TARTU ÜLIKOOL

Teaduskool

Võnkumised ja lained

Koostanud Henn Voolaid

Tartu 2008

Eessõna

Käesoleva õppevahendi kasutajana on mõeldud eelkõige täppisteaduste vastu huvi tundvaid gümnaasiumi õpilasi, kes on koondunud TÜ Teaduskooli juurde. Seetõttu põhineb õppematerjali esitus peamiselt gümnaasiumi füüsikakursusel. Õppevahendit võivad teatud määral kasutada ka kõrgkoolide üliõpilased, kelle erialaks ei ole füüsika.

© 1995 Henn Voolaid

© 2000 Tartu Ülikooli Täppisteaduste Kool

© 2008 Tartu Ülikooli Teaduskool

1 Sissejuhatus

Käesolev õppevahend on mõeldud täiendamaks gümnaasiumi füüsikaõpikuid. Osa materjali on esitatud kõrgema matemaatika elemente kasutades ja seetõttu ei ole ehk kõigile täiesti arusaadavad. Sellest ärge laske ennast segada, jätke need kohad (valemite tuletamised) lihtsalt vahele. See ei takista neid valemeid kasutamast. Nende tuletamisega võite tutvuda kunagi hiljem, siis kui tuletise võtmine selge on.

Kogu siin toodud õppematerjal on kasutatav igasuguste võnkumiste ja lainete korral. Ei ole oluline, kas on tegemist mehaaniliste või elektriliste võnkumistega, samuti pole oluline, kas vaatleme pinna-, heli- või valguslaineid.

Võnkumised ja lained on mõlemad perioodilised protsessid, mis on omavahel tihedalt seotud. Isegi neid kirjeldavad võrrandid on sarnased. Kuid nad ei ole siiski üks ja sama nähtus. Erinevus seisneb selles, et võnkumised toimuvad ühes kindlas ruumipiirkonnas, aga lained levivad ruumis edasi. Mõlemad liikumisvormid on laialt levinud ja nende tundmine on oluline. Lainetena levivad nii valgus kui heli, võnkumised on aluseks raadiotehnikale ja ajamõõtmisele. Kuna lained saavad alguse laineallika võnkumistest, siis alustame meiegi võnkumistest.

2 Harmooniline võnkumine

Võnkumised ümbritsevad meid kõikjal. Võnguvad puuladvad tuules, kellapendel, helihark, pillikeel, auto konarikul teel, laev merel, elektrilaengud võnkeringis, aatomid kristallvõres jne.

Kõiki neid võnkumisi saab kirjeldada, kui tunneme lihtsaimat võnkumist: vedru otsa kinnitatud keha võnkumist. Oletame, et kaalutu vedru paikneb horisontaalsel laual. Selle üks ots on jäigalt kinnitatud, teises asub koormis massiga m, mis liigub laual hõõrdevabalt. Liikumise kirjeldamiseks valime x-telje piki lauapinda võnkumiste sihis. Kui vedru ei ole välja venitatud ega kokku surutud, asub koormis nn. tasakaaluasendis (vt. joon. 1a).

Selles asendis olgu $x = 0$. Kui vedru näiteks venitada, siis vedru mõjub koormisele jõuga, mis püüab teda tasakaaluasendisse tagasi viia. Sama juhtub ka kokkusurumisel. Seda jõudu nimetatakse *taastavaks jõuks*. Vedru korral on taastav jõud elastsusjõud:

$$\vec{F} = -k\vec{x},$$

ehk

$$F_x = -kx, \tag{1}$$

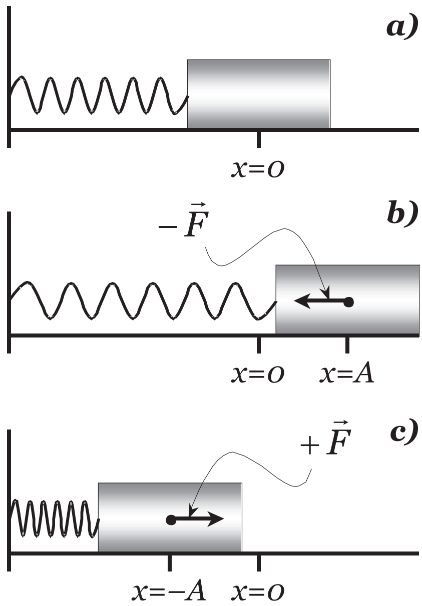
kus k on vedrut iseloomustav *jäikustegur*. Miinusmärk tähendab, et taastav jõud $\vec{F}$ on alati suunatud vastupidiselt nihkele $\vec{x}$.

NB! Indeks x jõu tähise juures valemis (1) rõhutab, et tegemist on vektori komponendiga, mitte mooduliga. Erinevalt moodulist võib vektori komponent olla ka negatiivne.

Valem (1) kehtib seni, kuni vedru pole nii tugevalt kokku surutud, et keerud kokku puutuvad või nii pikalt välja venitatud, et ületatakse elastsuspiir.

Näiteks, kui valime x-telje suuna vasakult paremale, siis väljavenitamisel on nihe positiivne, kuid taastav jõud on negatiivse suunaga (joon. 1b).

Kui vedru kokku suruda, on nihe negatiivne, kuid jõud on positiivse suunaga (joon. 1c).



Joonis 1: Nihe, amplituud ja taastav jõud

Kui vedru välja venitada nii, et $x = A$ ja ta siis lahti lasta, hakkab koormis jõu F mõjul liikuma kiirenevalt vasakule.

Kui koormis on jõudnud tasakaaluasendisse, on liikumiskiirus maksimaalne ja koormis liigub tasakaaluasendist läbi, vasakule. Seal hakkab vedru elastsusjõud liikumist pidurdama.

Jõudnud punkti $x = -A$, koormis peatub hetkeks ja hakkab liikuma paremale. Nii tekibki koormise võnkumine kahe äärmusliku asendi $x = A$ ja $x = -A$ vahel. Suurimat kaugust tasakaaluasendist (maksimaalset nihet ehk hälvet) nimetatakse *amplituudiks* A.

Tekkinud võnkumisi kirjeldatakse perioodi T ja sageduse f abil. *Periood* on aeg, mis kulub ühe täisvõnke tegemiseks (näiteks koormise liikumiseks punktist $x = A$ punkti $x = -A$ ja tagasi. Perioodi mõõdetakse sekundeis. Sagedus f näitab täisvõngete arvu 1 sekundis. Sagedust mõõdetakse hertsides (Hz):

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ täisvõnge sekundis.}$$

Kõik ülaltoodu kehtib ka vertikaalse vedru korral, kui tasakaaluasendiks valida koht, kus raskusjõud tasakaalustab vedru elastsusjõu. See on asend, milles koormis ripub vedru otsas kui ta ei võngu. Selliseid võnkumisi, kus taastav jõud on võrdeline hälbega, nimetatakse *harmoonilisteks võnkumisteks* ja sellist süsteemi *harmooniliseks ostsillaatoriks*.

Teeme nüüd kindlaks, kuidas oleneb nihe x ajast, ehk leiame võnkumist kirjeldava võrrandi.

Lähtume Newtoni II seadusest

$$F = ma,$$

Keha kiirendus on võrdne koordinaadi teise tuletisega aja järgi, seega

$$a = \frac{d^2x}{dt^2},$$

ja

$$F = m\,\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Arvestades valemit (1), saame

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{2}$$

Võrrandit (2) nimetatakse *harmoonilise ostsillatori liikumisvõrrandiks*. See on diferentsiaalvõrrand. Selle võrrandi lahend määrab ära, kuidas võnkuva keha hälve oleneb ajast. Diferentsiaalvõrrandit me veel lahendada ei oska, sellepärast võtame lahendi ette ja kontrollime, kas see rahuldab võrrandit (2). Lahendiks on siinus- või koosinusfunktsioon

$$x = A\sin\omega t, \tag{3}$$

või

$$x = A\cos\omega t, \tag{4}$$

kus

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Siinus- või koosinusfunktsiooni argumenti ωt nimetatakse *võnkefaasiks*. See määrabki, millises võnkeolekus keha on, st kui kaugel tasakaaluasendist keha asub.

Kontrollime, kas meie oletused olid õiged. Selleks leiame d^2x/dt^2 ja võrdleme seda võrrandiga (2). Võtame lahendi kujul (3) ja leiame x esimese ja teise tuletise aja järgi:

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t$$

ja

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x = -\frac{k}{m}\, x.$$

Siit saame, et

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\, x = 0,$$

mis ongi võrrand (2). Järelikult on siinusfunktsioon liikumisvõrrandi lahendiks.

Sama saab näidata ka koosinusfunktsiooni jaoks. See, millist kuju kasutada oleneb algtingimusest. Kui võnkumisi hakatakse jälgima hetkel, mil koormis on asendis $x = A$, siis on liikumisvõrrandiks $x = A\cos \omega t$. Kui alghetkel on koormis asendis $x = 0$, siis on liikumisvõrrandiks $x = A \sin \omega t$.

Kumba võrrandit kasutada, ei ole tähtis, sest nii siinus- kui koosinusfunktsiooni kirjeldab ühesugune graafik. Nende vahel on ainult kindel faasinihe $-\pi/2$, sest

$$\cos(\omega t - \pi/2) = \sin \omega t.$$

Neid mõlemaid funktsioone nimetatakse ka *harmoonilisteks funktsioonideks*. Suurust ω nimetatakse võnkumise *nurk-* ehk *ringsageduseks*. Nurksagedus ω on analoogne suurus nurkkiirusega. Ka nüüd kehtivad seosed

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

3 Harmoonilise ostsillaatori energia

Paljude probleemide korral on tarvis teada, millist energiat omab võnkuv keha. Kõige lihtsam on seda teha harmoonilise ostsillaatori jaoks, seda enam, et saadud tulemust saab kasutada ka teistel juhtudel.

Meil on harmooniliseks ostsillaatoriks ikka vedru otsa kinnitatud koormis massiga m. Sellise keha koguenergia E koosneb keha potentsiaalsest energiast E_p, mille annab talle vedru ja kineetilisest energiast E_k, mis on kehal tänu liikumisele:

$$E = E_p + E_k.$$

Kuidas leida võnkuva keha potentsiaalset energiat? Nagu öeldud, on see võrdne vedru potentsiaalse energiaga. Vedru potentsiaalne energia on võrdne tööga, mida tuleb teha, et seda pikendada (või lühendada) suuruse x võrra:

$$E_p = Fx.$$

Kuid jõud F oleneb omakorda x väärtusest (vt. valem 1). Seega tuleb meil E_p leidmisel arvestada jõu F keskmist väärtust $\bar{F}$.

Selle leiame, liites jõu algväärtuse (kui $x = 0$) ja lõppväärtuse ($x = X$) ja jagades tulemuse kahega

$$\bar{F} = \frac{k \cdot 0 + kX}{2} = \frac{kX}{2}.$$

Siit saame, et

$$E_p = \bar{F}X = \frac{kX^2}{2}.$$

Keha kineetiline energia on ikka

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Nüüd on meil kõik vajalikud lähteandmed koguenergia leidmiseks olemas, tuleb ainult avaldada k ja v harmoonilist võnkumist kirjeldavate suuruste kaudu. Eelnevast teame, et $k = m\omega^2$ ja $x = A \sin \omega t$, seega

$$E_p = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t}{2}. \tag{5}$$

Keha kiiruse leiame kui selle koordinaadi tuletise aja järgi:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t.$$

Seega kineetiline energia

$$E_k = \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t}{2}. \tag{6}$$

ja võnkuva keha koguenergia

$$E_k = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \tag{7}$$

Siit on näha, et harmoonilise ostsillaatori energia on võrdeline selle massi, nurksageduse ruudu ja amplituudi ruuduga.

Lõpetades ülevaadet harmoonilistest võnkumistest, märgime veel järgmist. Saadud tulemused kehtivad igasuguste võnkumiste korral, kui taastav jõud on võrdeline hälbega.

Sellisteks võib aga lugeda igasuguseid võnkumisi kui võnkeamplituud on väike. Harmooniliseks võib lugeda nii matemaatilise pendli, kui elektroni võnkumist võnkeringis, nii pillikeele kui iooni võnkumist võresõlmes. Harmooniliselt võnguvad ka elektri- ja magnetväli valguslaines.

4 Matemaatiline pendel

Matemaatiliseks pendliks nimetatakse kaalutu ja venimatu niidi otsa riputatud punktmassi (vt. joon. 2). Leiame, millise jõu mõjul selline pendel võngub. Punktmassile m mõjub raskusjõud, mille üks komponent püüab keha viia tasakaaluasendi poole. Selle suuruse F saab leida, kui on teada pendli nurkhälve α:

Väikeste hälvete x korral

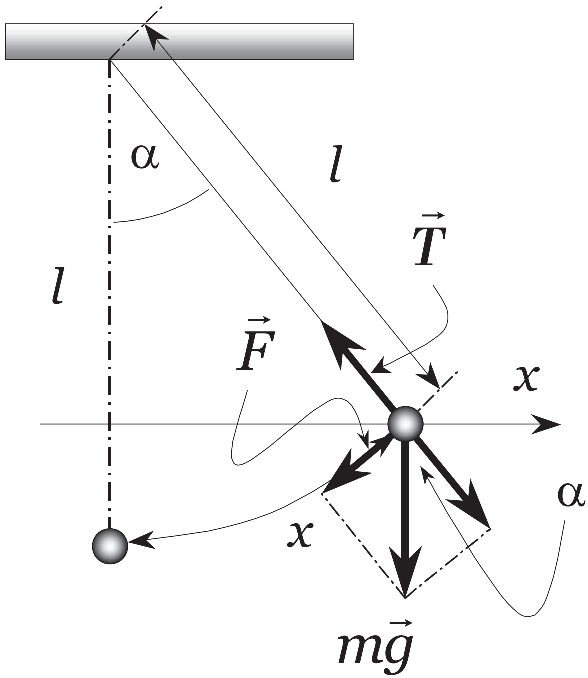
$$x = \alpha l$$

seega

$$F = -\frac{mgx}{l}.$$

Saadud valemist on näha, et keha tasakaaluasendisse viiv jõud

$$F \sim -x,$$



Joonis 2: Matemaatilisele pendlile mõjuvad jõud

seega on tegemist harmooniliste võnkumistega. Võrdeteguriks k on nüüd mg/l. See lubab leida matemaatilise pendli võnkeperioodi T:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{8}$$

Siit paistab, et matemaatilise pendli võnkeperiood ei sõltu pendli massist. Kui asja veel täpsemalt uurida, siis ka teistsuguste pendlite võnkeperiood ei sõltu nende massist. Periood on määratud pendli pikkusega. Küll oleneb matemaatilise pendli periood selle võnkeamplituudist, täpsemalt küll hälbenurgast α:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \cdots \right). \quad (9)$$

Reaalsete pendlite, st. igasuguste rippuvate kehade (nn. *füüsikaliste pendlite*) perioode tuleb arvutada keerulisemate valemitega, mis arvestavad kehade inertsmomente. Kuid lohutuseks võib öelda, et kuigi me seda ei oska teha, võib matemaatilise pendli valemit kasutada pea igasuguste pendlite korral, tehtav viga ei ületa paarikümmet protsenti.

5 Harmoonilised lained

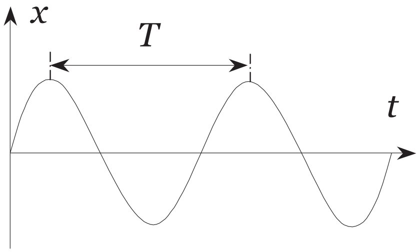
Kui me asetame vedru otsas võnkuva koormise vette, siis tekivad veepinnal lained. Need levivad mööda veepinda võnkuvast kehast eemale. Seda võnkuvat keha (koormist) nimetatakse *laineallikaks.* Lained tekivad sellepärast, et laineallikas paneb endaga koos liikuma ka tema külge kleepunud veeosakesed. Need omakorda panevad tänu molekulidevahelistele jõududele võnkuma oma naaberosakesed ja nii üha edasi. Võnkeallikaga samas taktis võnkuvad veeosakesed tekitavad veepinnal laine. *Laine* on võnkumiste levimine. Kui võnkeallikas võngub harmooniliselt, siis on ka tekkiv laine harmooniline, ehk teisiti öeldes, laine profiiliks on sinusoid.

Laine saab tekitada näiteks ühest otsast kinnitatud kumminööris, kui seda teisest otsast üles-alla võngutada. See laine ei pruugi olla harmooniline, sest meie käsi ei liigu siinusfunktsiooni järgi.

Laineid saab tekitada ka gaasis, näiteks õhus. Laineallikaks on sel juhul heliallikas, mis paneb õhuosakesed võnkuma. Tekkivad õhu tiheduse muutused hakkavad ruumis levima lainena. Kui heliallikas võngub harmooniliselt, siis on ka tekkiv laine harmooniline.

Seda võib jälgida, kui pillikeele poolt tekitatud heli püüda kinni mikrofoniga ja tekkinud signaal suunata ostsilloskoopi.

Harmoonilise lainega saab kirjeldada ka valgust. Valguslaines muutuvad sinusoidaalselt nii elektri kui magnetväli. Nende võnkumised toimuvad teineteisega ristsuundades ja kanduvad ruumis edasi, moodustades valguslaine.



Joonis 3: Laine periood

Kas igasugune lainetus on füüsikalises mõttes laine? Näiteks, kas viljapõllu lainetamine tuule käes või spordisõprade perioodiline püstitõusmine staadionitribüünil on laine? Ei ole, sest laine põhitunnuseks on energia edasikandmine. Näiteks helilaine kannab edasi helienergiat (muidu me ei kuuleks heli), valguslaine kannab edasi valgusenergiat (muidu me ei näeks valgust). Rukkikõrte lainetamine ja spordisõprade hüplemine ei kanna edasi tuule energiat ega püstitõusmisele ja istumisele kuluvat energiat. Rukkikõrs ja spordisõber on oma naabrist sõltumatu. Kooskõlastatud liikumine tekib sellepärast, et neile mõjuvad ühesugused põhjused (tuul põllul) või kokkulepe (kui naaber tõuseb, tuleb ka minul tõusma hakata).

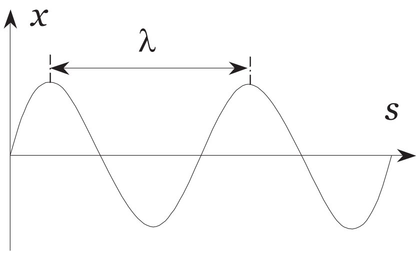
Lained on perioodilised nii ajas kui ruumis (seda me siin ei tõesta). Järelikult saab kirjeldada harmoonilist lainet kahesuguste graafikutega. Ühel juhul antakse lainetava keskkona mingi kindla punkti asukoha muutus aja jooksul (vt. joon. 3).

Sellise graafiku saaksime veelainete puhul, kui mõõdaksime veekogu põhja löödud mõõdulati abil veetaseme kõrgust iga natukese aja järel.

Teisel juhul antakse laine kuju ruumis ühel kindlal ajahetkel (vt. joon. 4). Graafikul tähistab s vaadeldava punkti kaugust lainеallikast. Sellise graafiku saaksime siis kui pildistaksime veelainet välklambiga.

Aega, mille jooksul laine teeb ühe täisvõnke nimetatakse laine *perioodiks*. Nagu võnkumiste korralgi tähistatakse seda T.

Teepikkust, mille laine läbib ühe perioodi vältel, nimetatakse *lainepikkuseks* ja seda tähistatakse λ.

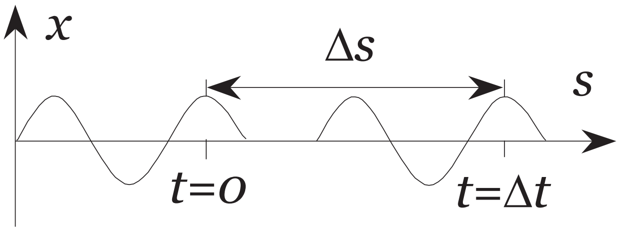


Joonis 4: Lainepikkus

Lainete omaduste mõistmiseks peab oskama neid matemaatiliselt kirjeldada. See on kõige lihtsam harmoonilise laine korral. Kõiki teisi laineid saab esitada erinevate harmooniliste lainete summana, milledel on täisarv kordi erinevad sagedused ja sobivalt valitud amplituudid.

6 Harmoonilise laine võrrand

Vaatleme harmoonilist lainet, mis levib mingis suunas s (vt. joon. 5). Kuidas kirjeldada laine liikumist, mis oleneb nii kaugusest laineallikast kui ka laine levimise ajast? Tuleb leida seos, mis kirjeldab võnkuva punkti hälvet tasakaaluasendist olenevalt kaugusest ja ajast. Sellist seost nimetatakse *lainevõrrandiks*.



Joonis 5: Lainevõrrandi tuletamine

Laine liikumise kirjeldamiseks tuleb valida mingi laine punkt ja jälgida selle liikumist. Tavaliselt valitakse selleks mõni lainele väga iseloomulik punkt, näiteks lainehari. Nüüd saame määrata laine levimiskiiruse. Selleks teeme kindlaks, millise teepikkuse see punkt, lainehari, läbib ajaühikus. Kui lainehari läbib aja Δt vältel teepikkuse Δs, siis laine kiirus $v = \Delta s/\Delta t$. Kui ajavahemik $t = T$, siis $s = \lambda$, ja saame, et

$$v = \lambda/T \tag{10}$$

ehk

$$v = \lambda f \tag{11}$$

Tuleme tagasi selle ”kindla” lainepunkti juurde. Lihtne on öelda, et valime kindla punkti ja jälgime selle liikumist, aga kuidas seda teha? Seda tehakse nii, et jälgitakse jääva faasiga punkti liikumist, ehk teisiti öelduna, jälgime mingi punkti liikumist, mis on kogu aeg tasakaalu asendist ühel kaugusel (näiteks lainehari).

Lainet põhjustab võnkeallika võnkumine. Seda kirjeldab võrrand $x = A \sin \omega t$. Keskkonna mingi punkt, mis on laineallikast kaugusel s, hakkab võnkuma hiljem kui laineallikas, sest lainel kulub teatav aeg sinna punkti jõudmiseks. Hilinemine on võrdne ajaga, mis lainel kulub vahemaa s läbimiseks. See aeg $t = s/v$. Selleks, et võnkefaas oleks jääv tuleb võnkumise võrrandis võtta aja asemele suurus $t - s/v$. Sel juhul aja kasvades suureneb ka s ja vahe $t - s/v$ jääb muutumatuks, st jääb muutumatuks ka faas.

Seega lainevõrrand on

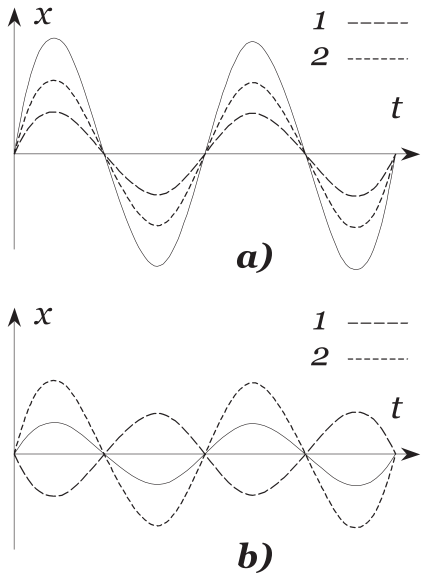
$$x = A \sin \omega \, (t - s/v). \tag{12}$$

7 Lainete interferents

Siiani vaatlesime ühe laine levimist. Kuid mis juhtub siis, kui keskkonnas levib mitu lainet ja nende levimissuunad lõikuvad? Sel juhul liituvad kahe laine poolt tekitatud keskkonna võnkumised. Keskkonnaosakeste summaarne nihe tasakaaluasendist on sel juhul võrdne nende nihete summaga, mis tekkisid ühe laine levimisel ilma teise laineta. Kahe või ka mitme laine liitumist, mille puhul tekib ajas muutumatu amplituudi jaotus, nimetatakse *interferentsiks*.

Joonisel 6 on näidatud, kuidas võivad mingis ruumipunktis liituda kaks samas suunas levivat lainet. Ühel juhul (joon. 6a), on tegemist samas taktis levivate lainetega, st et lainete harjad ja põhjad jõuavad antud punkti samaaegselt. Selle tulemusena tekib liitlaine, mille amplituud on võrdne liituvate lainete amplituudide summaga.

Teisel juhul (joon. 6b), on lained vastastaktis, st et antud ruumipunkti jõuavad samaaegselt ühe laine hari ja teise põhi. Nüüd on liitlaine amplituud võrdne liituvate lainete amplituudide vahega.

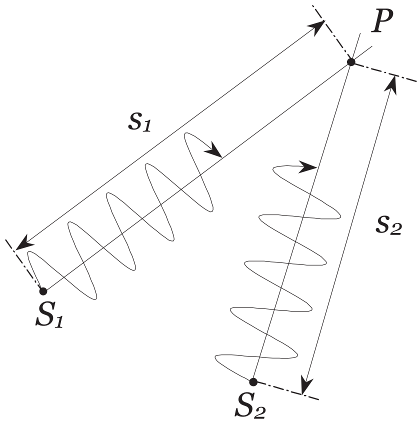


Joonis 6: Lainete liitmine

Esimesel juhul räägitakse interferentsi maksimumist, teisel miinimumist.

Loomulikult ei esine lainete liitumisel ainult need kaks võimalust. Võimalusi on lõpmata palju, kõik oleneb liituvate lainete faaside vahest, sest just faas määrab ära, kui kaugel tasakaaluasendist võnkuv osake on. Samas faasis olevad lained tugevdavad liitumisel teineteist, vastasfaasis olevad lained aga nõrgendavad.

Vaatleme kahte lainet, mis väljuvad laineallikaist S_1 ja S_2 ning liituvad punktis P (vt. joon. 7). Füüsikas öeldakse sel puhul, et punktis P interfereeruvad kaks lainet. Nagu öeldud, on interferentsi tulemus määratud liituvate lainete faaside vahega. Esimese laine faas on $\omega\,(t - s_1/v)$, teise $\omega\,(t - s_2/v)$.



Joonis 7: Lainete interferents

Faaside vahe on

$$\omega\,(t - s_1/v) - \omega\,(t - s_2/v) = \\ = \frac{\omega}{v}\,(s_1 - s_2).$$

Suurus $s_1 - s_2$ näitab, kui palju erinevad teepikkused, mis lainetel on tulnud läbida liitumiskohta jõudmiseks. Seda suurust nimetatakse *käiguvaheks* ja seda tähistatakse δ.

Kui liituvate lainete allikad asuvad punkist P võrdsetel kaugustel, siis lained jõuavad liitumispunkti samas faasis ja tugevdavad teineteist. Tekib interferentsi maksimum. Sel juhul on $\delta = 0$. Kui üks laineallikas asub P-st kaugemal kui teine just täpselt ühe lainepikkuse võrra, ka siis jõuavad lained liitumispunkti samas faasis ja tekib jälle interferentsi maksimum. Sel juhul on $\delta = \lambda$. Liituvad lained tugevdavad teineteist alati, kui laineallikate kauguste erinevus liitumispunktist on võrdne lainepikkuse täisarvkordse vahemaaga. Seega interferentsi maksimumi tingimus on:

$$\delta = k\lambda, \tag{13}$$

kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Kui laineallikate kaugus punktist P erineb aga $\lambda/2$ võrra, siis jõuavad lained liitumispunkti vastasfaasis ja tekib interferentsi miinimum. Nii on alati, kui läbitud teepikkuste erinevus on võrdne poole lainepikkuse täisarvkordse vahemaaga. Interferentsi miinimumi tingimus on:

$$\delta = (2k + 1)\,\frac{\lambda}{2}, \tag{14}$$

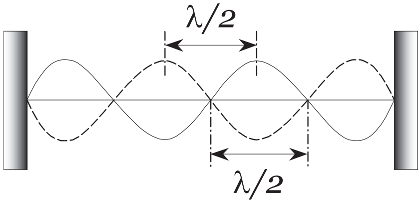
kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Kui lained liituvad kohas, kus pole täidetud maksimumi või miinimumi tingimus, interfereeruvad lained ikkagi. Neil juhtudel on liitumise tulemus maksimumi ja miinimumi vahepealne.

Lõpuks küsime, kas igasugused lained interfereeruvad? Kindlasti, kuid kui lained on erineva lainepikkusega ja nende faaside vahe muutub ajas, siis muutub ka liitlaine amplituud pidevalt. See raskendab või teeb päris võimatuks interferentsi jälgimise. Püsiva interferentspildi tekkimiseks peavad liituvatel lainetel olema võrdsed lainepikkused ja lainete faaside vahe ei tohi ajas muutuda. Selliseid laineid nimetatakse *koherentseteks*.

8 Seisulaine

Vaatleme lainet, mis levib pinguletõmmatud kummipaelas, mis on mõlemast otsast kinnitatud (vt. joon. 8).



Joonis 8: Seisulaine tekkimine

Vasakult paremale levivat lainet kirjeldab võrrand

$$x_1 = A \sin \omega\ (t - s/v).$$

Kui see laine jõuab kinnituskohani, siis ta peegeldub sealt tagasi ja hakkab levima paremalt vasakule. Seda lainet kirjeldab võrrand

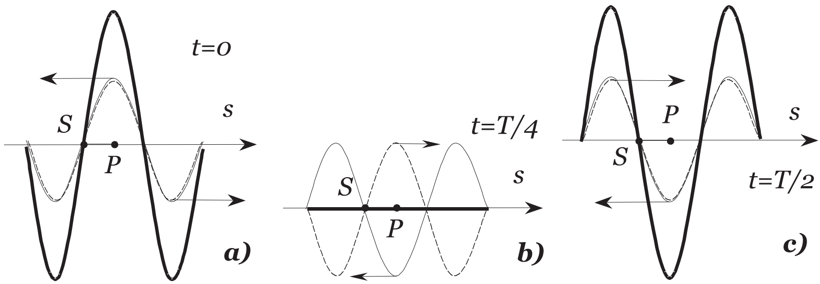
$$x_2 = A \sin \omega\ (t + s/v),$$

kusjuures peegeldunud laine on langeva lainega vastasfaasis. Jõudnud teise kinnituskohani, peegeldub laine uuesti ja hakkab jälle liikuma paremale. Seega levib paelas korraga kaks vastassuundades levivat lainet. Need lained on koherentsed, seepärast nad interfereeruvad. Liitlaine võrrand on

$$x = x_1 + x_2 = A' \sin \omega t,$$

kus

$$a' = 2A\cos\frac{2\pi s}{\lambda}.$$



Joonis 9: Seisulaine paisud ja sõlmed

Sellist liitlainet nimetatakse *seisulaineks*, sest ta püsib ruumis paigal. Vaatleme lähemalt seisulaine tekkimist. Joonisel 9a on näidatud kahte vastassuundades levivat lainet, mis aja hetkel $t = 0$ on samas faasis. Sel juhul on punktis S mõlema laine hälve võrdne nulliga, st $x_1 = x_2 = 0$, seega ka liitlaine hälve $x = 0$. Punktis P seevastu on mõlema laine hälve maksimaalne $x_1 = x_2 = A$ ja liitlaine hälve $x = 2A$.

Joonisel 9b on näidatud olukord veerand perioodi hiljem. Selle ajaga on lained nihkunud vastassuundades ja kumbki veerand lainepikkuse võrra oma esialgsest asendist. Seega on lained nüüd vastasfaasides ja kustutavad teineteist täielikult.

Joonisel 9c on näidatud olukord veel üks veerandperiood hiljem. Nüüd on lained jälle samas faasis ja liitlaine hälve

$$x = -2A.$$

Seega punktis S pael ei võngu üldse ja öeldakse, et selles punktis on seisulaine *sõlm*. Punktis P võngub pael maksimaalse amplituudiga ja öeldakse, et selles punktis on seisulaine *pais*.

Kui paela vasakpoolses kinnituskohas $s = 0$, siis sõlmed asuvad kohtades, kus

$$s = \frac{k\lambda}{2}, \text{ kus } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Paisud asuvad kohtades, kus

$$s = k + \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{2}, \text{ kus } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Siit on näha, et kahe naabersõlme või naaberpaisu vahekaugus on $\lambda/2$.

Ülaltoodust saab selgeks, et kahest otsast kinnitatud paelas (keeles) ei saa tekkida suvaline seisulaine. Kuna kinnituskohtades keel ei saa võnkuda, siis seal paiknevad seisulaine sõlmed ja keeles saavad tekkida ainult niisugused lained, mille poollaine pikkus mahub keele pikkusele täisarv kordi. Siit järeldub tingimus:

$$s = \frac{k\lambda}{2},$$

kus s on nüüd keele pikkus ja $k = 0, 1, 2, \ldots$. Järelikult pingutatud keeles saavad tekkida seisulained, mille sagedus on määratud seosega

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{kv}{2s}, \tag{17}$$

kus v on heli kiirus keeles.

Sagedust, mille korral $k = 1$, nimetatakse *põhisageduseks*.

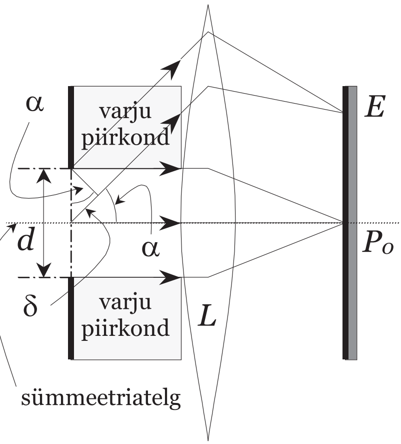
Sagedusi, mis vastavad k suurematele väärtustele nimetatakse *ülemtoonideks*. Keele võnkumised kujutavad endast tavaliselt mitme erineva sagedusega seisulaine summat. Nii on see pillikeeltes ja ka puhkpillides võnkuvates õhusammastes.

9 Difraktsioon

Kõik eeltoodu kehtib igasuguste harmooniliste lainete korral, järelikult ka valgus- ja helilainete korral. Järgnevalt vaatame difraktsiooninähtust valguslainete puhul. Difraktsioon seisneb lainete kandumises tõkete taha. Valguse korral saab seda jälgida, kui lõikame žiletiga musta paberi sisse pilu ja vaatame läbi selle mõnda kauget valgusallikat. Paberitükki tuleb hoida silmale lähedal. Nüüd näeme, et kahele poole pilu tekivad piluga paralleelsed heledad ribad. Seega valgus kandub tõepoolest tõkke (pilu serva) taha, varju piirkonda.

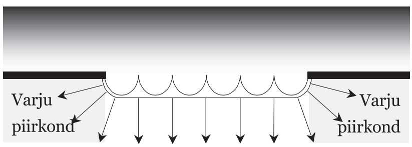
Nähtuse seletamisel kasutame lainete kirjeldamiseks lainefronte ja nende ristsirgeid ehk kiiri. Tuletame meelde, et *lainefrondiks* nimetatakse pinda, mis eraldab laine poolt häiritud ruumi osa sellest ruumist, kuhu laine pole veel jõudnud. Laineid liigitatakse nende kuju järgi *tasalaineteks* ja *keralaineteks*. Joonistel kujutatakse tasalainet sirge ja keralainet ringjoone abil. Lainefrondi ristsirge, kiir, näitab laine levimissuunda. Tasalainele vastab paralleelne kiirtekimp, keralainele hajuv. Vaatleme kuidas seletatakse valguse sattumist varju piirkonda.

Langegu pilule laiusega d monokromaatne tasalaine lainepikkusega λ, (joon. 10). Difraktsiooni jälgimiseks kasutatakse läätse L ja ekraani E. Kui me vaatlesime difraktsiooni läbi mustas paberis oleva pilu, oli läätse L asemel silmalääts ja ekraani asemel silma võrkkest.



Joonis 10: Difraktsioon pilul

Kui valguslaine front jõuab piluni, saavad kõik pilu tasandis olevad punktid laineallikaiks, kust kiirguvad elementaarlained (Huygensi printsiip). Need lained on keralained, kusjuures võnkumised neis toimuvad kõik ühes faasis, sest tegemist on ühe ja sama lainefrondi punktidega. Keralained levivad igas suunas.



Joonis 11: Lainefrondi laienemine varju piirkonda

Seega pilu servades olevaist punktidest levib valgus ka varju piirkonda (joon. 11).

Difraktsioonipildis tekkivad heledad ja tumedad ribad on tingitud valguslainete liitumisest. Sümmeetriateljel olevasse punkti P_0

jõudmiseks läbivad kõik pilu tasandist lähtuvad valguslained ühesuguse teepikkuse ja sellepärast tekib seal maksimum. Mis juhtub aga lainetega, mis levivad sümmeetriatelje suhtes mingi nurga all? Valime sellise suuna, et käiguvahe pilu ülaservast ja keskelt lähtunud lainete vahel oleks

$$\delta = \lambda/2. \tag{18}$$

Need lained jõuavad ekraanile vastasfaasis ja kustutavad teineteist. Milline on käiguvahe mingi teise lainete paari jaoks, mille allikad asuvad teineteisest kaugusel $d/2$? Ikka sama suur. Järelikult igale lainele, mis väljub pilu ülemisest poolest vastab mingi teine laine pilu alumisest poolest, mis on eelmisega vastasfaasis. Seega selles suunas lained kustutavad üksteist ja difraktsioonipildis tekib miinimum.

Joniselt 10 on näha, et käiguvahe δ avaldub kui

$$\delta = \frac{d}{2}\,\sin\alpha.$$

Nüüd saame tingimuse (18) asemel

$$\frac{d}{2}\,\sin\alpha = \frac{\lambda}{2}$$

ehk

$$d\sin\alpha = \lambda.$$

Miinimumid tekivad ka siis, kui

$$\delta = \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots$$

Seega miinimumi tingimus on

$$d \sin \alpha = k\lambda, \tag{19}$$

kus $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Sarnasel viisil saab näidata, et maksimumid tekivad kohtades, mille asukoht on määratud tingimusega

$$d \sin \alpha = (2k+1)\,\frac{\lambda}{2}\,, \tag{20}$$

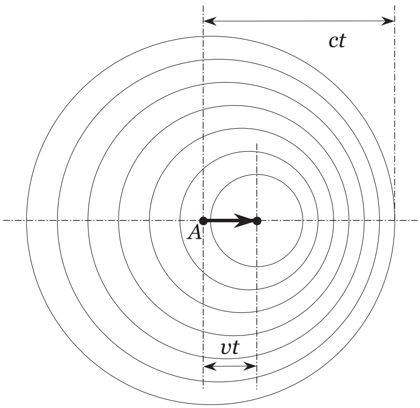
kus $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

NB! Kahe laine interferentsi maksimumi ja ühest pilust väljuvate lainete difraktsiooni miinimumi tingimused on sarnased, seepärast tuleb valemite kasutamisel olla tähelepanelik.

10 Doppleri efekt

Siiani me käsitlesime juhte, mil laineallikas on seisev. Mis aga juhtub siis, kui laineallikas liigub jälgija suhtes, näiteks kui meile läheneb võidusõiduauto või mootorratas, ehk lihtsalt vilistav vedur? Heliallika lähenemisel kuuleme heli kõrguse tõusu, eemaldumisel aga selle madaldumist. See ongi Doppleri efekti ilming. Tegemist on nähtusega, millele andis seletuse austria füüsik C. Doppler 1842. a.

Nähtuse seletamiseks vaatleme olukorda, kus heliallikas asub punktis A ja kiirgab helilaineid sagedusega f_0, mis levivad keskkonnas



Joonis 12: Doppleri effekt

kiirusega c. Hakaku nüüd laineallikas liikuma paremale kiirusega v. Mingi aja t jooksul on allikas teinud $f_0 t$ täisvõnget, sest ühes sekundis tehakse f_0 täisvõnget. Punktist A kiiratud laine on aja t vältel läbinud teepikkuse ct (vt. joon. 12), allikas aga teepikkuse vt. Seega kõik lained, mis on kiirgunud aja t jooksul mahuvad vahemikku $ct - vt$. Lainepikkuse saame leida, kui jagame laine poolt läbitud vahemaa täisvõngete arvuga. Saame

$$\lambda = \frac{ct - vt}{f_0 t} = \frac{c - v}{f_0} \tag{21}$$

Saadud seose võib teisendada kujule

$$f = \frac{f_0}{1 - v/c}. \tag{22}$$

Siit on näha, et allika kiiruse v kasvades kasvab ka sagedus.

Kui vaadata laine levimist allika liikumise vastassuunas, siis saame, et

$$f = \frac{f_0}{1 + v/c}.$$

See tähendab, et allika liikumise vastassuunas sagedus väheneb.

11 Küsimusi ja ülesandeid

1. Võnkumine toimub seaduse $x = 20 \sin 40t$ järgi (SI ühikud). Leidke võnkeamplituud ja periood.

2. Üht võnkumist kirjeldab võrrand $x = 10 \sin (20t + \pi/2)$, teist aga $x = 20 \cos 40t$ (SI ühikud). Mida võib öelda nende võnkumiste faaside vahe kohta? Kas on see ajas konstantne?

3. Näidata, et koosinusfunktsioon on harmoonilise ostsillaatori liikumisvõrrandi lahend.

4. Miks võrrandi (5) tuletamisel ei ole arvestatud elastsusjõu avaldises "-" märki?

5. Tuletada võrrandeist (5) ja (6) võrrand (7).

6. Kui laine amplituud väheneb 2 korda, mitu korda muutub laine energia?

7. Matemaatiline pendel, mille mass on 20 g ja pikkus 80 cm, võngub amplituudiga 3 cm. Leida pendli koguenergia.

8. Kuidas on leitud avaldis (8) matemaatilise pendli võnkeperioodi jaoks?

9. Kui palju erinevad ühe ja sama matemaatilise pendli võnkeperioodid väikeste nurkhälvete ja 30° nurkhälbe korral?

10. Teisendage lainevõrrand kujule $x = A \sin 2\pi(t/T - s/\lambda)$.

11. Kui suur lainepikkus on elektromagnetlainel, mida tekitab vahelduvvool sagedusega 50 Hz?

12. Miks s-telje suunas leviva laine faas on $\omega\ (t - s/v)$, aga vastassuunas $\omega\ (t + s/v)$?

13. Kuidas leitakse seos (17)?

14. Pilule laiusega 0,1 mm langeb valgus, mille lainepikkus on 500 nm. Kas sümmeetriatelje suhtes 30° nurga all tekib difraktsiooni miinimum või maksimum?

15. Leida heli kiirus teraskeeles, kui sellel on tekkinud kaks paisu. Keele võnkesagedus on 5000 Hz ja pikkus 1 m.

16. Milliste teisenduste abil leitakse Doppleri efekti kirjeldav valem (22)?

17. Kuidas saadakse avaldis laineallika levimissuunaga vastassuunas leviva heli sageduse jaoks?

18. Millise kiirusega peaks heliallikas meist mööduma, et möödumise hetkel tekiks kõrguste vahe 1 oktaav?

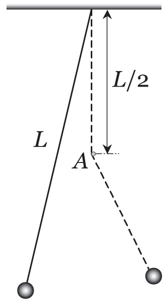
19. Matemaatilise pendli võnkeamplituud on x_m. Aja $t < T/4$ möödumisel võnkumiste algusest oli pendli nihe tasakaaluasendist $0{,}5x_m$. Leidke pendli niidi pikkus, ning niidil rippuva keha kiirus ja kiirendus ajahetkel t. Alghetkel oli pendel tasakaaluasendis.

20. Liftis asuv pendel teeb ühe täisvõnke 1 sekundi jooksul. Kui suure kiirendusega ja kuhu poole peab liikuma lift, et see pendel teeks 2 min 30 s jooksul 100 võnget?

21. Raketis asub matemaatiline pendel. Pendel viidi horisontaalasendisse ja lasti lahti. Hetkel, kui pendel oli jõudnud tasakaalu asendisse startis rakett vertikaalselt. Selle tagajärjel vähenes pendli amplituudväärtusele vastav kõrvalekalle vertikaalsihist $\alpha = 45°$-ni. Leida raketi kiirendus.

22. Mööda jõge liikuv laev annab helisignaali sagedusega $f_0 = 400$ Hz. Vaatleja kaldal kuuleb signaali kui helilainet sagedusega $f_1 = 395$ Hz. Missuguse kiirusega liigub laev? Kas ta läheneb või eemaldub vaatlejast? Heli kiirus õhus on $c = 340$ m/s.

23. Matemaatiline pendel pikkusega l võngub vertikaalse seina lähedusel. Pendli kinnituskoha all kaugusel $l/2$ on seina löödud nael (vt. joonist). Leida pendli võnkeperiood.



24. Kaks vedru jäikustega vastavalt k_1 ja k_2 on ühendatud üks kord jadamisi, teine kord rööbiti. Mitu korda erinevad ühe ja sama keha vertikaalsete võnkumiste perioodid sellistel vedrude süsteemidel?

25. Väike kuup võngub vertikaaltasandis väikse amplituudiga, liikudes hõõrdevabalt poolsfääri sisepinnal. Leida kuubi võnkeperiood, kui poolsfäär langeb alla kiirendusega $g/3$. Poolsfääri siseraadius r on kuubi küljepikkusest palju suurem.

26. Toru pikkusega $l = 1$ m on täidetud normaalrõhu all oleva õhuga. Üks kord on toru avatud ühest otsast, teine kord — mõlemast otsast ja kolmas kord suletud mõlemast otsast. Missuguste minimaalsete võnkesageduste korral tekivad torus seisvad helilained kolmel kirjeldatud juhul? Heli kiirus õhus on $c = 340$ m/s.

Kontrolltööks .... tuleb lahendada ülesanded

....

Tähtaeg ....

12 Kirjandus

1. O. Kabardin. Koolifüüsika käsiraamat. Tln., 1990.

2. I. Saveljev. Füüsika üldkursus I. Tln., 1978 (IX ja X pt).

3. H. Voolaid. Füüsika põhivara mittefüüsika erialade üliõpilastele. Mehaanika. Tartu, 1991.