasti siis, kui nad on võrdvastupidised. Kolmanda aksioomi põhjal on nende resultant nullvektor.

Kui kehale mõjub kolm jõudu, mille mõjusirged lõikuvad ühes punktis (joon. 12), siis võime kaks jõudu (näiteks $\vec{F}_1$ ja $\vec{F}_2$) kanda ühisesse lõikepunkti (teise aksioomi põhjal) ja liita kokku rööpküliku reegli järgi (kolmanda aksioomi põhjal). Olgu $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}$. Tasakaalu (esimene) aksioom väidab, et antud jõusüsteem on tasakaalus, kui jõud $\vec{R}$ ja $\vec{F}_3$ on võrdvastupidised ning mõjuvad piki



Joonis 12: Jõudude kandmine lõikepunkti ja liitmine

sama sirget. Seega $\vec{R} + \vec{F}_3$ ehk $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$. Siit järeldame, et kui jõusüsteem on tasakaalus, siis jõudude resultant on nullvektor.

Analoogilise tulemuseni jõuame ka siis, kui kehale mõjub suvaline lõplik arv jõudusid, mille mõjusirged lõikuvad ühes punktis. Seega

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0. \tag{1}$$

Lõikugu kõigi jõudude mõjusirged punktis O. Fikseerime ristkoordinaadistiku O_{xyz}. Olgu jõuvektorite F_i koordinaadid selles teljestikus (X_i, Y_i, Z_i), kus $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vektoralgebrast on teada, et vektorvõrrand (1) on samaväärne kolme skaalavõrrandiga

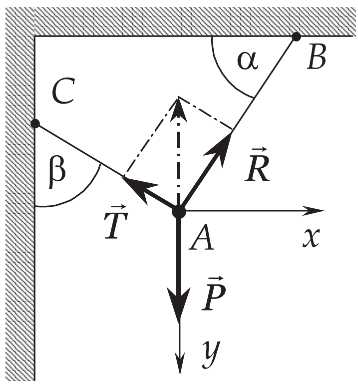
$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0. \tag{2}$$

Saadud tulemuse võiksime sõnastada järgmiselt: ühes punktis lõikuvate jõudude süsteem on tasakaalus parajasti siis, kui nende jõudude projektsioonide summad kolmel vabalt valitud üksteisega ristuval koordinaatteljel võrduvad nulliga.

Tasakaalutingimus (2) kujutab endast võrrandisüsteemi. Et võrrandite arv on kolm, siis saame ülesande lahendamisel määrata ülimalt kolm tundmatut suurust. Kui jõususteem on tasapinnaline, siis saame koordinaatteljed valida nii, et üks võrranditest (2) on rahuldatult samaselt. Sel juhul on meil võimalik leida ainult kaks tundmatut. Kui tundmatuid on rohkem, siis staatika võrrandid neid leida ei luba — on tegemist nn. *staatiliselt määramatu ülesandega.*

Märkus. Võrrandite (2) tuletamisel me eeldasime, et koordinaatide alguspunkt asub jõudude lõikepunktis. Et aga suurused X_i, Y_i ja Z_i on vektori $\vec{F_i}$ projektsioonid koordinaattelgedel, s.t. suurused, mis ei sõltu koordinaatide alguspunkti asukohast, siis on meil õigus valida koordinaatteljestiku asendit täiesti vabalt. Vektori projektsioonide leidmiseks tuleb korrutada vektori moodulit (pikkust) vektori ja koordinaattelje vahelise nurga koosinusega.

Näide 1. Elektrilampi A kaaluga P hoitakse tasakaalus kahe nööri AB ja AC abil. Nöörid moodustavad laega ja seinaga vastavalt nurgad α ja β. Leida nööride tõmbed.



Joonis 13: Näide 1

Kasutame seostest vabastatavuse printsiipi ja vaatleme elektrilambi A tasakaalu. Eemaldame mõttes seosed (nöörid) ja asendame nende moju reaktsioonjõududega $\vec{R}$ ja $\vec{T}$. Nöörid võime lugeda absoluutselt painduvateks, seetõttu on $\vec{R}$ ja $\vec{T}$ nööride AB ja CD sihilised vektorid. Valime koordinaatteljestiku nii, nagu on näidatud joonisel 13. Arvutame kõigi jõudude projektsioonid koordinaatteljedel ning paigutame nad tabelisse.

	$\vec{R}$	$\vec{T}$	$\vec{P}$
Projektsioon x-teljel	$\|\vec{R}\cos\alpha\|$	$-\|\vec{T}\sin\beta\|$	0
Projektsioon y-teljel	$-\|\vec{R}\sin\alpha\|$	$-\|\vec{T}\cos\beta\|$	$\|\vec{P}\|$

Kirjutades välja jõudude projektsioonide (tabeli ridades seisvate avaldiste) summad ja võrdsustades need nulliga, saame

$$\begin{cases} |\vec{R}|\cdot\cos\alpha - |\vec{T}|\sin\beta = 0, \\ |\vec{R}|\cdot\sin\alpha - |\vec{T}|\cos\beta + |\vec{P}| = 0. \end{cases}$$

Esitatud võrrandisüsteemi lahendamisel on otstarbekas korrutada esimest võrrandit teguriga $\sin\alpha$ ning teist teguriga $\cos\alpha$ ja tulemused liita. Nii saame

$$|\vec{T}| = |\vec{P}|\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}\,.$$

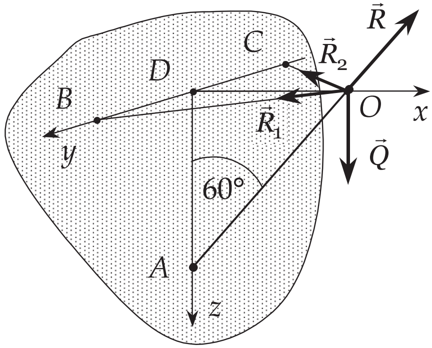
Esimesest võrrandist avaldame nüüd

$$|\vec{R}| = |\vec{P}|\cdot\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}\,.$$

<u>*Näide 2*</u>. Raskust $Q = 1$ kN hoitakse ülal varda AO ja kahe horisontaalse trossi OB ja OC abil. Varras on kinnitatud punktis A šarniirselt. Ta asetseb vertikaaltasapinnas ja moodustab vertikaaltasapinnaga ABC nurga 60°. On teada, et kolmnurk OBC on

täisnurkne võrdhaarne kolmnurk. Leida vardas mõjuv jõud $\vec{R}$ ja trosside tõmbed $\vec{T}_1$ ja $\vec{T}_2$. Varda kaalu mitte arvestada.

Valime koordinaatide alguspunktiks punkti D. Olgu z-telg vertikaalne ning asugu x- ja y-teljed horisontaaltasapinnas (joon. 14).



Joonis 14: Näide 2

Kuna varras on kinnitatud seina külge šarniirselt, siis on reaktsioonjõud $\vec{R}$ varda sihiline. Reaktsioonjõud $\vec{R}_1$ ja $\vec{R}_2$ on trosside OB ja OC sihilised, sest trosse võime lugeda absoluutselt painduvateks.

Projekteerime kõik jõud, mis on kujutatud joonisel 14, koordinaattelgedele. Tulemuse esitame tabelina.

	$\vec{Q}$	$\vec{R}$	$\vec{R}_1$	$\vec{R}_2$
x-telg	0	$\lvert\vec{R}\rvert \cdot \sin 60°$	$-\lvert\vec{R}_1\rvert \cdot \cos 45°$	$-\lvert\vec{R}_2\rvert \cdot \cos 45°$
y-telg	0	0	$\lvert\vec{R}_1\rvert \cdot \sin 45°$	$-\lvert\vec{R}_2\rvert \cdot \sin 45°$
z-telg	$\lvert\vec{Q}\rvert$	$-\lvert\vec{R}\rvert \cdot \cos 60°$	0	0

Kirjutades tabeli põhjal välja jõudude projektsioonide summad x-, y- ja z-teljel ning võrdsustades need nulliga, saame pärast mõningaid lihtsustusi

$$|\vec{R}|\cdot\sqrt{3}-\Big(|\vec{R}_1|+|\vec{R}_2|\Big)\cdot\sqrt{2}=0,\quad |\vec{R}_1|-|\vec{R}_2|=0,\quad |\vec{Q}|-\frac{|\vec{R}|}{2}=0.$$

Selle süsteemi lahendamisel leiame

$$\vec{R}=2\cdot|\vec{Q}|=2\text{ kN},\quad \vec{R}_1=\vec{R}_2=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot|\vec{Q}|\approx 1{,}2\text{ kN}.$$

2.2 Jõumomendi mõiste

Kooli füüsikakursuses antakse jõumomendile niisugune definitsioon: *jõumomendiks nimetatakse jõu ja jõu õla korrutist.* Jõu õla all mõistetakse jõu mõjusirge kaugust pöörlemisteljest. See definitsioon on rakendatav ainult tasapinnaliste jõusüsteemide puhul, sest sel juhul asetsevad kõigi jõudude mõjusirged ühes tasapinnas, millega on risti pöörlemistelg. Kui on tegemist ruumilise jõususteemiga, siis tuleb jõumomenti tõlgendada vektoriaalse suurusena.

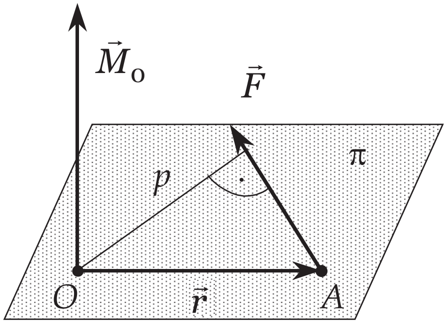
Olgu antud jõud $\vec{F}$ ja punkt O, mille suhtes me tahame arvutada momenti. Konstrueerime tasapinna π, millel asetseb jõu mõjusirge ning punkt O (joon. 15). Olgu jõu rakenduspunkti A kohavektor $\vec{r}(x,y,z)$. Punkti O loeme koordinaatide alguspunktiks.

Jõu $\vec{F}$ momendiks punkti O suhtes $\vec{M}_0$ nimetatakse vektorit

$$\vec{M}_0=\vec{r}\times\vec{F},$$

s.t. rakenduspunkti kohavektori ja jõu vektorkorrutist.

Vektorkorrutise definitsiooni põhjal on vektor $\vec{M}_0$ risti tasapinnaga π. Selle suund valitakse parema käe kruvi reegli järgi, s.t. kruvipea pöörlemisel vektori $\vec{F}$ suunas liigub kruvi $\vec{M}_0$ suunas.



Joonis 15: Jõumoment

Kuna jõumomendi moodul

$$M_0 = Fr \sin\left(\vec{r}, \vec{F}\right)$$

ning

$$r \sin(\vec{r}, \vec{F}) = p,$$

siis

$$M_0 = Fp.$$

Järelikult viimatiesitatud definitsioon ei ole vastuolus eelmisega, mille kohaselt jõumoment on võrdne jõu ja tema õla korrutisega.

Vektorkorrutise omaduste põhjal võime öelda, et jõumoment võrdub nulliga, kui $\vec{r}$, s.t. kui jõu mõjusirge läbib vaadeldavat punkti. Momentvektori koordinaadid avalduvad kujul

$$\vec{M}_0 = (yZ - zY) \cdot \vec{i} + (zX - xZ) \cdot \vec{j} + (xY - yX) \cdot \vec{k},$$

kus $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ on koordinaattelgede suunalised vektorid ja (X, Y, Z) on jõuvektori koordinaadid. Seega

$$\vec{M}_0 = (yZ - zY, zX - xZ, xY - yX). \tag{3}$$

Siiani on juttu olnud kogu aeg jõumomendist punkti suhtes. Jõumoment telje suhtes defineeritakse järgmiselt: *jõumomendiks telje suhtes nimetatakse momenti, mille annab teljega risti oleval tasandil võetud jõu projektsioon telje ja tasapinna lõikepunkti suhtes.*

Kokkuleppeliselt mõistetakse jõumomenti telje suhtes algebralise (mitte vektoriaalse) suurusena. Selle märk määratakse järgmise reegli abil. Kui jõu projektsioon teljega ristuval tasandil on niisuguse suunaga, et ta püüab keha pöörata ümber tasandi ja telje lõikepunkti kellaosuti liikumisele vastassuunas, siis loeme momendi positiivseks, vastasel juhul negatiivseks.

Esitatud definitsiooni põhjal võime väita, et jõumoment telje suhtes võrdub nulliga, kui *1)* jõu mõjusirge lõikab telge; *2)* ta on teljega paralleelne.

On võimalik näidata, et jõumoment telje suhtes on võrdne selle telje mistahes punkti jaoks arvutatud momentvektori projektsiooniga sellel teljel. See asjaolu lubab hõlpsasti määrata momendid koordinaattelgede suhtes, kui on teada koordinaatide alguspunkti suhtes arvutatud momentvektor. Selle vektori koordinaadid ongi momendid koordinaattelgede suhtes.

2.3 Tasakaalutingimused üldjuhul

Olgu jäigale kehale rakendatud jõud $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ kusjuures nende jõudude hulka on arvatud ka seoste reaktsioonjõud. Eespool me nägime, et kui jõudude mõjusirged lõikuvad ühes punktis, siis peab tasakaalu korral olema jõuvektorite summa võrdne nulliga. Üldjuhul (kui jõudude mõjusirged ei lõiku ühes punktis) peab lisaks jõudude summale võrduma nulliga ka mingi punkti suhtes arvutatud momentvektorite summa.

Seega jäigale kehale rakendatud jõusüsteem on tasakaalus parajasti siis, kui *1)* nende jõudude projektsioonide summad kolmel üksteisega ristuval koordinaatteljel võrduvad nulliga ja *2)* jõudude momentide summad nende koordinaattelgede suhtes võrduvad nulliga ehk

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0. \qquad (4)$$

Siin X_i, Y_i, Z_i on jõu $\vec{F}_i$ koordinaadid ja $M_x\left(\vec{F}_i\right)$, $M_y\left(\vec{F}_i\right)$, $M_z\left(\vec{F}_i\right)$ — talle vastavad koordinaatide alguspunkti suhtes arvutatud momentvektori koordinaadid.

Nagu näeme, on tasakaalutingimusi üldiselt kuus. Need võrrandid võimaldavad määrata ülimalt kuus tundmatut suurust. Juhul, kui jõusüsteem on tasapinnaline, on süsteemis (4) osa võrrandeid rahuldatud samaselt. Vaatleme seda juhtu üksikasjalikumalt.

Valime koordinaatteljestiku nii, et kõik jõud asuvad xy-tasandil. Sel juhul on kõik jõud risti z-teljega ja sellele teljele projektsiooni ei anna. Et kõik jõud kas lõikavad x- ja y-telgesid või on ühega nendest paralleelsed, siis jõudude momendid nende telgede suhtes võrduvad nulliga. Järelikult

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i \equiv 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right) \equiv 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right) \equiv 0.$$

Moment $M_z\left(\vec{F}_i\right)$ on definitsiooni kohaselt võrdne koordinaatide alguspunkti O suhtes arvutatud momentvektori projektsiooniga z-teljel. Et kõik jõud asuvad z-teljega ristuval tasandil, siis

$$M_z\left(\vec{F}_i\right) = \pm|\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)|.$$

Sõnastame saadud tulemuse. Tasapinnaline jõususteem on tasakaalus parajasti siis, kui *1)* jõudude projektsioonide summad kahel jõudude tasapinnal ristiasetseval sihil võrduvad nulliga; *2)* jõudude momentide summa tasapinna mistahes punkti A suhtes võrdub nulliga, s.t.

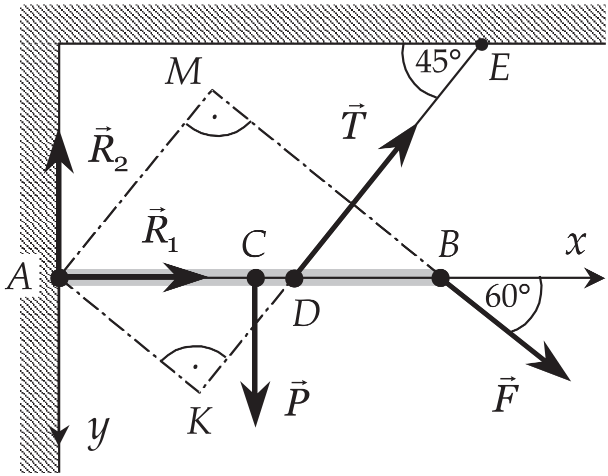
$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0. \tag{5}$$

Märkus: Süsteemi (5) viimases võrrandis peaks õieti momendid olema arvutatud koordinaatide alguspunkti suhtes. Ent koordinaatide alguspunkti võime valida vabalt. Et esimesed kaks võrrandit sellest valikust ei sõltu, siis võib punkt A olla tasapinna suvaline punkt. Ülesannete lahendamisel valitakse punktiks A niisugune punkt, mida läbivad võimalikult paljude tundmatute jõudude mõjusirged. Sel juhul vastav võrrand lihtsustub.

Naide 3: Horisontaalset ühtlast tala AB pikkusega $l = 4$ m ja kaaluga $P = 1$ kN, mis on punktis A šarniirselt kinnitatud seina külge, hoitakse tasakaalus horisontaali suhtes $45°$ all kaldu oleva trossi DE abil. Trossi kinnituspunkt D asub otsast B ühe meetri kaugusel. Tala vabale otsale B on rakendatud horisontaali suhtes $60°$-lise nurga all jõud $F = 2$ kN. Leida reaktsioonjõud punktis A ja trossi DE tõmme.

Valime koordinaatide alguspunktiks punkti A (joon. 16). Olgu x-telg horisontaali- ning y-telg vertikaalisihiline. Eemaldame mõttes toed ning asendame nende mõju talale reaktsioonjõududega $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ ja $\vec{T}$.

Et jõud $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{T}$, $\vec{P}$ ja $\vec{F}$ moodustavad tasapinnalise tasakaalus oleva jõusüsteemi, siis võime kasutada tasakaalutingimusi (5). Et punktis A mõjub kaks tundmatut jõudu, siis on otstarbekas arvutada momendid punkti A suhtes.



Joonis 16: Näide 3

Arvutades jõudude projektsioonide summad koordinaattelgedel x ja y ning momentide summad punkti A suhtes ja võrdsustades need nulliga saame

$$R_1 + T\cos 45^\circ + F\cos 60^\circ = 0,$$

$$-R_2 + P - T\sin 45^\circ + F\sin 60^\circ = 0,$$

$$-P \cdot AC + T \cdot AK - F \cdot AM = 0.$$

Kuna $AC = 2$ m,

$$AK = AD \cdot \sin 45^\circ = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\ \mathrm{m},$$

$$AM = AB \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}\ \mathrm{m},$$

siis saame kolmandast võrrandist avaldada

$$T = 1 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} + 2 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3} = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sqrt{3}\right) = 4{,}2\ \mathrm{kN}.$$

Asendades T väärtuse kahte esimesse võrrandisse ning lahendades need R_1 ja R_2 suhtes, saame

$$R_1 = -3{,}96\ \mathrm{kN}, \quad R_2 = -0{,}23\ \mathrm{kN}.$$

Miinusmärgid tähendavad siin seda, et $\vec{R}_1$ ja $\vec{R}_2$ suunad on joonisel valitud ebaõigesti. Järelikult $\vec{R}_1$ on suunatud horisontaalselt vasakule ja $\vec{R}_2$ vertikaalselt alla.

Pöördume veel kord tagasi joonise juurde. Paneme tähele, et jõudude $\vec{T}$ ja $\vec{F}$ momentide arvutamisel oleksime võinud leida nende jõudude projektsioonid vertikaalsihil ning seejärel nende projektsioonide momendid punkti A suhtes. Tõepoolest,

$$T_y = T\cos 45^\circ, \quad F_y = F\cos 60^\circ$$

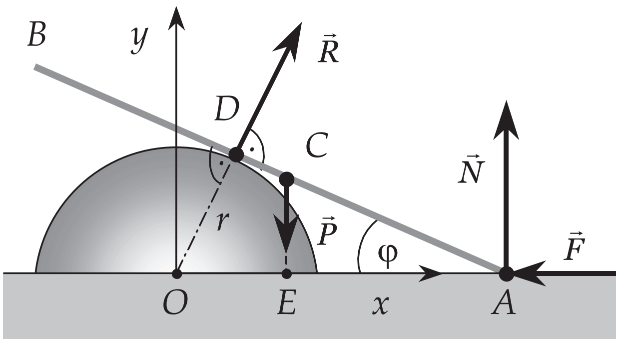
ning

$$M_A(T_y) = T\cos 45^\circ \cdot AD = M_A\left(\vec{T}\right),$$

$$M_A(F_y) = -F\sin 60^\circ \cdot AB = M_A\left(\vec{F}\right).$$

Selle tõsiasja arvestamine lihtsustab ülesannetes momentide arvutamist.

<u>*Naide 4*</u>: Horisontaalsele alusele on kinnitatud poolkera raadiusega r (joon. 17). Poolkerale toetub varras AB pikkusega $2a$ ja kaaluga P. Varda kaldenurk sileda aluspinna suhtes on φ. Kui suur horisontaalsihiline jõud tuleb rakendada punktis A, et varras oleks tasakaalus?



Joonis 17: Näide 4

Kanname kõigepealt joonisele kõik vardale mõjuvad jõud. Kuna me loeme seosed hõõrdumisvabadeks, siis on normaalreaktsioon $\vec{N}$ risti alusega ja $\vec{R}$ risti vardaga. Viimane on suunatud piki kera raadiust. Tundmatuteks on antud ülesande puhul jõud $\vec{R}$, $\vec{N}$ ja $\vec{F}$ kokku kolm suurust. Sama palju on ka võrrandeid tasakaalutingimustes (5).

Valime koordinaatide alguspunktiks punkti O ning x-telje horisontaal- ja y-telje vertikaalsihilise. Nagu eespool öeldud, on momente otstarbekas arvutada niisuguse punkti suhtes, mille puhul langeb kõige enam otsitavaid suurusi välja. Vaadeldava ülesande puhul on selliseid punkte kaks: punkti O suhtes ei anna momenti jõud $\vec{R}$ ja $\vec{F}$ ning A suhtes jõud $\vec{N}$ ja $\vec{F}$. Lepime kokku koostada momentide võrrand punkti O suhtes. Kanname vahetulemused tabelisse. Jõudude projektsioonide leidmine ei valmista nähtavasti erilisi raskusi, sellel me ei peatu. Kuna $M_O\left(\vec{P}\right) = -P \cdot EO$ ja $M_O\left(\vec{N}\right) = N \cdot OA$, siis on meil vaja eraldi leida EO ja OA.

Jõud	Projektsioon x-teljel	Projektsioon y-teljel	Moment punkti O suhtes
$\vec{R}$	$R\sin\varphi$	$R\cos\varphi$	0
$\vec{P}$	0	$-P$	$-\left(\frac{r}{\sin\varphi} - a\cos\varphi\right) \cdot P$
$\vec{N}$	0	N	$\frac{r}{\sin\varphi} \cdot N$
$\vec{F}$	$-F$	0	0

Et kolmnurk OAD on täisnurkne, siis $r/OA = \sin\varphi$. Siit $OA = r/\sin\varphi$. Täisnurksest kolmnurgast EAC leiame $EA = a\cos\varphi$. Seega

$$OE = OA - \frac{r}{\sin\varphi} - a\cos\varphi.$$

Kirjutades välja tasakaaluvõrrandid (5) ehk teiste sõnadega, liites veergudes olevad suurused ja võrdsustades need nulliga, saame

$$R\sin\varphi - F = 0, \quad R\cos\varphi - P + N = 0,$$

$$-\left(\frac{r}{\sin\varphi} - a\cos\varphi\right) \cdot P + r\sin\varphi \cdot N = 0.$$

Selle süsteemi viimane võrrand annab

$$N = \left(1 - \frac{a\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{r}\right) \cdot P.$$

Nüüd leiame teisest võrrandist

$$R = \left(\frac{a \sin \varphi}{r}\right) \cdot P$$

ning esimesest võrrandist

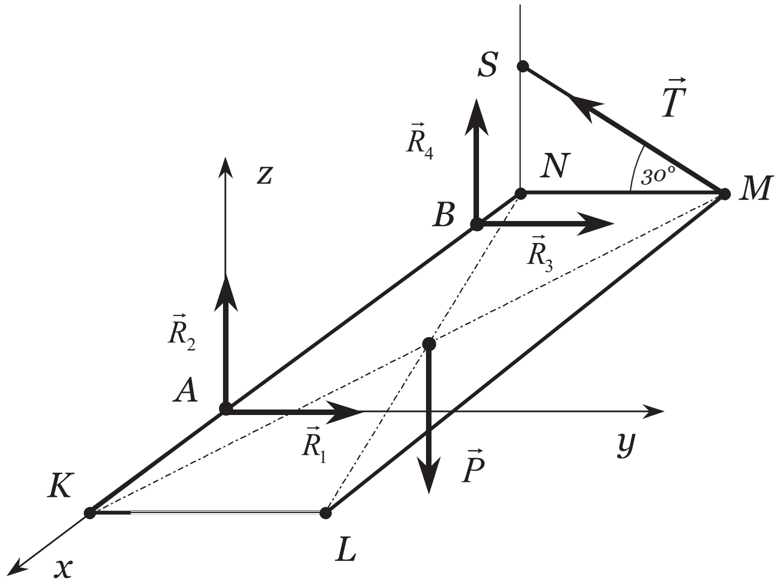
$$F = \left(\frac{a \sin^2 \varphi}{r}\right) \cdot P.$$

Naide 5: Raudteevaguni nari on kinnitatud seina külge kahe hinge (silindrilise šarniiri) abil. Nari võib lugeda horisontaalseks plaadiks, mille pikkus $LM = 0{,}8$ m. Varras on kinnitatud seina ja nari külge šarniirselt. See moodustab horisontaaliga nurga $30°$. Hingede kaugused nari otstest on võrdsed $AK = BN = 0{,}1$ m. Leida varda ja hingede reaktsioonid, kui nari kaal on $P = 10$ kN.

Kanname joonisele kõik narile mõjuvad jõud. Nendeks on silindriliste šarniiride A ja B reaktsioonid $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ ja $\vec{R}_3$, $\vec{R}_4$ ning varda reaktsioon $\vec{T}$.

Et varda kaal on nari kaaluga võrreldes väga väike, siis võib lugeda varda kaalutuks. Kuna varda mõlemad otsad on kinnitatud šarniirselt, siis jõu $\vec{T}$ suund ühtib varda suunaga.

Valime koordinaatteljed joonisel 18 näidatud viisil. Kuna kõik jõud on risti x-teljega, siis nende projektsioonide summa sellel teljel võrdub samaaegselt nulliga. Niisiis tasakaaluvõrranditest (4) on üks rahuldatud samaselt. Järelejäänud viiest võrrandist saame määrata tundmatud $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$, $\vec{R}_4$ ja $\vec{T}$. Leiame kõigi jõudude projektsioonid koordinaattelgedel y ja z. Samuti leiame nende jõudude momendid koordinaattelgede suhtes. Kanname vahetulemused tabelisse. Tabelis tähendab F, F_x ja F_y vastavat jõudu ja jõu projektsiooni.



Joonis 18: Näide 5

F	R_1	R_2	R_3	R_4	P	T
F_x	R_1	0	R_3	0	0	$-T\cos 30°$
F_y	0	R_2	0	R_4	$-P$	$-T\sin 30°$
M_x	0	0	0	0	$-P \cdot \frac{KL}{2}$	$-T\sin 30° \cdot MN$
M_y	0	0	0	$R_4 \cdot AB$	$-P \cdot \frac{AB}{2}$	$-T\sin 30° \cdot AN$
M_z	0	0	$-R_3 \cdot AB$	0	0	$-T\cos 30° \cdot AN$

Ülesande seades ei ole nari laiust antud. Tähistame $MN = KL = a$. Kirjutame välja tabeli veergudes olevate suuruste summad ja võrdsustame need nulliga vastavalt tasakaaluvõrranditele (4). Arvestades seejuures, et

$$AB = LM - 0,2 = 0,6, \quad AN = AB + 0,1 = 0,7,$$

saame

$$R_1+R_3-T\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0,\quad R_2+R_4-P+\frac{T}{2}=0,\quad -P\cdot\frac{a}{2}+a\cdot\frac{T}{2}=0,$$

$$R_4\cdot 0{,}6-\frac{P}{2}\cdot 0{,}6+0{,}7\cdot\frac{T}{2}=0,\quad -R_3\cdot 0{,}6+T\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}7=0.$$

Süsteemi kolmandast võrrandist leiame $T=P=10$ kN. Viimane võrrand annab

$$R_3=\frac{7\sqrt{3}}{12}\cdot T\approx 10{,}1\ \text{kN}.$$

Neljandast võrrandist avaldame

$$R_4=-\frac{5}{6}\approx -0{,}83\ \text{kN}.$$

Nüüd saame esimesest ja teisest võrrandist vastavalt

$$R_1=-\frac{5}{6}\cdot\sqrt{3}\approx -1{,}44\ \text{kN},\quad R_2=5\cdot\frac{5}{6}\approx 5{,}83\ \text{kN}.$$

Miinusmärgid suuruste R_1 ja R_4 arvuliste väärtuste ees tähendavad seda, et nende suunad on vastupidised joonisel 18 näidatud suundadega.