4. Kolmnurga kõrguse põhiomadused

Koostanud Maksim Ivanov
TÜ Teaduskool

Kolmnurga kõrgus ja põhitulemused selle kohta

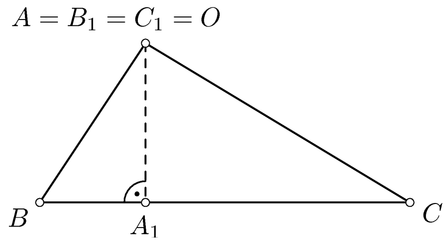
Definitsioon 1. Kolmnurga kõrguseks nimetatakse kolmnurga tipust selle vastasküljele või selle pikendusele tõmmatud ristlõiku või selle pikkust.

Järeldus 2. *Kui AA_1 on kolmnurga ABC kõrgus, siis kolmnurgad ABA_1 ja ACA_1 on täisnurksed kolmnurgad.*

Teoreem 3. *Kolmnurga kõrgused või nende pikendused lõikuvad ühes punktis.*

Märkus. Kõrguste lõikepunkti nimetatakse ka vaadeldava kolmnurga *ortotsentriks*.

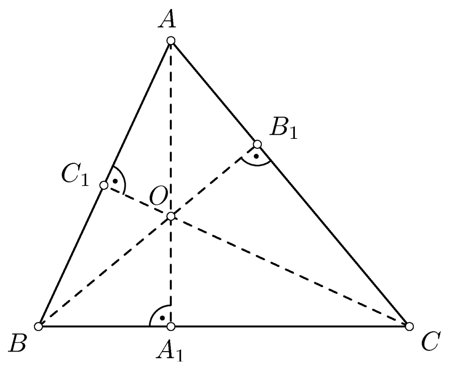
Teoreemi tõestused. Täisnurkse kolmnurga ABC juhul on väide ilmne, sest kaatetid AB ja AC, mis on ühtlasi ka kolmnurga kõrgusteks, lõikuvad kolmanda kõrgusega täisnurga tipus A. Jääb üle vaadelda teravnurkseid ja nürinurkseid kolmnurki.

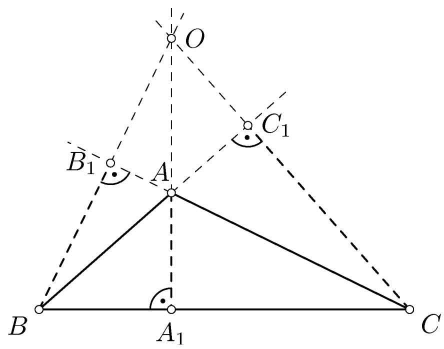


Tõestus 1 (Ceva teoreemi kasutades).

Kui on vaja tõestada, et kolm sirget lõikuvad ühes punktis, siis on kõige standardsemaks võimaluseks kasutada Ceva teoreemi: kui kolmnurga ABC külgedel AB, AC ja BC või nende pikendustel on võetud vastavalt punktid C_1, B_1 ja A_1, siis sirged AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis parajasti siis, kui

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$





Olgu AA_1, BB_1 ja CC_1 kolmnurga ABC kõrgused. Tähistame $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ ja $\angle ACB = \gamma$. Märgime, et iga nurga ϕ korral kehtib taandamisvalem $\cos(180^\circ - \phi) = -\cos\phi$, seega

$$|\cos\phi| = |\cos(180^\circ - \phi)|.$$

Täisnurksest kolmnurgast ABA_1 saame, et võrdus $BA_1 = AB \cdot |\cos\beta|$ on tõene nii teravnurkse, kui ka nürinurkse kolmnurga korral.

Analoogiliselt kolmnurkade ACA_1, BAB_1, BCB_1, CAC_1 ja CBC_1 jaoks saame vastavalt

$$CA_1 = AC \cdot |\cos\gamma|, \ AB_1 = AB \cdot |\cos\alpha|, \ CB_1 = BC \cdot |\cos\gamma|,$$

$$AC_1 = AC \cdot |\cos\alpha|, \ BC_1 = BC \cdot |\cos\beta|.$$

Leides nüüd lõikude suhete korrutise antud juhul, saame vajaliku võrduse

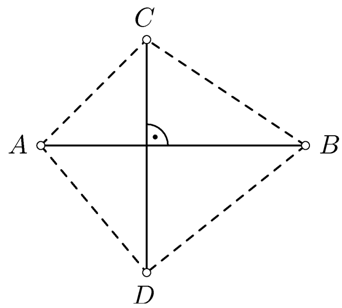
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{AB \cdot |\cos\alpha| \cdot AC \cdot |\cos\gamma| \cdot BC \cdot |\cos\beta|}{BC \cdot |\cos\gamma| \cdot AB \cdot |\cos\beta| \cdot AC \cdot |\cos\alpha|} = 1.$$

Seega Ceva teoreemi põhjal sirged AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikuvadki ühes punktis.

Tõestus 2 (kahe lõigu ristseisu tingimust kasutades).

Selles tõestuses tugineme kahe lõigu ristseisu tunnusele: lõigud AB ja CD on risti parajasti siis, kui kehtib võrdus

$$AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2.$$



Kuna mis tahes kolmnurga kaks külge ei saa olla paralleelsed, siis kolmnurga kaks kõrgust või nende pikendused alati lõikuvad.

Olgu O kolmnurga ABC kõrguste BB_1 ja CC_1 või nende pikenduste lõikepunkt. Kuna $AC \perp BO$, siis ülaltoodud tingimuse põhjal saame võrduse

$$AB^2 - CB^2 = AO^2 - CO^2.$$

Analoogiliselt tingimusest $AB \perp CO$ järeldub võrdus

$$AC^2 - BC^2 = AO^2 - BO^2.$$

Lahutades esimesest võrdusest teise, saame

$$AB^2 - AC^2 = BO^2 - CO^2,$$

mis tähendab, et $BC \perp AO$. Järelikult kolmnurga tipust A tõmmatud kõrgus läbib samuti punkti O. Ehk teisisõnu, kolmnurga ABC kolm kõrgust AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis.

Tõestus 3 (vektorite kaudu).

Esialgu näitame, et tasandi suvaliste punktide A, B, C ja O korral leiab aset võrdus

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{0}.$$

Püüame avaldada selles võrduses esinevaid vektoreid vektorite $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ja $\overrightarrow{CO}$ kaudu:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}, \\ \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}, \\ \overrightarrow{BO} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}. \end{aligned}$$

Seega saame

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BO} =$$
$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}\right) + \left(-\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}\right) = \overrightarrow{0}.$$

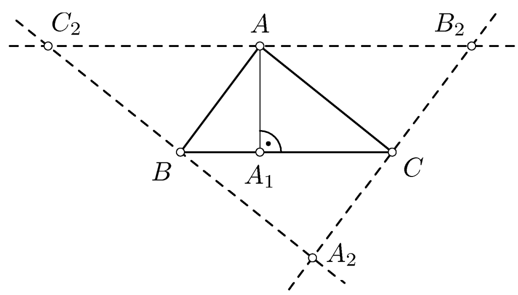
Olgu nüüd A, B ja C kolmnurga tipud ning O selle kolmnurga kõrguste BB_1 ja CC_1 või nende pikenduste lõikepunkt. Siis $BO \perp CA$ ja $CO \perp AB$, millest saame, et

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{0} \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{0}.$$

Tõestatud võrduse põhjal on siis ka $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0}$, mis tähendab, et $AO \perp BC$. Seega kolmnurga ABC kõrgused AA_1, BB_1 ja CC_1 või nende pikendused lõikuvad ühes punktis.

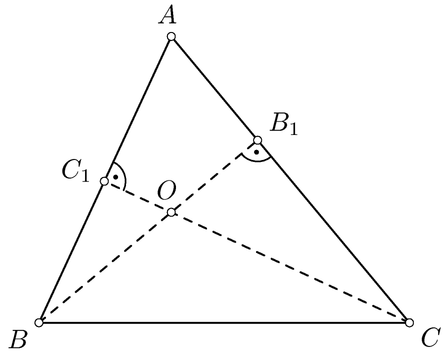
Tõestus 4 (keskristsirgete põhiomadust kasutades).

Tõmbame läbi kolmnurga tippude A, B ja C vastavalt vastasküljedega BC, AC ja AB paralleelsed sirged. Tekkinud kolmnurga külgede B_2C_2, A_2C_2 ja A_2B_2 keskpunktideks osutuvad vastavalt punktid A, B ja C. Tõepoolest, näiteks nelinurgad $ABCB_2$ ja $BCAC_2$ on konstruktsiooni tõttu rööpkülikud, seega $BC = AB_2 = AC_2$.



Seega kolmnurga ABC kõrgused on kolmnurga $A_2B_2C_2$ keskristsirgeteks, sest näiteks punkt A on külje B_2C_2 keskpunkt, kolmnurga ABC kõrgus AA_1 on küljega BC risti ning lõigud BC ja B_2C_2 on paralleelsed. Kuna kolmnurga $A_2B_2C_2$ keskristsirged lõikuvad ühes punktis (kolmnurga $A_2B_2C_2$ ümberringjoone keskpunktis), siis ka kolmnurga ABC kõrgused või nende pikendused lõikuvad ühes punktis.

Näide 4. Tõestame, et kui O on kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt, $\angle ABC = \beta$ ja $\angle ACB = \gamma$, siis $\angle BOC = \beta + \gamma$.



Olgu BB_1 ja CC_1 kolmnurga ABC kõrgused. Siis

$$\angle BAC = 180^\circ - \beta - \gamma.$$

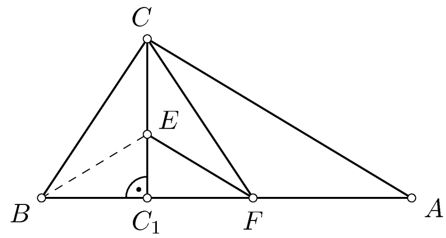
Kuna kolmnurgad AB_1B ja BC_1O on täisnurksed ja nurk BOC on kolmnurga BC_1O välisnurk, siis

$$\angle ABB_1 = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - (180^\circ - \beta - \gamma) = \beta + \gamma - 90^\circ$$

ja lõpuks

$$\angle BOC = \angle BC_1O + \angle ABB_1 = 90^\circ + \beta + \gamma - 90^\circ = \beta + \gamma.$$

Näide 5. Tõestame, et kui täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile AB on tõmmatud kõrgus CC_1 ning lõikudel CC_1 ja AC_1 on valitud vastavalt punktid E ja F nii, et $\frac{CE}{CC_1} = \frac{AF}{AC_1}$, siis sirged BE ja CF on risti.



Kuna $CE = CC_1 - EC_1$ ja $AF = AC_1 - FC_1$, siis etteantud võrdus on samaväärne võrdustega

$$\frac{CC_1 - EC_1}{CC_1} = \frac{AC_1 - FC_1}{AC_1} \quad \text{ja} \quad \frac{EC_1}{CC_1} = \frac{FC_1}{AC_1}.$$

Viimasest võrdusest saame, et kolmnurgad AC_1C ja FC_1E on sarnased ning $AC||EF$. Kuna kolmnurk ABC on täisnurkne, siis $EF \perp BC$, mis tähendab, et punkt E on kolmnurga BCF ortotsenter. Kuna kolmnurga kõrgused lõikuvad ühes punktis, siis ka $BE \perp CF$.

Järeldus 6. *Teravnurkse kolmnurga kõrguste lõikepunkt asub selle kolmnurga sisepiirkonnas, täisnurkse kolmnurga korral ühtib see lõikepunkt täisnurga tipuga ning nürinurkse kolmnurga kõrguste lõikepunkt asub väljaspool kolmnurka.*

Nagu eelnevates vihikutes näidatud, asuvad nii kolmnurga mediaanide lõikepunkt, kui ka sisenurkade poolitajate lõikepunkt alati kolmnurga sisepiirkonnas sõltumata kolmnurga liigist. Ortotsentri asukoha sõltuvus kolmnurga liigist tingib aga sageli vajaduse kontrollida kõrguste ja nende aluspunktidega seotud tulemuste kehtivust kolmnurga iga liigi jaoks eraldi.

Kolmnurga kõrgustega seotud kolmnurkade sarnasus

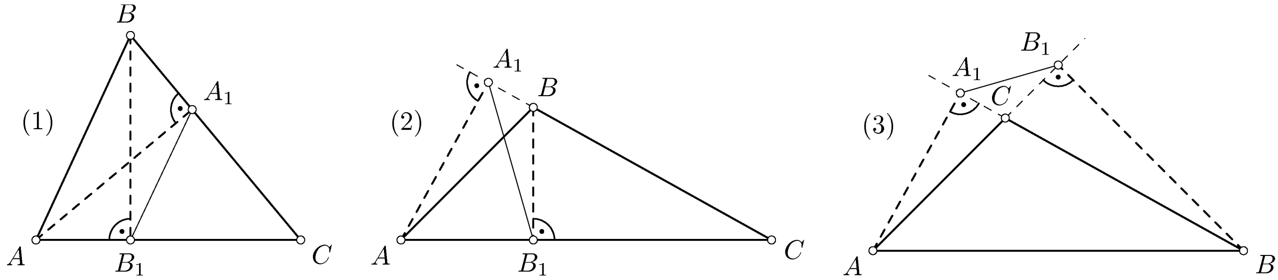
Kolmnurga kõrguste ja nende aluspunktide poolt tekitatud kolmnurkade seas on üllatavalt palju sarnaste kolmnurkade paare. Järgnevalt tõestame nendest mõnede paaride sarnasuse.

Teoreem 7. *Kui AA_1 ja BB_1 on kolmnurga ABC ($\angle ACB \neq 90^\circ$) kõrgused, siis*

a) $\triangle AA_1C \sim \triangle BB_1C$;

b) $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$ *(sarnasustegur* $|\cos\angle ACB|$*).*

Tõestus. Teoreemi tõestamiseks vaatleme kolme juhtumit:



(1) kui kolmnurk ABC on teravnurkne;

(2) kui kolmnurk ABC on nürinurkne (või täisnurkne) nürinurgaga (või täisnurgaga) ABC;

(3) kui kolmnurk ABC on nürinurkne nürinurgaga tipu C juures.

Osa a) tõestus. Kolmnurgad AA_1C ja BB_1C on sarnased vastavate nurkade võrdsuse tõttu, sest (1) ja (2) juhul $\angle AA_1C = \angle BB_1C = 90^\circ$ ning nurk ACB on ühine; (3) juhul $\angle AA_1C = \angle BB_1C = 90^\circ$ ning nurgad ACA_1 ja BCB_1 on tippnurgad.

Osa b) tõestus. Sellest, et kolmnurgad AA_1C ja BB_1C on äsja tõestatu põhjal sarnased, järeldub võrdus

$$\frac{CA_1}{CB_1} = \frac{CA}{CB},$$

millest saame, et kolmnurgad ABC ja A_1B_1C on sarnased, kuna tippnurgad ACB ja A_1CB_1 on võrdsed ja nende lähisküljed on võrdelised. Siinjuures saab arvutada ka sarnasusteguri:

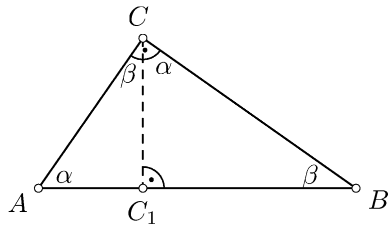
$$\frac{CA_1}{CA} = \frac{CB_1}{CB} = |\cos\angle ACB|.$$

Järgmine teoreem on Pythagorase teoreemi kõrval üks olulisemaid lauseid täisnurksete kolmnurkade jaoks.

Teoreem 8. *Kui CC_1 on täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile tõmmatud kõrgus, siis*

$$\triangle ABC \sim \triangle ACC_1 \sim \triangle CBC_1.$$

Tõestus. Täisnurksete kolmnurkade paaridel ABC ja ACC_1 ning ABC ja BCC_1 on lisaks täisnurgale ka ühine teravnurk. Seega on $\triangle ACC_1 \sim \triangle ABC \sim \triangle CBC_1$ tunnuse NNN järgi.



Järgmise tulemuse (nn üldistatud Pythagorase teoreemi) teadmine avardab oluliselt täisnurksete kolmnurkade lahendamise võimalusi.

Teoreem 9. *Kui CC_1 on täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile tõmmatud kõrgus, siis kolmnurkade ABC, CBC_1 ja ACC_1 vastavate lineaarsete elementide l, m ja n korral kehtib võrdus*

$$l^2 = m^2 + n^2.$$

Tõestus. Olgu l, m ja n täisnurksetes kolmnurkades ABC, CBC_1 ja ACC_1 tõmmatud sama tüüpi lõikude pikkused (näiteks täisnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud mediaani pikkus). Nüüd sarnasuse tõttu kehtivad võrdused

$$\frac{m}{l} = \frac{BC}{AB} \quad \text{ja} \quad \frac{n}{l} = \frac{AC}{AB},$$

millest Pythagorase teoreemi $AB^2 = AC^2 + BC^2$ arvestades saame, et

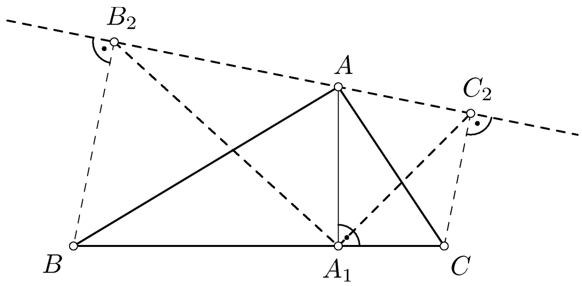
$$\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{l^2} = 1 \quad \text{ehk} \quad l^2 = m^2 + n^2.$$

Järgmised laused näitavad, milliseid huvitavaid sarnaste kolmnurkade paare võib tekitada spetsiaalsete lisakonstruktsioonidega.

Lause 10. *Kui AA_1 on kolmnurga ABC kõrgus ning BB_2 ja CC_2 punkti A läbivale sirgele tõmmatud ristlõigud, siis kolmnurgad ABC ja $A_1B_2C_2$ on sarnased.*

Tõestus. Kuna $\angle BB_2A = \angle AA_1B = 90^\circ$, siis punktid A_1 ja B_2 asuvad ringjoonel, mille diameeter on AB. Seega

$$\angle(C_2B_2, B_2A_1) = \angle(AB_2, B_2A_1) = \angle(AB, BA_1) = \angle(AB, BC).$$



Analoogiliselt saame, et ka punktid A_1 ja C_2 asuvad ringjoonel, mille diameeter on AC, ning

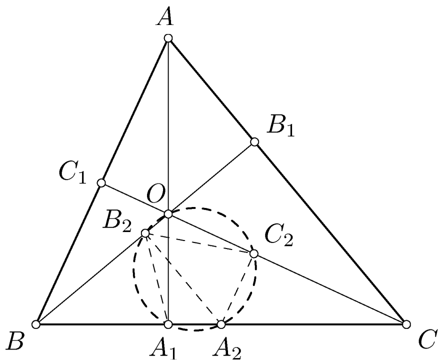
$$\angle (B_2C_2, C_2A_1) = \angle (AC, CB) .$$

Järelikult on kolmnurgad ABC ja $A_1B_2C_2$ on sarnased tunnuse NNN põhjal. Väide kehtib kõikide kolmnurga liikide korral.

Näide 11. Tõestame, et kui AA_1, BB_1 ja CC_1 on teravnurkse kolmnurga ABC kõrgused ning punktid B_2 ja C_2 on vastavalt kõrguste BB_1 ja CC_1 keskpunktid, siis kolmnurgad ABC ja $A_1B_2C_2$ on sarnased.

Olgu siis kolmnurk ABC teravnurkne ja O selle kolmnurga kõrguste lõikepunkt. Olgu A_2 külje BC keskpunkt. Kuna $CB_1 \perp BB_1$ ja $BC_1 \perp CC_1$ ning A_2B_2 ja A_2C_2 on vastavalt kolmnurkade CBB_1 ja BCC_1 kesklõigud, siis

$$\angle A_2B_2O = \angle A_2C_2O = 90^\circ .$$



Seega punktid B_2 ja C_2 asuvad ringjoonel, mille diameeter on A_2O. Kuna $\angle OA_1A_2 = 90^\circ$, siis ka punkt A_1 paikneb samal ringjoonel. Järelikult

$$\angle A_1B_2C_2 = 180^\circ - \angle A_1A_2B_2 = \angle CBA$$

ning

$$\angle A_1C_2B_2 = \angle A_1A_2B_2 = \angle ACB.$$

Seega kolmnurgad ABC ja $A_1B_2C_2$ on sarnased tunnuse NNN põhjal.

Kõrgused ja kolmnurga pindala

Koolis kasutatakse kolmnurga pindala leidmiseks erinevaid valemeid. Esimesena võetakse kasutusele järgmises teoreemis sõnastatud valem.

Teoreem 12. *Kolmnurga pindala võrdub selle kolmnurga aluse ja alusele tõmmatud kõrguse poole korrutisega.*

Raskemate ülesannete lahendamisel on aga olulisem selle teoreemi otsene järeldus.

Järeldus 13. *Kolmnurga külje ja sellele tõmmatud kõrguse pikkuste korrutis on antud kolmnurga jaoks konstantne suurus. See tähendab, et kui a, b ja c on antud kolmnurga külgede pikkused ning h_a, h_b ja h_c neile tõmmatud kõrguste pikkused, siis*

$$ah_a = bh_b = ch_c.$$

Näide 14. Näitame, et leidub kolmnurk, mille kõik kõrgused on väiksemad kui 1 cm, aga pindala on suurem kui 1 m^2.

Vaatleme ristkülikut $ABCD$, kus $AB = 1$ cm ja $BC = 500$ m. Olgu O selle ristküliku diagonaalide lõikepunkt. Näitame, et kolmnurga AOD pindala on suurem kui 1 m^2. Selle kõrguseks on $1/2 \cdot AB = 1/2$ cm, aluseks on külg $AD = BC = 500$ m. Seega

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1/2\ \text{cm} \cdot 500\ \text{m}}{2} = \frac{5}{4}\ \text{m}^2 > 1\ \text{m}^2.$$

Täiendavaid tulemusi kolmnurga kõrguste kohta

Lause 15. *Mis tahes kolmnurgas pikemale küljele vastab lühem kõrgus.*

Tõestus. Olgu h_a ja h_b vastavalt kolmnurga külgedele a ja b tõmmatud kõrgused. Selle kolmnurga pindala S avaldub kujul

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2},$$

millest järeldub, et

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}.$$

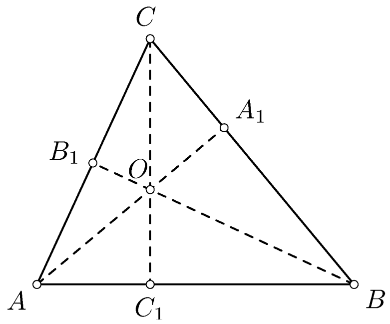
Seega kui $a > b$, siis $h_a < h_b$.

Anname nüüd tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et kolmnurga kolm, ühes punktis lõikuvat tseviaani, osutuksid selle kolmnurga kõrgusteks.

Teoreem 16. *Kui teravnurkse kolmnurga ABC külgedel BC, AC ja AB on vastavalt võetud punktid A_1, B_1 ja C_1 nii, et lõigud AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis O, siis need lõigud AA_1, BB_1 ja CC_1 on kolmnurga ABC kõrgusteks parajasti siis, kui*

$$AO \cdot OA_1 = BO \cdot OB_1 = CO \cdot OC_1.$$

Tõestus. Tõestame esmalt tarvilikkuse. Olgu O kolmnurga ABC kõrguste AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikepunkt. Siis on täisnurksed kolmnurgad AOB_1 ja BOA_1 sarnased (tunnuse NNN põhjal). Sellest järeldub, et



$$\frac{AO}{BO} = \frac{OB_1}{OA_1} \quad \Leftrightarrow \quad AO \cdot OA_1 = BO \cdot OB_1.$$

Analoogiliselt saame, et

$$\triangle AOC_1 \sim \triangle COA_1 \quad \text{ning} \quad AO \cdot OA_1 = CO \cdot OC_1.$$

Tõestame piisavuse. Olgu lõikude AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikepunkt O ja kehtigu võrdus

$$AO \cdot OA_1 = BO \cdot OB_1 = CO \cdot OC_1.$$

Siis jällegi on kolmnurgad AOB_1 ja BOA_1 sarnased, kuna

$$\frac{AO}{OB_1} = \frac{BO}{OA_1} \quad \text{ning} \quad \angle AOB_1 = \angle BOA_1.$$

Seega $\angle AB_1O = \angle BA_1O$. Analoogiliselt saame, et

$$\angle AC_1O = \angle CA_1O \quad \text{ning} \quad \angle BC_1O = \angle CB_1O.$$

Kuna

$$\angle AB_1O + \angle CB_1O = \angle CA_1O + \angle BA_1O = \angle BC_1O + \angle AC_1O = 180^\circ,$$

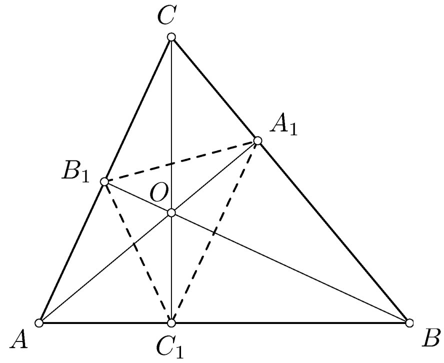
siis arvestades eelpool saadud nurkade võrdsusi saame, et

$$\angle AB_1O = \angle AC_1O = \angle BA_1O = \angle BC_1O = \angle CA_1O = \angle CB_1O = 90^\circ.$$

Viimane võrdus aga tähendabki, et AA_1, BB_1 ja CC_1 on kolmnurga ABC kõrgused ning O nende kõrguste lõikepunkt.

Kolmnurka, mille tippudeks on kõrguste aluspunktid selle kolmnurga külgedel, nimetatakse ka *ortotsentriliseks kolmnurgaks*.

Lause 17. *Teravnurkse kolmnurga* ABC *kõrgused* AA_1, BB_1 *ja* CC_1 *poolitavad ortotsentrilise kolmnurga* $A_1B_1C_1$ *nurki.*



Tõestus. Sellest, et kolmnurkade paarid ABC ja A_1B_1C ning ACB ja A_1C_1B on sarnased, järeldub, et

$$\angle B_1A_1C = \angle BAC = \angle BA_1C_1.$$

Seega saame, et

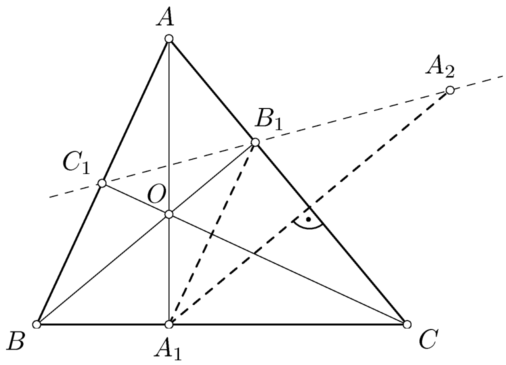
$$\angle B_1A_1A = 90^\circ - \angle B_1A_1C =$$

$$= 90^\circ - \angle BA_1C_1 = \angle C_1A_1A.$$

Analoogiliselt saab näidata, et

$$\angle A_1B_1B = \angle C_1B_1B \quad \text{ja} \quad \angle A_1C_1C = \angle B_1C_1C.$$

Näide 18. Tõestame, et kui AA_1, BB_1 ja CC_1 on teravnurkse kolmnurga ABC kõrgused, siis punktiga A_1 sümmeetrilised punktid sirgete AB ja AC suhtes asuvad sirgel B_1C_1.



Näitame, et punktiga A_1 sümmeetriline punkt A_2 sirge AC suhtes asub sirgel B_1C_1. Analoogiliselt saab näidata, et ka punktiga A_1 sümmeetriline punkt sirge AB suhtes asub samal sirgel. Kuna $BB_1 \perp AC$ ning $A_1A_2 \perp AC$, siis $BB_1 || A_1A_2$. Seega

$$\angle B_1A_1A_2 = \angle A_1B_1B.$$

Eespool toodud lausest järeldub, et kõrgus BB_1 poolitab nurga $A_1B_1C_1$, st

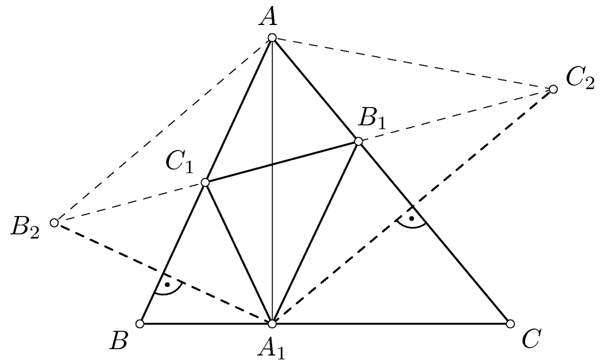
$$\angle C_1B_1B = \angle A_1B_1B = \angle B_1A_1A_2.$$

Lause tõestamiseks piisab näidata, et nurgad C_1B_1B ja $A_1A_2B_1$ on võrdsed. Kuna kolmnurk $A_1B_1A_2$ on võrdhaarne, siis tõepoolest

$$\angle A_1A_2B_1 = \angle B_1A_1A_2 = \angle C_1B_1B,$$

ning punktid C_1, B_1 ja A_2 asuvad ühel ja samal sirgel.

Teoreem 19. *Kolmnurkadest, mille tipud asuvad antud teravnurkse kolmnurga külgedel, on minimaalse ümbermõõduga selle kolmnurga ortotsentriline kolmnurk.*



Tõestus. Olgu A_1, B_1 ja C_1 teravnurkse kolmnurga ABC vastavatel külgedel BC, AC ja AB võetud suvalised sisepunktid. Olgu B_2 ja C_2 punktiga A_1 sümmeetrilised punktid vastavalt külgede AB ja AC suhtes.

Siis kolmnurga $A_1B_1C_1$ ümbermõõt P avaldub kujul

$$P = A_1C_1 + C_1B_1 + B_1A_1 = B_2C_1 + C_1B_1 + B_1C_2 \geqslant B_2C_2,$$

kusjuures võrdus leiab aset parajasti siis, kui sirge B_2C_2 läbib punkte C_1 ja B_1. Kuna sirged AB ja AC on vastavalt lõikude B_2A_1 ja C_2A_1 keskristsirged, siis kehtib võrdus $AB_2 = AA_1 = AC_2$, millest järeldub, et kolmnurk B_2AC_2 on võrdhaarne ning

$$\angle B_2AC_2 = 2\angle BAA_1 + 2\angle CAA_1 = 2\angle BAC.$$

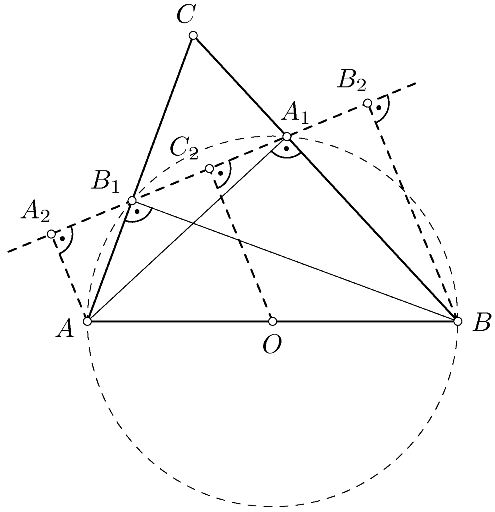
Sellest, et B_2C_2 on võrdhaarse kolmnurga alus, AB_2 on selle haar ning $\angle B_2AC_2 = 2\angle BAC$, järeldub võrdus $B_2C_2 = 2AB_2 \sin\angle BAC$. Kui h on kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrgus, siis

$$B_2C_2 = 2AB_2 \sin\angle BAC = 2AA_1 \sin\angle BAC \geqslant 2h \sin\angle BAC,$$

kusjuures siin võrdus leiab aset parajasti siis, kui A_1 on kolmnurga ABC kõrguse aluspunkt.

Kokkuvõttes saab öelda, et selleks, et kolmnurga $A_1B_1C_1$ ümbermõõt oleks minimaalne, peaks AA_1 olema kolmnurga ABC kõrguseks. Ülaltoodud tõestusest järeldub, et leidub parajasti üks minimaalse ümbermõõduga kolmnurk $A_1B_1C_1$, kuna selle kolmnurga kõik tipud on üheselt määratud (punktid B_1 ja C_1 asuvad sirgel B_2C_2 ning A_1 on kõrguse aluspunkt). Seega vahetades punktide A_1 ja B_1 (või C_1) rolli, jõuame selleni, et ka B_1 (või C_1) on kolmnurga ABC kõrguse aluspunkt. Järelikult minimaalse ümbermõõduga kolmnurk $A_1B_1C_1$ on ortotsentriline kolmnurk.

Lause 20. *Kui AA_1 ja BB_1 on teravnurkse kolmnurga ABC kõrgused ning AA_2 ja BB_2 on sirgele A_1B_1 tõmmatud ristlõigud, siis $A_1B_2 = A_2B_1$.*



Tõestus. Kuna $\angle AA_1B$ ja AB_1B on täisnurgad, siis punktid A, B, A_1 ja B_1 asuvad ühel ja samal ringjoonel α, mille keskpunktiks on külje AB keskpunkt O. Olgu C_2 punktist O sirgele A_1B_1 tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Kuna lõik A_1B_1 on ringjoone α kõõl ja $OC_2 \perp A_1B_1$, siis OC_2 on lõigu A_1B_1 keskristsirge. Seega $A_1C_2 = B_1C_2$. Kuna OC_2 on trapetsi ABB_2A_2 kesklõik, siis kehtib võrdus $A_2C_2 = B_2C_2$. Järelikult

$$A_1B_2 = B_2C_2 - C_2A_1 = A_2C_2 - C_2B_1 = A_2B_1.$$

Kõrgustega seotud kolmnurkade võrdsuse tunnused

Teoreem 21. *Kaks kolmnurka on võrdsed, kui kehtib üks järgmistest tingimustest:*

a) ühe kolmnurga külg ja teistele külgedele tõmmatud kõrgused on vastavalt võrdsed teise kolmnurga küljega ja selle teistele külgedele tõmmatud kõrgustega;

b) ühe kolmnurga kaks külge ja kolmandale küljele tõmmatud kõrgus on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega ja kolmandale küljele tõmmatud kõrgusega;

c) ühe kolmnurga kolm kõrgust on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme kõrgusega.

Osa a) tõestus. Olgu AA ja BB kolmnurga ABC ning A_1A_1 ja B_1B_1 kolmnurga $A_1B_1C_1$ kõrgused. Vastavalt teoreemi eeldustele olgu

$$AA = A_1A_1, \quad BB = B_1B_1 \quad \text{ja} \quad AB = A_1B_1.$$

Siis täisnurksed kolmnurgad AAB ja $A_1A_1B_1$ ning BBA ja $B_1B_1A_1$ on vastavalt võrdsed kui täisnurksed kolmnurgad, millel on vastavalt võrdsed üks kaatet ja hüpotenuusid. Nende kolmnurkade võrdsusest järeldub ka vastavate nurkade ABA ja $A_1B_1A_1$ ning BAB ja $B_1A_1B_1$ võrdsus. Seega

$$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1 \quad \text{ja} \quad \angle BAC = \angle B_1A_1C_1.$$

Järelikult kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on võrdsed tunnuse NKN põhjal.

Kolmnurga kõrgustega seotud täiendavad võrdused ja võrratused

a) Võrdused

Eelnevalt tõestatud tulemuste põhjal saame sõnastada järgmise järelduse.

Järeldus 22. *Kui a, b ja c on antud kolmnurga külgede pikkused, h_a, h_b ja h_c on nendele külgedele tõmmatud vastavate kõrguste pikkused, α, β ja γ on antud külgede vastasnurkade suurused ning S on selle kolmnurga pindala, siis kehtivad järgmised võrdused:*

a) $h_a = \dfrac{2S}{a}$;

b) $h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta$;

c) $h_a : h_b : h_c = \dfrac{1}{a} : \dfrac{1}{b} : \dfrac{1}{c}$.

Lause 23. *Kui AA_1 on kolmnurga ABC kõrgus, siis kehtivad võrdused*

a) $AB^2 - AC^2 = BA_1^2 - CA_1^2$;

b) $AB^2 - AC^2 = A_2B^2 - A_2C^2$, *kus A_2 on kõrguse AA_1 suvaline punkt.*

Osa a) tõestus. Täisnurksetest kolmnurkadest AA_1B ja AA_1C vastavalt saame, et

$$AA_1^2 = AB^2 - BA_1^2 \quad \text{ja} \quad AA_1^2 = AC^2 - CA_1^2,$$

millest järeldubki väide.

Osa b) tõestus. Analoogiliselt osas a) toodud tõestusele saame, et

$$A_2A_1^2 = A_2B^2 - BA_1^2 = A_2C^2 - CA_1^2,$$

millest järeldub, et

$$BA_1^2 - CA_1^2 = A_2B^2 - A_2C^2 \quad \Leftrightarrow \quad AB^2 - AC^2 = A_2B^2 - A_2C^2.$$

Lause 24. *Kui AA_1 ja BB_1 on kolmnurga ABC kõrgused, siis kehtib võrdus*

$$A_1C \cdot BC = B_1C \cdot AC.$$

Tõestus. Täisnurksetest kolmnurkadest AA_1C ja BB_1C saame nii terav-, täis-, kui ka nürinurkse kolmnurga ABC juhul

$$|\cos \angle ACB| = \frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}.$$

Lause 25. *Kui AA_1, BB_1 ja CC_1 on kolmnurga ABC kõrgused, siis kehtivad võrdused*

a) $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2$;

b) $AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = AC_1 \cdot CB_1 \cdot BA_1 = A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1$.

Osa a) tõestus. Teame, et kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} AB^2 - AC^2 &= BA_1^2 - CA_1^2, \\ BC^2 - AB^2 &= CB_1^2 - AB_1^2, \\ AC^2 - BC^2 &= AC_1^2 - BC_1^2. \end{aligned}$$

Kui liidame vastavalt nende võrduste vasakud ja paremad pooled, siis saamegi tõestatava võrduse.

Osa b) tõestus. Olgu kolmnurga ABC nurgad standardselt tähistatud sümbolitega α, β ja γ. Märgime, et kui kolmnurk ABC on täisnurkne (oletame, et $\gamma = 90^\circ$), siis tipp C langeb kokku punktidega A_1 ja B_1 ning vaadeldav võrdus kehtib, kuna

$$CA_1 = CB_1 = A_1B_1 = 0.$$

Kui kolmnurk ABC ei ole täisnurkne, siis saame, et

$$\begin{aligned} AB_1 = AB \cdot |\cos\alpha| \quad &\text{ja} \quad AC_1 = AC \cdot |\cos\alpha|, \\ BA_1 = AB \cdot |\cos\beta| \quad &\text{ja} \quad BC_1 = BC \cdot |\cos\beta|, \\ CA_1 = AC \cdot |\cos\gamma| \quad &\text{ja} \quad CB_1 = BC \cdot |\cos\gamma|. \end{aligned}$$

Kuna kolmnurgad ABC ja A_1B_1C on sarnased ning sarnasustegur on $|\cos\angle ACB|$, siis

$$\frac{A_1B_1}{AB} = |\cos\gamma| \quad \text{ehk} \quad A_1B_1 = AB \cdot |\cos\gamma|.$$

Analoogiliselt saab näidata, et kehtivad võrdused

$$A_1C_1 = AC \cdot |\cos\beta| \quad \text{ja} \quad B_1C_1 = BC \cdot |\cos\alpha|.$$

Seega avaldised $AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1$, $AC_1 \cdot CB_1 \cdot BA_1$ ja $A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1$ on võrdsed avaldisega

$$AB \cdot AC \cdot BC \cdot |\cos\alpha| \cdot |\cos\beta| \cdot |\cos\gamma|.$$

b) Võrratused

Lause 26. *Mis tahes kolmnurga kõrguste pikkuste summa on väiksem selle kolmnurga ümbermõõdust.*

Tõestus. Kui a, b ja c on antud kolmnurga külgede pikkused ning h_a, h_b ja h_c on nendele külgedele tõmmatud vastavate kõrguste pikkused, siis ilmselt kehtivad järgmised võrratused:

$$h_a \leqslant b, \quad h_b \leqslant c \quad \text{ja} \quad h_c \leqslant a,$$

kusjuures vähemalt üks nendest võrratustest on range. Järelikult

$$h_a + h_b + h_c < a + b + c.$$

Näide 27. Tõestame, et kui kolmnurga kaks kõrgust on suuremad kui 1, siis kolmnurga pindala on suurem kui 1/2.

Olgu $h_a > 1$ ja $h_b > 1$. Siis $a \geqslant h_b > 1$ ja

$$S = \frac{ah_a}{2} > \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Lause 28. *Kui $a < b$, siis $a + h_a < b + h_b$.*

Tõestus. Olgu S antud kolmnurga pindala. Kuna

$$h_a = \frac{2S}{a}, \quad h_b = \frac{2S}{b} \quad \text{ja} \quad S \leqslant \frac{ab}{2},$$

siis saame, et

$$h_a - h_b = 2S \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 2S \cdot \frac{b-a}{ab} \leqslant b - a.$$

Näide 29. Tõestame, et kui kolmnurga kaks kõrgust on pikkustega 12 ja 20, siis kolmanda kõrguse pikkus on väiksem, kui 30.

Kolmnurga võrratusest saame, et $c > |b - a|$. Lisaks teame, et kehtivad võrdused $a = 2S/h_a, b = 2S/h_b$ ja $c = 2S/h_c$. Teeme vastavad asendused ja saame, et kehtib võrratus

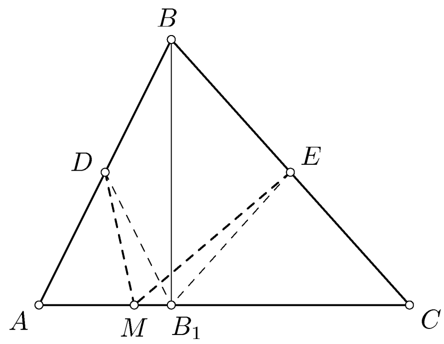
$$\frac{1}{h_c} > \left|\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a}\right|.$$

Seega antud juhul saame, et

$$\frac{1}{h_c} > \left|\frac{1}{20} - \frac{1}{12}\right| = \frac{1}{30}$$

ehk $h_c < 30$.

Näide 30. Olgu D ja E teravnurkse kolmnurga ABC vastavalt külgede AB ja BC keskpunktid ning M külje AC mis tahes sisepunkt. Tõestame, et kui $MD < AD$, siis $ME > EC$.



Olgu BB_1 kolmnurga ABC kõrgus. Siis $AD = B_1D$ ja $CE = B_1E$ (kuna täisnurkses kolmnurgas hüpotenuusile tõmmatud mediaan on hüpotenuusist kaks korda lühem). Kui kehtib võrratus $MD < AD$, siis punkt M asub lõigul AB_1. See tähendab, et punkt M asub väljaspool lõiku CB_1. Järelikult kehtib võrratus $ME > EC$.