3. Kolmnurga nurgapoolitaja põhiomadused

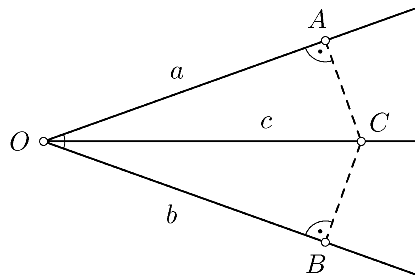
Koostanud Maksim Ivanov
TÜ Teaduskool

Nurgapoolitaja

Definitsioon 1. Antud nurga poolitajaks nimetatakse nurga tipust lähtuvat kiirt, mis paikneb nurga sisepiirkonnas ja jaotab selle kaheks võrdseks nurgaks.

Teoreem 2. *Punkt asub vaadeldava nurga poolitajal parajasti siis, kui selle punkti kaugused nurga haaradest on võrdsed.*

Tõestus. Tõestame esmalt tarvilikkuse. Olgu kiired a ja b nurga haaradeks alguspunktiga O ja kiir c selle nurga poolitajaks. Olgu C nurgapoolitaja c suvaline punkt, millest tõmbame kiirtele a ja b vastavalt kaks ristlõiku CA ja CB.



Vaatleme kahte kolmnurka CAO ja CBO. Kuna mõlemad kolmnurgad on täisnurksed ja lõik OC poolitab nurga AOB, siis ka nurgad ACO ja BCO on võrdsed. Lõik OC on vaadeldavate kolmnurkade ühine külg, kusjuures selle lähisnurgad on vastavalt võrdsed. Järelikult kolmnurgad CAO ja CBO on võrdsed tunnuse NKN põhjal. Seega on ka kolmnurkade vastavad küljed CA ja CB võrdsed.

Tõestame piisavuse. Olgu nüüd kiired a ja b nurga haaradeks alguspunktiga O ja punkt C niisugune, et selle kaugused $|CA|$ ja $|CB|$ nurga vastavatest haaradest a ja b on võrdsed. Kuna kaks täisnurkset kolmnurka on võrdsed, kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja kaatet on vastavalt võrdsed teise kolmnurga hüpotenuusi ja kaatetiga, siis täisnurksed kolmnurgad CAO ja CBO on võrdsed (hüpotenuus OC on ühine, kaatetid CA ja CB on võrdsed). Kuna võrdsetel kolmnurkadel on ka vastavad nurgad võrdsed, siis kehtib võrdus $\angle AOC = \angle BOC$. Järelikult OC on nurga AOB poolitaja.

Põhitulemused kolmnurga sisenurkade poolitajate kohta

Teoreemist 2 saame kolmnurga sisenurga poolitajate jaoks järgmise tulemuse.

Järeldus 3. *Kolmnurga küljele tõmmatud sisenurga poolitaja iga punkt asetseb kolmnurga teistest külgedest võrdsel kaugusel. Teiste sõnadega, nurgapoolitajad on kolmnurga nurkade sümmeetriateljed.*

Teoreem 4. *Kolmnurga ABC sisenurga poolitaja BB_1 jaotab nurga vastaskülje AC lõikudeks AB_1 ja B_1C, mis on võrdelised vaadeldava nurga kahe lähisküljega, st*

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{CB}{CB_1}.$$

Teoreemi tõestused. Olgu BB_1 kolmnurga ABC sisenurga poolitaja.

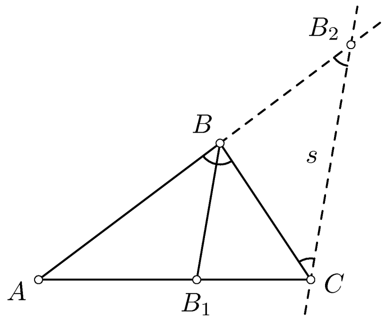
Tõestus 1 (kiirteteoreemi kasutades).

Tõmbame läbi tipu C nurgapoolitajaga BB_1 paralleelse sirge s. Olgu B_2 selle sirge s ja lõigu AB pikendamisel üle punkti B saadud kiire lõikepunkt.

Vastavalt kiirteteoreemile kehtib võrdus

$$\frac{AB_2}{AB} = \frac{AC}{AB_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AB + BB_2}{AB} = \frac{AB_1 + B_1C}{AB_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BB_2}{AB} = \frac{B_1C}{AB_1}.$$

Kuna nurgad $\angle B_1BC$ ja $\angle BCB_2$ on paralleelsete sirgete BB_1 ja B_2C lõikamisel sirgega BC tekkinud põiknurgad ja nurgad $\angle ABB_1$ ja $\angle BB_2C$ on samas kaasnurgad, saame



$$\angle BCB_2 = \angle B_1BC = \angle ABB_1 = \angle BB_2C.$$

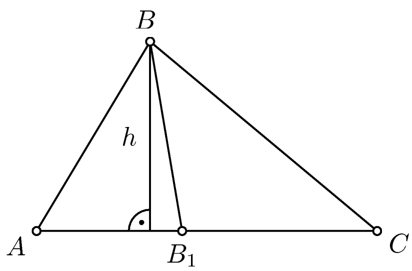
Järelikult kolmnurk CBB_2 on võrdhaarne ($\angle BCB_2 = \angle BB_2C$) ja $BC = BB_2$, kust, arvestades eelpool saadud võrdust, jõuame soovitud tulemuseni:

$$\frac{BB_2}{AB} = \frac{B_1C}{AB_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C}{AB_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AB}{AB_1} = \frac{CB}{CB_1}.$$

Tõestus 2 (pindalade kaudu).

Olgu h tipust B tõmmatud kolmnurga ABC kõrgus. Kasutades kolmnurga pindala leidmise standardseid valemeid $S = \dfrac{1}{2}ac\sin\beta$ ja $S = \dfrac{1}{2}bh_b$ kolmnurkade BB_1C ja BB_1A jaoks, saame

$$\frac{S_{\triangle BB_1C}}{S_{\triangle BB_1A}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot BB_1 \cdot BC \cdot \sin\frac{\angle ABC}{2}}{\frac{1}{2}\cdot BB_1 \cdot AB \cdot \sin\frac{\angle ABC}{2}} = \frac{BC}{AB} \quad \text{ning} \quad \frac{S_{\triangle BB_1C}}{S_{\triangle BB_1A}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot h \cdot B_1C}{\frac{1}{2}\cdot h \cdot B_1A} = \frac{B_1C}{B_1A}.$$



Järelikult

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C}{B_1A} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AB}{AB_1} = \frac{CB}{CB_1}.$$

Tõestus 3 (siinusteoreemi kasutades).

Rakendame kolmnurkadele BB_1A ja BB_1C siinusteoreemi

$$\frac{AB_1}{\sin\frac{\angle ABC}{2}} = \frac{BB_1}{\sin\angle BAC} \quad \text{ja} \quad \frac{CB_1}{\sin\frac{\angle ABC}{2}} = \frac{BB_1}{\sin\angle BCA}.$$

Saame, et kehtib võrdus

$$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle BCA}.$$

Rakendame nüüd kolmnurgale ABC siinusteoreemi

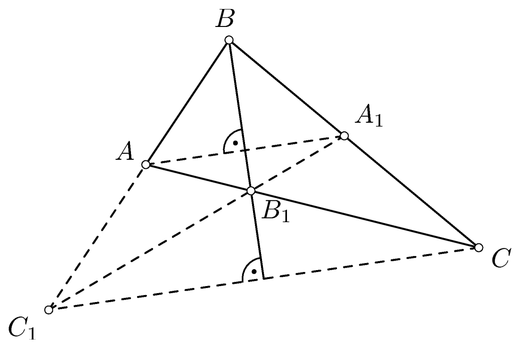
$$\frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{AB}{\sin\angle BCA} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BC}{AB} = \frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle BCA},$$

millest saamegi vajaliku võrduse.

Tõestus 4 (sümmeetria omadusi kasutades).

Leiame punktidega A, B ja C sümmeetrilised punktid nurgapoolitaja BB_1 suhtes. Olgu

$$S_{(BB_1)}A = A_1, \quad S_{(BB_1)}B = B, \quad S_{(BB_1)}C = C_1.$$



Siis tunnuse NN põhjal on järgmised kolmnurgad sarnased:

$$\triangle CC_1B_1 \sim \triangle AA_1B_1 \quad \text{ja} \quad \triangle CC_1B \sim \triangle AA_1B,$$

kust vastavalt

$$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CC_1}{AA_1} \quad \text{ja} \quad \frac{CC_1}{AA_1} = \frac{CB}{AB}.$$

Kokkuvõttes saame, et $\dfrac{CB_1}{AB_1} = \dfrac{CB}{AB}$.

Tõestus 5 (vektorite abil).

Avaldame vektori $\overrightarrow{BB_1}$ vektorite $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ kaudu:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BB_1} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BA} + \frac{AB_1}{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \\ &= \overrightarrow{BA} + \frac{AB_1}{AC}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) = \left(1 - \frac{AB_1}{AC}\right) \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{AB_1}{AC} \cdot \overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Vektor $\overrightarrow{BB_1} = \left(1 - \frac{AB_1}{AC}\right) \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{AB_1}{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ on kollineaarne (paralleelne) vektoriga $\frac{1}{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{BC} \cdot \overrightarrow{BC}$. Seega

$$\frac{1}{BA} : \frac{1}{BC} = \left(1 - \frac{AB_1}{AC}\right) : \frac{AB_1}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{CB}{AB} = \frac{AC - AB_1}{AB_1} = \frac{CB_1}{AB_1}.$$

Vaatleme nüüd, millised võivad olla kolmnurga sisenurkade poolitajate vastastikused asendid.

Lause 5. *Kolmnurga kaks sisenurga poolitajat ei saa olla paralleelsed.*

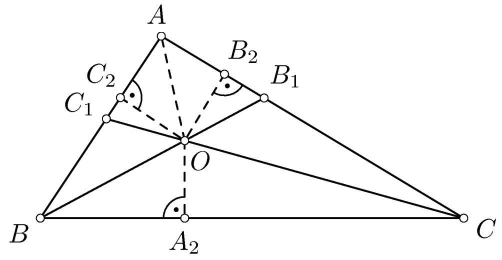
Tõestus. Kui oletada vastuväiteliselt, et leidub kolmnurk ABC, mille tippudest B ja C tõmmatud nurgapoolitajad on paralleelsed, siis peaks kehtima võrdus

$$\frac{1}{2}\left(\angle ABC + \angle ACB\right) = 180^\circ,$$

mis on ilmselt võimatu, kuna kolmnurga sisenurkade summa on sirgnurk. Seega mis tahes kolmnurga kaks nurgapoolitajat alati lõikuvad.

Teoreem 6. *Kolmnurga sisenurga poolitajad lõikuvad kõik ühes punktis, mis on selle kolmnurga siseringjoone keskpunkt.*

Tõestus. Lõikugu kolmnurga ABC sisenurga poolitajad BB_1 ja CC_1 punktis O. Näitame, et lõik AO poolitab nurga BAC.



Olgu OA_2, OB_2 ja OC_2 punktist O vastavalt külgedele BC, AC ja AB tõmmatud ristlõigud. Kuna nurgapoolitaja BB_1 on nurga ABC sümmeetriateljeks (vt Järeldus 3), siis selle nurgapoolitaja punkt O asub võrdsel kaugusel nurga ABC haaradest ehk $OA_2 = OC_2$. Kuna O on ka nurgapoolitaja CC_1 punkt, siis analoogiliselt saame, et $OA_2 =$

OB_2.
Kahest viimasest võrdusest järeldub, et $OB_2 = OC_2$ ehk punkt O asub nurga BAC haaradest võrdsel kaugusel. Järelikult nurga BAC poolitaja läbib punkti O. Teisisõnu, AO on nurgapoolitaja. Kuna nurgapoolitajate lõikepunkt asub võrdsel kaugusel kolmnurga kõikidest külgedest, siis see on kolmnurga siseringjoone keskpunkt.

Täiendavaid tulemusi kolmnurga sisenurga poolitaja kohta

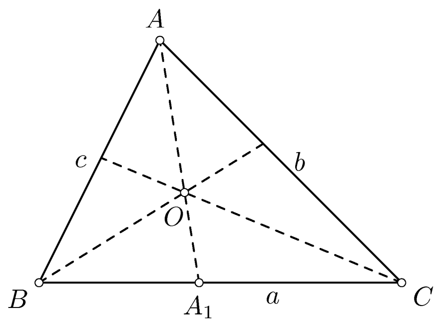
Tõestame nüüd mõned tulemused nurgapoolitajatega seotud lõikude pikkuste kohta.

Teoreem 7. *Kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunkt jaotab iga nurgapoolitaja kolmnurga tipust alates kaheks lõiguks, mis suhtuvad nagu lähiskülgede summa suhtub vastasküլge.*

Olgu $l_a = AA_1$ kolmnurga ABC nurgapoolitaja ja O nurgapoolitajate lõikepunkt. Olgu $BC = a$, $AC = b$ ja $AB = c$. Näitame, et küljele a tõmmatud nurgapoolitaja l_a jaotatakse suhtes $(b + c) : a$. Nurgapoolitaja põhiomadust kasutades, saame kirjutada süsteemi

Tõestus.

$$\begin{cases} BA_1 + A_1C = a \\ \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{c}{b}, \end{cases}$$



millest järeldub, et $BA_1 = \dfrac{ac}{b + c}$. Sellest, et BO on kolmnurga BAA_1 nurgapoolitaja saame

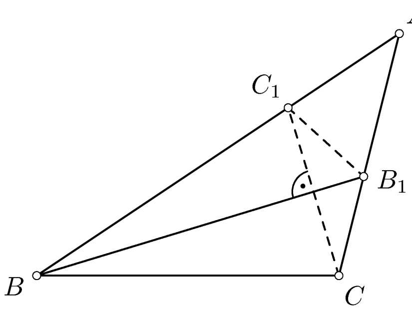
$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{c}{BA_1} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b + c}{a}.$$

Lause 8. *Kolmnurga sisenurga poolitaja jaotab vastaskülje kaheks lõiguks nii, et pikemale lähisküljele vastab pikem lõik vastasküljel.*

Tõestus 1. Olgu BB_1 kolmnurga ABC nurgapoolitaja. Tõepoolest, võrdest $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{CB}{CB_1}$ järeldub vahetult, et tingimused $AB > BC$ ja $AB_1 > CB_1$ on samaväärsed.

Sellele tulemusele saab anda ka geomeetrilise tõestuse.

Tõestus 2.
Näitame, et tingimusest $AB > BC$ järeldub võrratus $AB_1 > CB_1$. Olgu C_1 punktiga C sümmeetriline punkt nurgapoolitaja BB_1 suhtes. Siis C_1 on külje AB sisepunkt (vt Järeldus 3).



Seega $CB_1 = C_1B_1$ ja $BC_1 = BC < AB$ ning $\angle BB_1C$ on kolmnurga BB_1A välisnurk, st

$$\angle BB_1C = \angle B_1AB + \angle B_1BA.$$

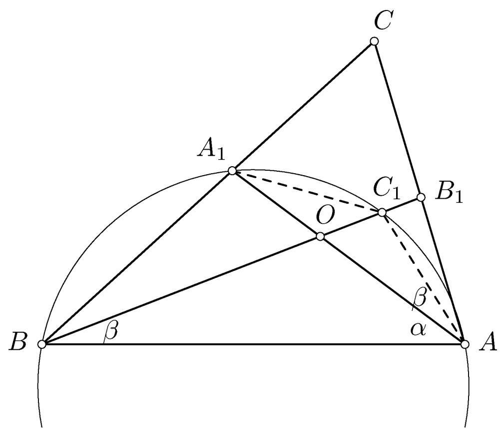
Kuna C_1 on lõigu AB sisepunkt ja $\angle AC_1B_1$ on kolmnurga BB_1C_1 välisnurk (st $\angle AC_1B_1 = \angle BB_1C_1 + \angle B_1BC_1$), saame

$$\angle AC_1B_1 > \angle BB_1C_1 = \angle BB_1C > \angle BAC = \angle C_1AB_1.$$

Järelikult $CB_1 = C_1B_1 < AB_1$.

Lause 9. *Kolmnurga pikemale küljele vastab lühem nurgapoolitaja.*

Tõestus. Olgu AA_1 ja BB_1 kolmnurga ABC nurgapoolitajad ja O nende lõikepunkt. Olgu $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ ja $\angle ACB = 2\gamma$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $AC < BC$ ehk $\beta < \alpha$. Näitame, et $BB_1 > AA_1$.



Tõmbame tipust A kiirte AA_1 ja AC vahele kiire, mis moodustab kiirega AA_1 nurga β. Olgu C_1 selle kiire lõikepunkt nurgapoolitajaga BB_1. Kuna lõik A_1C_1 on tippudest A ja B nähtav nurga β all, siis võime teha järelduse, et punktid A, B, A_1 ja C_1 asuvad ühel ringjoonel (võrdsed nurgad A_1AC_1 ja A_1BC_1 toetuvad ühele ja samale kõõlule). Sellest, et $\beta < \alpha$ ning 2β ja 2α on kolmnurga ABC sisenurkade suurused, järeldub, et $\angle ABA_1 = 2\beta < 90°$.

Vaatleme nurka $\angle C_1AB$:

$$\angle C_1AB = \alpha + \beta < \alpha + \beta + \gamma = 90°.$$

Ilmselt $\angle ABA_1 < \angle C_1AB$ (kuna $2\beta < \alpha + \beta$), seega ka $AA_1 < C_1B$ (kuna suurem piirdenurk toetub suuremale kõõlule). Kokkuvõttes saame, et

$$AA_1 < C_1B < C_1B + C_1B_1 = BB_1.$$

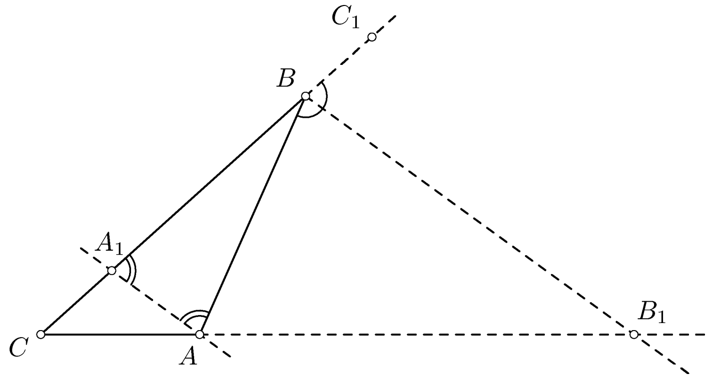
Lause 10. *Kui kolmnurgas ABC on tõmmatud nurgapoolitajad AA_1 ja BB_1 ja nende lõikepunktiks on O, siis*

$$\angle AOB = \frac{1}{2}\angle ACB + 90°.$$

Tulemused kolmnurga välisnurga poolitaja kohta

Selles punktis me lähtume välisnurga definitsioonist ja vaatleme kolmnurga välisnurka kui selle sisenurga kõrvunurka. Järgmiselt tõestame kolm olulisemat tulemust, mis on seotud kolmnurga välisnurkade poolitajatega.

Teoreem 11. *Kolmnurga tipust tõmmatud välisnurga poolitaja lõikab vastaskülje pikendust niisuguses punktis, mille kaugused selle külje otspunktidest suhtuvad nagu vastava sisenurga lähisküljed.*



Tõestus. Tähistame tähega B_1 kolmnurga ABC tipust B tõmmatud välisnurga poolitaja ja kolmnurga külje CA pikendamisel üle punkti A saadud kiire lõikepunkti. Peame näitama, et $\dfrac{AB_1}{CB_1} = \dfrac{AB}{CB}$.

Tõmbame läbi tipu A nurgapoolitajaga BB_1 paralleelse sirge, mis lõikab külge BC punktis A_1. Külje BC pikendusel üle tipu B märgime suvalise punkti C_1.

Kuna $\angle BA_1A = \angle C_1BB_1$ (kaasnurgad), $\angle B_1BA = \angle BAA_1$ (põiknurgad) ja BB_1 on nurga $\angle ABC_1$ poolitaja, siis saame, et $\angle BA_1A = \angle BAA_1$. Järelikult, $AB = BA_1$ ja kolmnurk BAA_1 on võrdhaarne.

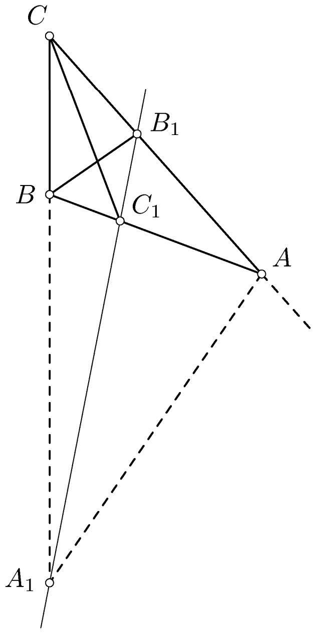
Kasutame kiirteteoreemi: kaks paralleelset sirget AA_1 ja BB_1 lõikavad nurga BCB_1 haarasid, seega

$$\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{BA_1}{CB} = \frac{AB}{CB}.$$

Lause 12. *Kolmnurga kahest tipust tõmmatud välisnurkade poolitajad ja kolmandast tipust tõmmatud sisenurga poolitaja lõikuvad ühes punktis, mis on kolmnurga külgringjoone keskpunktiks.*

Selle teoreemi tõestus on analoogiline kolmnurga sisenurkade poolitajate lõikumist käsitleva teoreemi tõestusega.

Teoreem 13. *Kolmnurga kahest tipust tõmmatud sisenurkade poolitajate aluspunktid vastasküljedel ja kolmandast tipust tõmmatud välisnurga poolitaja aluspunkt vastaskülje pikendusel asuvad ühel ja samal sirgel.*



Tõestus. Olgu BB_1 ja CC_1 kolmnurga ABC sisenurkade poolitajad ning A_1 nurga BAC välisnurga poolitaja ja külje BC pikenduse lõikepunkt.

Nurgapoolitaja põhiomadustest järelduvad järgmised võrdused:

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{BC}{AB} \quad \text{ja} \quad \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC}{BC}.$$

Teoreemi tõestuseks saab rakendada Menelaose teoreemi, mis väidab, et kolmnurga ABC külgedel AB, BC ja AC või nende pikendustel vastavalt võetud punktid C_1, A_1 ja B_1 (kusjuures pikendustel olgu võetud neist punktidest üks või kõik kolm) asuvad ühel sirgel parajasti siis, kui

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1.$$

Kuna vaadeldaval juhul

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} = 1,$$

siis punktid A_1, B_1 ja C_1 asuvad ühel sirgel.

Nurgapoolitajate aluspunktide poolt moodustatud kujundite omadused

Lause 14. *Kui O on kolmnurga ABC nurgapoolitajate BB_1 ja CC_1 lõikepunkt, siis nelinurk AC_1OB_1 osutub kõõlnelinurgaks parajasti siis, kui $\angle BAC = 60°$.*

Tõestus. Vaatame nelinurka AC_1OB_1. Nurgapoolitajate vahelise nurga suuruse leidmise valemi põhjal saame

$$\angle C_1OB_1 = \angle BOC = \frac{1}{2}\angle BAC + 90°.$$

Nelinurk AC_1OB_1 on kõõlnelinurk parajasti siis, kui selle vastasnurkade summa on 180°. Seega parajasti siis, kui

$$\angle C_1OB_1 + \angle C_1AB_1 = 180°,$$

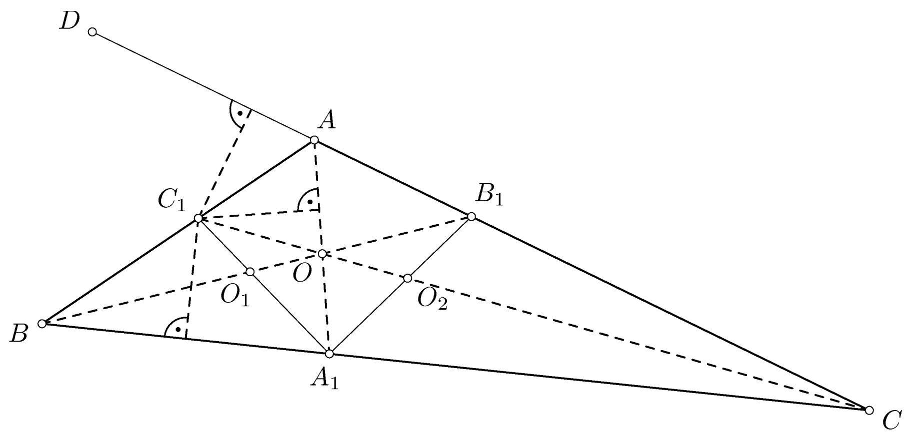
millest

$$\frac{1}{2}\angle BAC + 90^\circ + \angle BAC = 180^\circ \quad \text{ehk} \quad \angle BAC = 60^\circ.$$

Lause 15. *Kui kolmnurgas ABC sisenurga BAC suurus on 120° ja nurgapoolitajad AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikuvad punktis O, siis*

$$\angle A_1C_1O = \angle A_1B_1O = 30^\circ.$$

Tõestus. Olgu D suvaline punkt kiire CA pikendusel. Kuna $\angle DAB = \angle A_1AB = 60^\circ$, siis AB on nurga DAA_1 poolitaja. Sellest, et C_1 on lõigu AB sisepunkt, järeldub nüüd, et punkti C_1 kaugused sirgetest AC ja AA_1 on võrdsed. Samas asub C_1 ka nurga ACB poolitajal, seega punkti C_1 kaugused sirgetest AC ja BC on samuti võrdsed. Järelikult, punkt C_1 asub võrdsel kaugusel sirgetest BC ja AA_1, mis tähendab, et A_1C_1 on nurga AA_1B poolitaja.



Olgu O_1 lõikude BB_1 ja A_1C_1 lõikepunkt. Siis O_1 on kolmnurga AA_1B nurgapoolitajate lõikepunkt. Kasutades kahe nurgapoolitaja vahelise nurga leidmiseks valemit, saame

$$\angle C_1O_1O = \angle BO_1A_1 = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAA_1 = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

Sama valemi järgi arvutame nurga BOC suuruse:

$$\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

Kuna nurk BOC on kolmnurga C_1O_1O välisnurk, saame

$$\angle A_1C_1O = \angle BOC - \angle C_1O_1O = 150^\circ - 120^\circ = 30^\circ.$$

Analoogiliselt saame näidata, et lõikude CC_1 ja A_1B_1 lõikepunkt O_2 on kolmnurga AA_1C nurgapoolitajate lõikepunkt ning seega ka $\angle A_1B_1O = 30^\circ$.

Lause 16. *Kui kolmnurga üks sisenurkadest on* 120°, *siis selle kolmnurga nurgapoolitajate aluspunktidest moodustatud kolmnurk on täisnurkne.*

Tõestus. Olgu kolmnurga ABC sisenurga BAC suurus 120° ning O nurgapoolitajate AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikepunkt. Siis eelnevas lauses tõestatu põhjal

$$\angle C_1O_1O = \angle B_1O_2O = 120^\circ \quad \text{ning} \quad \angle O_1OO_2 = 150^\circ,$$

kus O_1 on lõikude BB_1 ja A_1C_1 lõikepunkt ning O_2 on lõikude CC_1 ja A_1B_1 lõikepunkt. Seega saame, et nelinurgas $OO_1A_1O_2$ on kolme sisenurga suurused järgmised:

$$\angle O_1OO_2 = 150^\circ \quad \text{ja} \quad \angle OO_1A_1 = \angle OO_2A_1 = 60^\circ.$$

Järelikult

$$\angle C_1A_1B_1 == \angle O_1A_1O_2 = 360^\circ - (150^\circ + 60^\circ + 60^\circ) = 90^\circ.$$

Seega kolmnurk $C_1A_1B_1$ on täisnurkne.

Lause 17. *Kui kolmnurgas külgedega a, b ja c on tõmmatud nurgapoolitajad, siis antud kolmnurga ja selle nurgapoolitajate aluspunktidest moodustatud kolmnurga pindalade suhe võrdub*

$$\frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Tõestus. Olgu antud kolmnurk ABC ja selle nurgapoolitajad AA_1, BB_1 ja CC_1. Siis ülesanne seisneb suhte $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle A_1B_1C_1}$ leidmises. Esialgu leiame kolmnurkade AB_1C_1, BA_1C_1 ja CA_1B_1 pindalad. Kasutades kolmnurga pindala leidmise standardset valemit $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, saame

$$S_{\triangle AB_1C_1} = \frac{AC_1}{AB} \cdot \frac{AB_1}{AC} \cdot S_{\triangle ABC}.$$

Nurgapoolitaja põhiomaduse kohaselt

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \quad \text{ja} \quad \frac{AB_1}{CB_1} = \frac{AB}{CB} = \frac{c}{a},$$

kust

$$\frac{AC_1}{AB} = \frac{b}{a+b} \quad \text{ja} \quad \frac{AB_1}{AC} = \frac{c}{a+c}.$$

Järelikult,

$$S_{\triangle AB_1C_1} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)} \cdot S_{\triangle ABC}.$$

Analoogiliselt leiame ka ülejäänud pindalad

$$S_{\triangle BA_1C_1} = \frac{ac}{(b+a)(b+c)} \cdot S_{\triangle ABC} \quad \text{ja} \quad S_{\triangle CA_1B_1} = \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \cdot S_{\triangle ABC}.$$

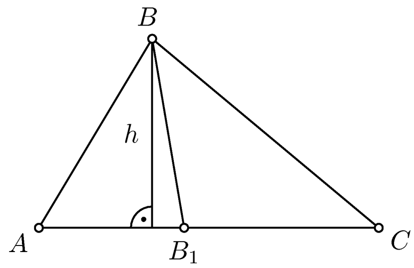
Lõpuks saame, et

$$\begin{aligned} S_{\triangle A_1B_1C_1} &= S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AB_1C_1} - S_{\triangle BA_1C_1} - S_{\triangle CA_1B_1} = \\ &= S_{\triangle ABC} - \frac{bc \cdot S_{\triangle ABC}}{(a+b)(a+c)} - \frac{ac \cdot S_{\triangle ABC}}{(b+a)(b+c)} - \frac{ab \cdot S_{\triangle ABC}}{(c+a)(c+b)} = \\ &= \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)} \cdot S_{\triangle ABC}. \end{aligned}$$

Nurgapoolitajad ja kolmnurga pindala

Teoreem 18. *Kolmnurga sisenurga poolitaja jaotab kolmnurga kaheks kolmnurgaks, mille pindalad on võrdelised vaadeldava nurga lähisküljedega.*

Tõestus. Näitame, et kolmnurga ABC sisenurga poolitaja BB_1 korral $\frac{S_{\triangle BAB_1}}{S_{\triangle BCB_1}} = \frac{AB}{BC}$. Kuna kolmnurkadel BAB_1 ja BCB_1 on sama kõrgus h, siis



$$S_{\triangle BAB_1} : S_{\triangle BCB_1} = AB_1 : B_1C.$$

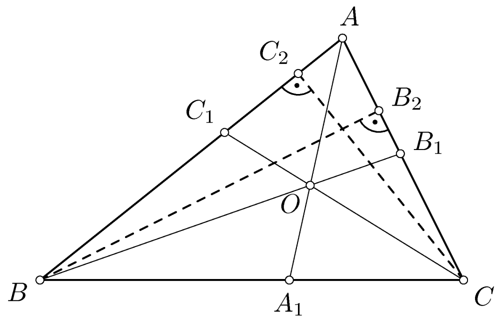
Sisenurga poolitaja põhiomaduse põhjal aga $AB_1 : B_1C = AB : BC$. Seega väide on tõestatud.

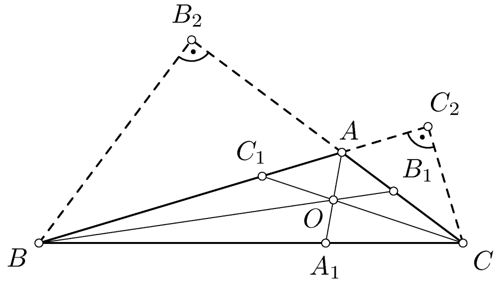
Näide 19. Tõestame, et kui kolmnurga kõikide nurgapoolitajate pikkused on väiksemad kui 1, siis selle kolmnurga pindala on väiksem kui $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Olgu AA_1, BB_1 ja CC_1 kolmnurga ABC nurgapoolitajad, mille pikkused on ühest väiksemad. Olgu BB_2 ja CC_2 antud kolmnurga kõrgused. Vaatleme eraldi juhtumeid, kus kolmnurk on teravnurkne ja kolmnurk on nürinurkne (või täisnurkne).

Eeldame, et kolmnurk on teravnurkne, mille suurim nurk on $\angle BAC$. Vastavalt omadusele on selle nurga poolitaja AA_1, kui kõige pikemale küljele tõmmatud nurgapoolitaja, kõige lühem. Siis kehtib võrratus

$$60^\circ \leqslant \angle BAC < 90^\circ.$$





Kuna suvalise kolmnurga kõrgus ei ole samast tipust tõmmatud nurgapoolitajast pikem, saame

$$BB_2 \leqslant BB_1 < 1 \quad \text{ja} \quad CC_2 \leqslant CC_1 < 1,$$

Kust

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CC_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{BB_2}{\sin \angle BAC} \cdot CC_2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Olgu nüüd kolmnurk ABC nürinurkne (või täisnurkne) ja $\angle BAC \geqslant 90^\circ$ (siis nurga BAC poolitaja on kõige väiksem). Sel juhul on kõrgused BB_2 ja CC_2 tõmmatud külgede pikendustele ja kolmnurga küljed AB ja AC asuvad vastava kõrguse ja nurgapoolitaja vahel. Siis kehtivad järgmised võrratused:

$$AB \leqslant BB_1 < 1 \quad \text{ja} \quad AC \leqslant CC_1 < 1,$$

kust saame

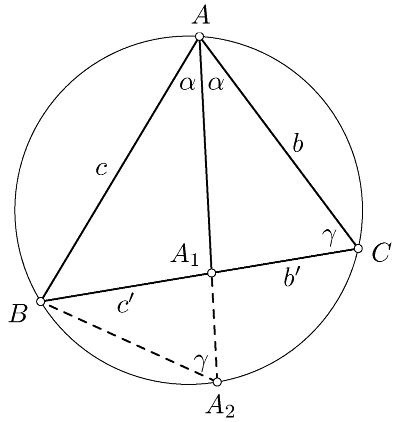
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \leqslant \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Seega mõlemal juhul $S_{\triangle ABC} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Kolmnurga nurgapoolitajaga seotud võrdused ja võrratused

Kolmnurga nurgapoolitaja pikkuse või selle ruudu leidmiseks on tuletatud mitmeid valemeid. Järgnevates lausetes on kolmnurga ABC korral kasutusel traditsioonilised tähistused $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ja nurga BAC nurgapoolitaja on $AA_1 = l_a$.

Teoreem 20. *Kolmnurga sisenurga nurgapoolitaja pikkuse ruut avaldub selle nurga lähisküلgede ja vastaskülje osalõikude kaudu kujul*



$$l_a^2 = bc - b'c',$$

kus $b' = CA_1$ ja $c' = BA_1$.

Tõestus. Joonestame kolmnurga ABC ümberringjoone ja pikendame antud nurgapoolitajat AA_1 üle punkti A_1 kuni ümberringjoonega lõikumiseni punktis A_2.

Kuna piirdenurgad ACB ja AA_2B on võrdsed (toetuvad ühele ja samale kaarele AB), siis kolmnurgad AA_2B ja ACA_1 on sarnased (tunnuse NNN põhjal) ja sellest järeldub, et

$$\frac{AA_1}{AB} = \frac{AC}{AA_2} \quad \Leftrightarrow \quad AA_1 \cdot (AA_1 + A_1A_2) = AB \cdot AC \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad AA_1^2 = AB \cdot AC - AA_1 \cdot A_1A_2.$$

Kasutades teoreemi kõõludest, saame võrduse $BA_1 \cdot A_1C = AA_1 \cdot A_1A_2$. Viimasest järeldub vajalik seos

$$l_a^2 = AA_1^2 = AB \cdot AC - BA_1 \cdot A_1C = bc - b'c'.$$

Lause 21. *Kolmnurga sisenurga nurgapoolitaja pikkust l_a saab arvutada selle nurga suuruse α ja tema lähisküلgede pikkuste b ja c kaudu valemiga*

$$l_a = \frac{2bc\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{b+c}.$$

Tõestus. Tõestame võrduse kolmnurga pindala leidmise valemi $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ abil. Olgu S antud kolmnurga pindala, S_1 nurgapoolitaja l_a, külje b ja nurga $\dfrac{1}{2}\alpha$ poolt määratud kolmnurga pindala ja S_2 aga nurgapoolitaja l_a, külje c ja nurga $\dfrac{1}{2}\alpha$ poolt määratud kolmnurga pindala.

Siis pindalade kohta kehtib võrdus $S = S_1 + S_2$, mis on samaväärne järgmiste võrdustega:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}bc\sin\alpha &= \frac{1}{2}bl_a\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) + \frac{1}{2}cl_a\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \quad \Leftrightarrow \\
bc\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) &= \frac{1}{2}(b+c)l_a\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \quad \Leftrightarrow \\
l_a &= \frac{2bc\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{b+c}.
\end{aligned}$$

Nurgapoolitajaga seotud võrratused

Lause 22. *Kui kolmnurgas ABC on tõmmatud nurgapoolitaja AA_1, siis kehtivad võrratused $AB > A_1B$ ja $AC > A_1C$.*

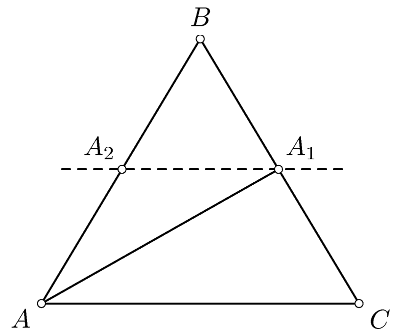
Tõestus. Tõestame esimese võrratuse. Teine tõestatakse analoogiliselt. Kuna nurk AA_1B on kolmnurga AA_1C välisnurk, siis

$$\angle AA_1B = \angle CAA_1 + \angle ACA_1 > \angle CAA_1 = \angle BAA_1.$$

Viimasest järeldub kohe, et $AB > A_1B$.

Lause 23. *Kui võrdhaarses kolmnurgas ABC alusega AC on tõmmatud nurgapoolitaja AA_1, siis kehtib võrratus $AA_1 < 2CA_1$.*

Tõestus. Tõmbame läbi punkti A_1 alusega AC paralleelse sirge. Olgu A_2 selle sirge ja külje AB lõikepunkt. Kolmnurk AA_1A_2 on võrdhaarne, kuna



$$\angle AA_1A_2 = \angle CAA_1 = \angle A_1AA_2.$$

Seega saame, et $AA_2 = A_2A_1 = A_1C$. Kolmnurga võrratuse abil saame lõpuks, et

$$2CA_1 = AA_2 + A_2A_1 > AA_1.$$

Nurgapoolitajad ja kolmnurkade võrdsuse tunnused

Vaatleme nurgapoolitajate abil sõnastatavaid kolmnurkade võrdsuse tunnuseid.

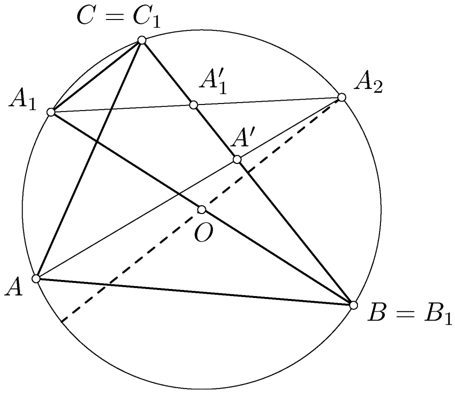
Teoreem 24. *Kaks kolmnurka on võrdsed, kui kehtib üks järgmistest tingimustest:*

a) *ühe kolmnurga nurk, selle lähiskülg ja selle nurga tipust tõmmatud nurgapoolitaja on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurgaga, selle nurga lähisküljega ja selle nurga tipust tõmmatud nurgapoolitajaga;*

b) *ühe kolmnurga nurk, selle vastaskülg ja selle nurga tipust tõmmatud nurgapoolitaja on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurgaga, selle nurga vastasküljega ja selle nurga tipust tõmmatud nurgapoolitajaga;*

c) *ühe kolmnurga kolm nurgapoolitajat on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme nurgapoolitajaga.*

Teoreemi b) osa tõestus. Olgu kolmnurga ABC nurk BAC, selle vastaskülg BC ja selle nurga nurgapoolitaja AA' on vastavalt võrdsed kolmnurga $A_1B_1C_1$ nurgaga $B_1A_1C_1$, selle vastasküljega B_1C_1 ja selle nurga nurgapoolitajaga A_1A_1'.



Oletame vastuväiteliselt, et kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ ei ole võrdsed. Joonistame kolmnurga ABC ja selle ümberringjoone keskpunktiga O. Lisame joonisele ka nurgapoolitaja AA' ja pikendame seda üle punkti A' kuni lõikumiseni ümberringjoonega punktis A_2. Nüüd kanname joonisele kolmnurga $A_1B_1C_1$ nii, et kolmnurkade võrdsed küljed BC ja B_1C_1 langeksid kokku, kolmnurkade tipud A ja A_1 asuksid diameetrist A_2O ühel ja samal pooltasandil ja A_1 oleks ringjoone punkt. Viimane on võimalik sellepärast, et $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ ja need nurgad toetuvad ühele ja samale kõõlule BC.

Nurgapoolitaja A_1A_1' läbib samuti punkti A_2, kuna A_2 on kaare BC keskpunkt. Vastuväitelisest oletusest, et kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ ei ole võrdsed, ja tehtud konstruktsioonist järeldub, et punktid A ja A_1 ei ühti. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et punkt A_1 asub kaarel AC. Siis ilmselt kehtivad järgmised võrratused lõikude pikkuste kohta

$$AA_2 > A_1A_2 \quad \text{ja} \quad A_2A' < A_2A_1'.$$

Seega saame

$$AA' = AA_2 - A_2A' > A_1A_2 - A_2A_1' = A_1A_1',$$

mis on vastuolus eeldusega, et nurgapoolitajad AA' ja A_1A_1' on võrdsed. Järelikult, kolmnurkade tipud A ja A_1 langevad kokku ning kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on võrdsed.