5. Mediaanidega, nurgapoolitajatega ja kõrgustega seotud piisavad ja tarvilikud tingimused selleks, et kolmnurk oleks võrdkülgne, võrdhaarne või täisnurkne

Koostanud Maksim Ivanov
TÜ Teaduskool

Mediaaniga seotud piisavad ja tarvilikud tingimused selleks, et kolmnurk oleks võrdkülgne, võrdhaarne või täisnurkne

Osutub, et kolmnurga mediaanidega seotud lõikude ja nurkade abil on võimalik määrata kolmnurga liiki. Alljärgnevas toome mõned näited sellistest võimalustest.

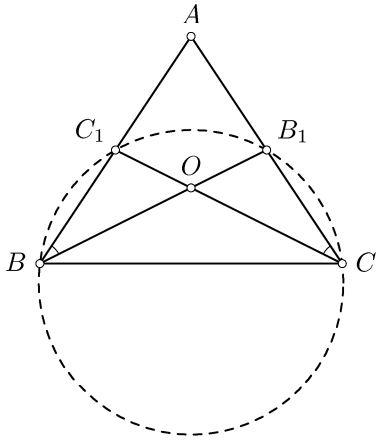
Olgu kolmnurgas ABC tõmmatud mediaanid BB_1 ja CC_1 ning olgu O nende lõikepunkt.

Teoreem 1. *Kolmnurk ABC on võrdhaarne tipunurgaga A ja alusega BC parajasti siis, kui on täidetud üks järgmistest tingimustest:*

a) $\angle ABB_1 = \angle ACC_1$;

b) $BB_1 = CC_1$;

c) $AO \perp B_1C_1$.



Tõestus. **Osa a) tõestus.** Tarvilikkuse tõestamiseks piisab märkida seda, et B_1C_1 on kolmnurgas ABC kesklõiguks ja BCB_1C_1 on võrdhaarne trapets, mille diagonaalid BB_1 ja CC_1 on võrdsed.

Seega kolmnurgad BB_1C_1 ja CC_1B_1 ning ka nende kolmnurkade vastavad nurgad on võrdsed. Järelikult $\angle ABB_1 = \angle ACC_1$.

Piisavuse näitamiseks oletame, et nurgad ABB_1 ja ACC_1 on võrdsed. Siis BCB_1C_1 on kõõlnelinurk, kuna võrdsed nurgad toetuvad ühele ja samale kõõlule B_1C_1. Järelikult on piirdenurgad BB_1C_1 ja BCC_1 võrdsed (toetuvad kaarele BC_1). Teiselt poolt tingimuse $B_1C_1||BC$ tõttu on $\angle BB_1C_1 = \angle CBB_1$ (põiknurgad). Kokkuvõttes saame, et

$$\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = \angle ACC_1 + \angle BB_1C_1 = \angle ACC_1 + \angle BCC_1 = \angle ACB$$

ehk kolmnurk ABC on võrdhaarne.

Osa b) tõestus. Tarvilikkus on näidatud eelmise osa tõestamisel. Olgu nüüd $BB_1 = CC_1$. Siis kehtivad järgmised võrdused:

$$OB_1 = \frac{1}{3}BB_1 = \frac{1}{3}CC_1 = OC_1 \qquad \text{ja} \qquad OB = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}CC_1 = OC.$$

Seega on kolmnurgad BOC_1 ja COB_1 võrdsed tunnuse KNK järgi. Järelikult

$$AB = 2BC_1 = 2CB_1 = AC.$$

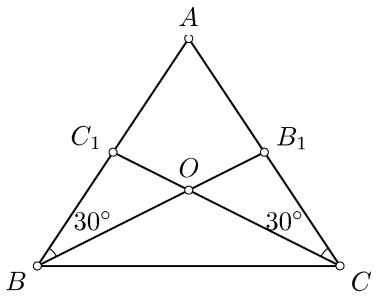
Osa c) tõestus. Kuna $B_1C_1||BC$ ja võrdhaarses kolmnurgas tipunurgast tõmmatud mediaan on risti selle kolmnurga alusega (mediaan ühtib kõrgusega), siis ka $AO \perp B_1C_1$ ja tarvilikkus on tõestatud.

Kui $AO \perp B_1C_1$, siis tipust A tõmmatud mediaan on risti kolmnurga alusega BC (kuna $B_1C_1||BC$) ehk mediaan on samas ka kõrguseks. Selline olukord on võimalik ainult võrdhaarses kolmnurgas. □

Teoreem 2. *Kolmnurk ABC, mille mediaanid on BB_1 ja CC_1, on võrdkülgne parajasti siis, kui*

$$\angle ABB_1 = \angle ACC_1 = 30^\circ.$$

Tõestus. Esialgu tõestame tarvilikkuse. Kui kolmnurk ABC on võrdkülgne, siis selle mediaanid osutuvad ka nurgapoolitajateks, st



$$\angle ABB_1 = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

ja

$$\angle ACC_1 = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

Tõestame piisavuse. Eeldame, et $\angle ABB_1 = \angle ACC_1 = 30^\circ$ ja näitame, et kolmnurk ABC on võrdkülgne.

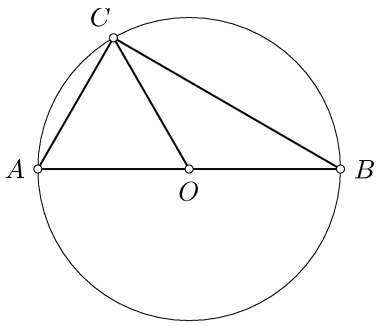
Teame, et kolmnurk on võrdhaarne parajasti siis, kui $\angle ABB_1 = \angle ACC_1$. Samuti teame, et võrdhaarse kolmnurga haaradele tõmmatud mediaanide pikkused on võrdsed. Seega $AB = AC$ ja $BB_1 = CC_1$.

Olgu O mediaanide lõikepunkt. Vaatleme kolmnurka OCB_1. Kuna $BB_1 = CC_1$ ja O jaotab mediaane suhtes $2:1$ tipust alates, siis $OC = 2OB_1$. Järelikult kolmnurk OCB_1 on täisnurkne, kuna siinusteoreemi kaudu saame

$$\sin \angle OB_1C = 2 \cdot \sin 30^\circ = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \angle OB_1C = 90^\circ.$$

Seega mediaan BB_1 osutub kõrguseks ning $BC = BA$, mis koos eelnevalt saadud võrdusega $AB = AC$ tõestabki, et kolmnurk ABC on võrdkülgne. □

Teoreem 3. *Kolmnurga sisenurk on täisnurk parajasti siis, kui selle nurga tipust tõmmatud mediaan on kaks korda lühem küljest, millele ta on tõmmatud.*



Tõestus. Olgu kolmnurk ABC täisnurkne (täisnurgaga ACB), siis hüpotenuusi AB keskpunkt O, kui täisnurkse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt, asub tippudest võrdsel kaugusel. Seega mediaan

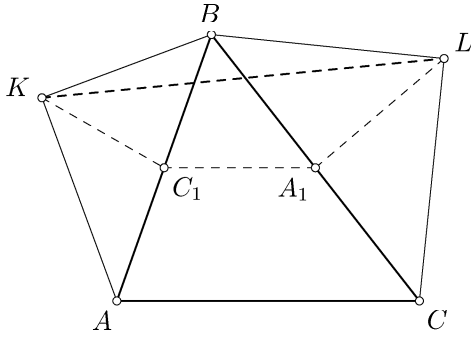
$$CO = AO = BO = \frac{1}{2}AB.$$

Tõestame piisavuse. Olgu antud kolmnurk ABC. Eeldame, et CO on selline kolmnurga ABC mediaan, et $CO = (1/2) \cdot AB$. Viimane aga tähendab, et kolmnurga tipud asuvad ringjoonel keskpunktiga O ja raadiusega $r = CO = AO = BO$. Seega AB on selle ringjoone diameeter ja nurk ACB, mis toetub diameetrile, on suurusega 90°. □

Näide 4. Olgu antud kolmnurk ABC ning sellised punktid K ja L, et

$$\angle AKB = \angle BLC = 90^\circ.$$

Tõestame, et lõigu KL pikkus ei ole suurem kolmnurga ABC poolest ümbermõõdust.



Olgu A_1 ja C_1 vastavalt külgede BC ja AB keskpunktid. Kuna A_1C_1 on kolmnurga ABC kesklõik, siis $A_1C_1 = (1/2) \cdot AC$.

Kuna täisnurkses kolmnurgas täisnurgast tõmmatud mediaani pikkus on kaks korda väiksem hüpotenuusi pikkusest, siis

$$KC_1 = \frac{1}{2}AB \quad \text{ja} \quad LA_1 = \frac{1}{2}BC.$$

Kokkuvõttes saame, et

$$KC_1 + C_1A_1 + A_1L = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = p,$$

kus p on kolmnurga ABC pool ümbermõõdust. On selge, et murdjoone KC_1A_1L pikkus ei ole väiksem lõigu KL pikkusest ehk lõigu KL pikkus ei ole suurem kolmnurga poolest ümbermõõdust. On ilmne, et ülalpool antud tõestus ei sõltu punktide K ja L asukohast tasandil kolmnurga suhtes.

Nurgapoolitajaga seotud piisavad ja tarvilikud tingimused selleks, et kolmnurk oleks võrdhaarne või täisnurkne

Teoreem 1. *Kui kolmnurga ABC nurgapoolitajate BB_1 ja CC_1 lõikepunkt on O, siis kolmnurk ABC on võrdhaarne tipunurgaga A ja alusega BC parajasti siis, kui on täidetud üks järgmistest tingimustest:*

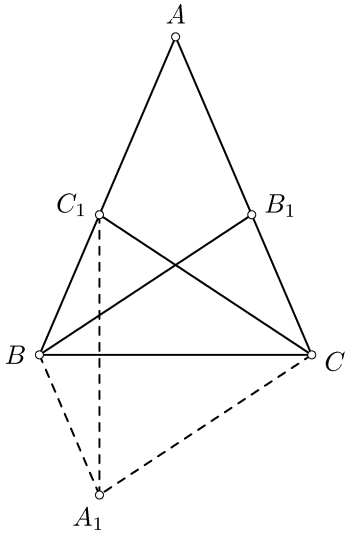
a) $BB_1 = CC_1$ *(Steiner-Lehmus'i teoreem);*

b) $\angle AB_1C_1 = 2\angle BB_1C_1$ *ja* $\angle AC_1B_1 = 2\angle CC_1B_1$;

c) $AO \perp B_1C_1$.

Tõestus. **Teoreemi a) osa tõestus.** Tingimuse a) tarvilikkus. Kui kolmnurk ABC on võrdhaarne tipunurgaga A ja alusega BC, siis kolmnurkade BB_1C ja CC_1B võrdsusest järeldub nurgapoolitajate BB_1 ja CC_1 võrdsus.

Tingimuse a) piisavus. Olgu BB_1 ja CC_1 kolmnurga ABC võrdsed nurgapoolitajad. Olgu punkt A_1 niisugune, et $BA_1||CB_1$ ja $CA_1||BB_1$. Siis tekib rööpkülik BB_1CA_1. Kuna $CC_1 = BB_1 = CA_1$, siis kolmnurk CC_1A_1 on võrdhaarne.



Olgu $\angle ACB = 2\gamma$ ja $\angle ABC = 2\beta$. Oletame vastuväiteliselt, et külgede AB ja AC pikkused ei ole võrdsed. Siis üldisust kitsendamata võime eeldada, et näiteks $AB > AC$. See tähendab, et siis $\gamma > \beta$.

Vaatleme kahte kolmnurka BCC_1 ja BCA_1. Lõik BC on kolmnurkade ühine külg, $CC_1 = CA_1$ ja nurkade BCC_1 ja BCA_1 vahel kehtib seos

$$\angle BCC_1 = \gamma > \beta = \angle CBB_1 = \angle BCA_1,$$

kuna nurgad CBB_1 ja BCA_1 on põiknurgad. Kuna suuremale nurgale, mis on moodustatud kahe võrdse külje abil, vastab ka suurem külg, siis $BC_1 > BA_1$. Järelikult, $\angle BA_1C_1 > \angle BC_1A_1$. Kuna võrdhaarse kolmnurga CC_1A_1 alusnurgad CC_1A_1 ja CA_1C_1 on võrdsed, siis kehtib järgmine võrratus

$$\angle BA_1C = \angle CA_1C_1 + \angle BA_1C_1 > \angle CC_1A_1 + \angle BC_1A_1 = \angle BC_1C.$$

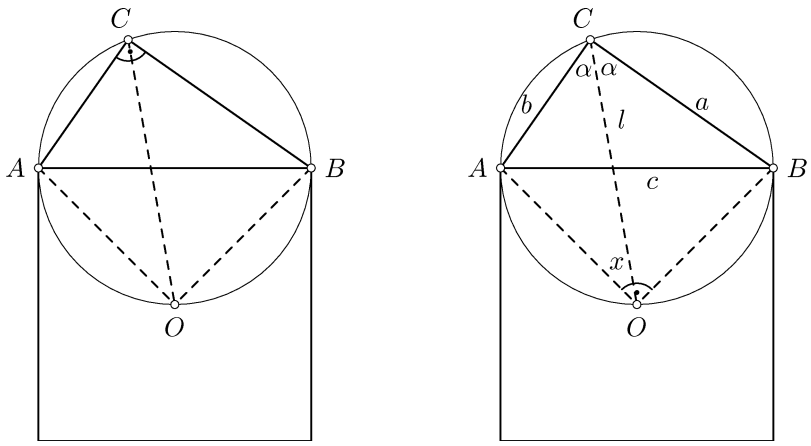
Pidades silmas rööpküliku vastasnurkade võrdsust (s.t. $\angle BA_1C = \angle BB_1C$), saame viimasest võrratusest, et

$$180^\circ - 2\alpha - \beta > 180^\circ - \gamma - 2\beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta > \gamma,$$

mis on vastuolus eeldusega $\gamma < \beta$. Seega $AB = AC$ ja kolmnurk ABC on võrdhaarne, mida oligi vaja tõestada. □

Teoreem 2. *Kui ABC on isekülgne kolmnurk, mille küljele AB on konstrueeritud välisruut keskpunktiga O, siis kolmnurk ABC on täisnurkne (täisnurgaga ACB) parajasti siis, kui CO on nurga ACB nurgapoolitaja.*

Tõestus. Tõestame esmalt tarvilikkuse. Olgu kolmnurk ABC täisnurkne, s.t. $\angle ACB = 90^\circ$. Kuna ruudu diagonaalid on alati risti ja võrdsed, siis ka $\angle AOB = 90^\circ$ ja $AO = BO$. Sellest järeldub, et $ACBO$ on kõõlnelinurk (vastasnurkade summa on 180 kraadi). Nurgad ACO ja BCO toetuvad võrdsetele kõõludele AO ja BO, seega on need võrdsed. Järelikult, CO on nurga ACB nurgapoolitaja. Piisavus. Olgu ABC isekülgne kolmnurk ja CO nurga ACB nurgapoolitaja.



Kasutame järgmisi tähistusi:

$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c, \quad CO = l, \quad \angle ACO = \angle BCO = \alpha.$$

Piisavuse tõestamiseks on vaja näidata, et $\alpha = 45^\circ$. Teame, et $\angle AOB = 90^\circ$. Olgu $\angle AOC = x$, siis $\angle BOC = 90^\circ - x$. Pythagorase teoreemi kohaselt

$$AO = BO = \frac{1}{\sqrt{2}}c.$$

Kasutame nüüd koosinusteoreemi kolmnurkade ACO ja BCO jaoks. Saame külgede a ja b ($a \neq b$) leidmiseks süsteemi

$$\begin{cases} b^2 = \frac{1}{2}c^2 + l^2 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}c \cdot l \cdot \cos x \\ a^2 = \frac{1}{2}c^2 + l^2 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}c \cdot l \cdot \cos(90^\circ - x) \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{b^2 - a^2}{2l} = \frac{1}{\sqrt{2}}c \cdot (\sin x - \cos x)$$

ning külgede AO ja BO leidmiseks süsteemi

$$\begin{cases} \frac{1}{2}c^2 = b^2 + l^2 2b \cdot l \cdot \cos\alpha \\ \frac{1}{2}c^2 = a^2 + l^2 2a \cdot l \cdot \cos\alpha \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{2l} = \cos\alpha.$$

Kokkuvõttes saame, et

$$(b-a) \cdot \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}c \cdot (\sin x - \cos x).$$

Samade kolmnurkade jaoks, kasutades siinusteoreemi, saame

$$\begin{cases} \frac{b}{\sin x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}c}{\sin\alpha} \\ \frac{a}{\sin(90^\circ - x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}c}{\sin\alpha} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Võrreldes siinus- ja koosinusteoreemide abil saadud tulemusi, saame

$$\begin{aligned} (b-a) \cdot \cos\alpha &= \frac{a \cdot \sin\alpha}{\cos x} \cdot (\sin x - \cos x) \quad \Leftrightarrow \\ \frac{b}{a} - 1 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right) \quad \Leftrightarrow \\ \sin\alpha = \cos\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha = 45^\circ. \end{aligned}$$

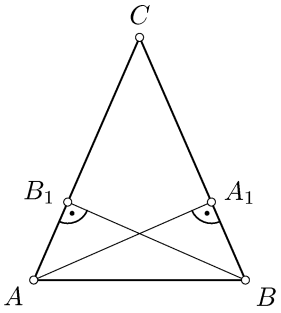
□

Kõrgustega seotud piisavad ja tarvilikud tingimused selleks, et kolmnurk oleks võrdkülgne, võrdhaarne või täisnurkne

Teoreem 1. *Kolmnurk on võrdhaarne parajasti siis, kui on täidetud üks järgmistest tingimustest:*

a) kolmnurga kaks kõrgust on võrdsed;

b) kolmnurga kõrguste lõikepunkti ja kahte tippu ühendavad lõigud on võrdsed.



Osa a) tõestus. Tarvilikkus. Olgu kolmnurk ABC võrdhaarne, kusjuures $AC = BC$, ning AA_1 ja BB_1 selle kolmnurga kõrgused. Sellest, et võrdhaarse kolmnurga alusnurgad $\angle ABC = \angle ABA_1$ ja $\angle BAC = \angle BAB_1$ on võrdsed ning täisnurksetel kolmnurkadel AA_1B ja BB_1A on ühine külg AB, saame, et kolmnurgad AA_1B ja BB_1A on võrdsed tunnuse NKN põhjal. Seega ka võrdsete kolmnurkade vastavad küljed on võrdsed, st $AA_1 = BB_1$.

Piisavus. Olgu nüüd kolmnurga ABC kõrgused võrdsed, st $AA_1 = BB_1$. Seega kolmnurgad CA_1A ja CB_1B on võrdsed tunnuse NKN põhjal, kuna

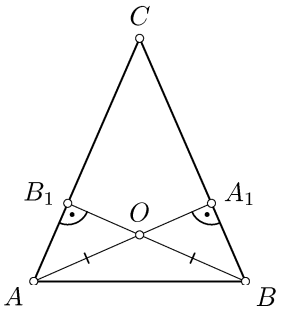
$$\angle CA_1A = \angle CB_1B = 90^\circ,\ \ AA_1 = BB_1,\ \ \angle CAA_1 = \angle CBB_1 = 90^\circ - \angle ACB.$$

Järelikult $AC = BC$ ja kolmnurk ABC on võrdhaarne.

Osa b) tõestus. Tarvilikkus. Olgu kolmnurk ABC võrdhaarne ($AC = BC$), ning O selle kolmnurga kõrguste AA_1 ja BB_1 lõikepunkt. Näitame, et $AO = BO$. Teoreemi *a*) osa tarvilikkuse tõestusest teame, et kolmnurgad AA_1B ja BB_1A on võrdsed. Seega

$$AB_1 = BA_1 \quad \text{ja} \quad \angle B_1AO = \angle A_1BO,$$

millest saame, et kolmnurgad AB_1O ja BA_1O on võrdsed tunnuse NKN põhjal. Järelikult $AO = BO$.



Piisavus. Olgu nüüd $AO = BO$. Siis kolmnurk AOB on võrdhaarne, st $\angle BAO = \angle ABO$. Kuna

$$\angle ABC = 90^\circ - \angle BAO \quad \text{ja} \quad \angle BAC = 90^\circ - \angle ABO,$$

siis $\angle ABC = \angle BAC$ ning kolmnurk ABC on võrdhaarne.

Näide 2. Tõestame, et kui teravnurkse kolmnurga kõrguste lõikepunkt jaotab kõrgused ühes ja samas suhtes, siis etteantud kolmnurk on võrdkülgne.

Olgu O teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikepunkt. Kuna O jaotab kõrgused AA_1 ja BB_1 ühes ja samas suhtes, siis kehtib võrdus

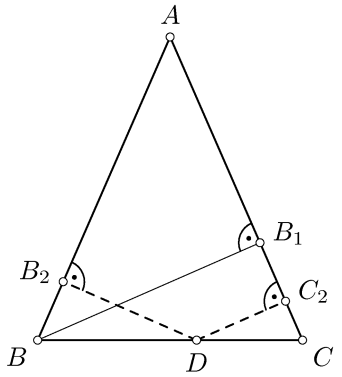
$$A_1O \cdot BO = B_1O \cdot AO.$$

Teiselt poolt teame, et kehtib võrdus $AO \cdot A_1O = BO \cdot B_1O$. Järelikult $AO = BO$, $A_1O = B_1O$ ja $AA_1 = BB_1$. Kuna kõrgused on omavahel võrdsed, siis tegemist on võrdhaarse kolmnurgaga ehk $CA = CB$.

Analoogiliselt saame, et ka $BC = BA$. Kokkuvõttes saame, et kolmnurk ABC on võrdkülgne.

Lause 3. *Kui võrdhaarse kolmnurga alusel on võetud suvaline sisepunkt, siis sellest punktist kolmnurga haaradele tõmmatud ristlõikude pikkuste summa võrdub selle kolmnurga haarale tõmmatud kõrguse pikkusega.*

Tõestus. Olgu D võrdhaarse kolmnurga ABC aluse BC suvaline sisepunkt, DB_2 ja DC_2 vastavalt külgedele AB ja AC tõmmatud ristlõigud ning BB_1 kolmnurga haarale tõmmatud kõrgus. Siis kolmnurkade ABC, ABD ja ACD pindalade vahel leiab aset järgmine seos:

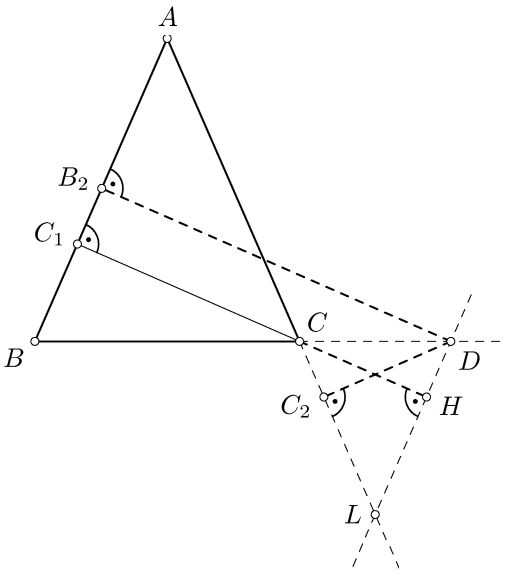


$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} \quad \Leftrightarrow \\ \frac{AC \cdot BB_1}{2} &= \frac{AB \cdot DB_2}{2} + \frac{AC \cdot DC_2}{2} \quad \Leftrightarrow \\ BB_1 &= DB_2 + DC_2, \end{aligned}$$

mida oligi vaja tõestada.

Lause 4. *Kui võrdhaarse kolmnurga aluse pikendusel on võetud suvaline punkt, siis sellest punktist kolmnurga haaradele või nende pikendustele tõmmatud ristlõikude pikkuste vahe võrdub selle kolmnurga haarale tõmmatud kõrguse pikkusega.*

Tõestus. Olgu D võrdhaarse kolmnurga ABC aluse BC pikendusel üle punkti C võetud suvaline punkt, DB_2 ja DC_2 vastavalt külgedele AB ja AC või nende pikendustele tõmmatud ristlõigud ning CC_1 kolmnurga haarale tõmmatud kõrgus.

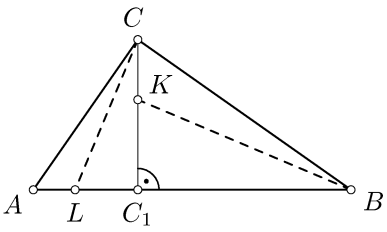


Tõmbame läbi punkti D küljega AB paralleelse sirge s. Olgu L sirgete s ja AC lõikepunkt. Ilmselt on kolmnurgad BAC ja DLC sarnased, seega kolmnurk DLC on samuti võrdhaarne. Kui CH on kolmnurga DLC kõrgus, siis punktid C_1, C ja H asuvad ühel ja samal sirgel ning $CH = DC_2$. Seega

$$DB_2 - DC_2 = HC_1 - CH = CC_1.$$

Lause 5. *Kui CC_1 on täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile tõmmatud kõrgus ning punktid K ja L on vastavalt niisugused lõikude CC_1 ja AC_1 sisepunktid, et $\frac{CK}{CC_1} = \frac{AL}{AC_1}$, siis $BK \perp CL$.*

Tõestus. Tingimus $\frac{CK}{CC_1} = \frac{AL}{AC_1}$ on samaväärne järgmiste võrdustega:



$$\frac{CK}{CC_1} = \frac{AL}{AC_1} \Leftrightarrow \frac{CC_1}{AC_1} = \frac{CK}{AL} \Leftrightarrow \frac{CC_1}{AC_1} = \frac{CC_1 - CK}{AC_1 - AL} \Leftrightarrow \frac{CC_1}{AC_1} = \frac{C_1K}{C_1L},$$

millest järeldub, et $KL||AC$. Kuna $AC \perp BC$, siis ka $KL \perp BC$. Seega K on kolmnurga BCL kõrguste lõikepunkt. Järelikult $BK \perp CL$.

Anname nüüd tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et kolmnurk oleks täisnurkne kolmnurk.

Olgu kolmnurgas ABC tõmmatud kõrgus CC_1.

Teoreem 6. *Kolmnurk ABC on täisnurkne täisnurgaga ACB parajasti siis, kui*

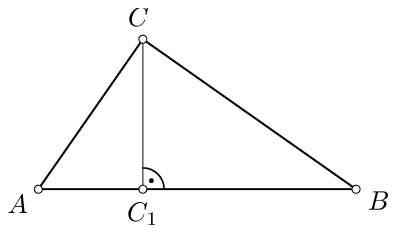
$$CC_1^2 = AC_1 \cdot BC_1.$$

Tõestus. Tarvilikkus. Kasutades Pythagorase teoreemi täisnurksete kolmnurkade AC_1C, ACB ja BC_1C, saame

$$CC_1^2 = AC^2 - AC_1^2 = AB^2 - BC^2 - AC_1^2 =$$

$$= (AC_1 + BC_1)^2 - (CC_1 + BC_1)^2 - AC_1^2 = 2AC_1 \cdot BC_1 CC_1^2.$$

Seega tõepoolest on õige võrdus $CC_1^2 = AC_1 \cdot BC_1$. Olgu märgitud, et seda osa teoreemist tuntakse koolis ka *kõrguse teoreemi* nime all. Tingimuse piisavust selleks, et kolmnurk oleks täisnurkne, tavaliselt koolis ei vaadelda.



Piisavus. Kehtigu nüüd võrdus $CC_1^2 = AC_1 \cdot BC_1$. Näitame, et kolmnurk ABC on täisnurkne. Kuna CC_1 on kolmnurga kõrgus, siis saame kasutada Pythagorase teoreemi kolmnurkade AC_1C ja BC_1C jaoks:

$$AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 = AC_1^2 + AC_1 \cdot BC_1 = AC_1 \cdot (AC_1 + BC_1) = AC_1 \cdot AB$$

ning analoogiliselt

$$BC^2 = BC_1 \cdot AB.$$

Liidame saadud võrdused

$$AC^2 + BC^2 = AC_1 \cdot AB + BC_1 \cdot AB = AB \cdot (AC_1 + BC_1) = AB^2.$$

Kuna kolmnurga ABC kohta kehtib Pythagorase teoreem, siis see kolmnurk on täisnurkne (täisnurgaga ACB).

Teoreem 7. *Kui CC_1 on kolmnurga ABC kõrgus, siis nurk ACB on täisnurk parajasti siis, kui*

$$AC^2 = AC_1 \cdot AB \quad \textit{ja} \quad BC^2 = BC_1 \cdot BA.$$

Tõestus. Esmalt näitame, et antud tingimuste korral punkt C_1 on külje AB sisepunkt. Seejärel näitame, et need tingimused on samaväärsed tingimusega $CC_1^2 = AC_1 \cdot BC_1$, mis on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et kolmnurk oleks

täisnurkne.

Oletame vastuväiteliselt, et võrduste $AC^2 = AC_1 \cdot AB$ ja $BC^2 = BC_1 \cdot BA$ kehtivuse korral punkt C_1 ei ole külje AB sisepunkt. See tähendab, et kas nurk ABC või nurk BAC on nürinurk. Olgu $\angle ABC > 90^\circ$. Kuna täisnurkses kolmnurgas AC_1C hüpotenuusi AC pikkus on suurem selle kaateti AC_1 pikkusest, siis saame, et

$$AC^2 > AC_1^2 \quad \Rightarrow \quad AC^2 > AC_1 \cdot AC_1 > AC_1 \cdot AB,$$

mis on vastuolus eeldusega $AC^2 = AC_1 \cdot AB$. Kui nurk BAC on nürinurk, siis analoogiliselt saame, et

$$BC^2 > BC_1^2 \quad \Rightarrow \quad BC^2 > BC_1 \cdot AB,$$

mis on samuti vastuolus eeldusega $BC^2 = BC_1 \cdot BA$. Seega C_1 on külje AB sisepunkt. Seega on järgmised võrdused samaväärsed:

$$AC^2 = AC_1 \cdot AB \quad \Leftrightarrow \quad AC^2 = AC_1 \cdot (AC_1 + C_1B) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad AC^2 - AC_1^2 = AC_1 \cdot C_1B \quad \Leftrightarrow \quad CC_1^2 = AC_1 \cdot C_1B.$$

Analoogiliselt saab näidata, et

$$BC^2 = BC_1 \cdot BA \quad \Leftrightarrow \quad CC_1^2 = AC_1 \cdot C_1B.$$

Seega teoreem on tõestatud.

Koolis tõestatakse nn. *Eukleidese teoreem*, mis väidab, et täisnurkses kolmnurgas on kaateti ruut võrdne hüpotenuusi ja kaateti projektsiooni korrutisega. Pöördteoreemi koolis ei käsitleda. Äsja vaadeldud teoreem aga kujutabki endast nii Eukleidese teoreemi kui ka selle pöördteoreemi ühendamisel saadud teoreemi.

Järeldus 8. *Kui CC_1 on kolmnurga ABC kõrgus, siis nurk ACB on täisnurk parajasti siis, kui kehtib üks järgmistest võrdustest:*

a) $CC_1 = \dfrac{AC \cdot BC}{AB}$ *ehk* $h_c = \dfrac{ab}{c}$;

b) $\dfrac{1}{CC_1^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{BC^2}$ *ehk* $\dfrac{1}{h_c^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

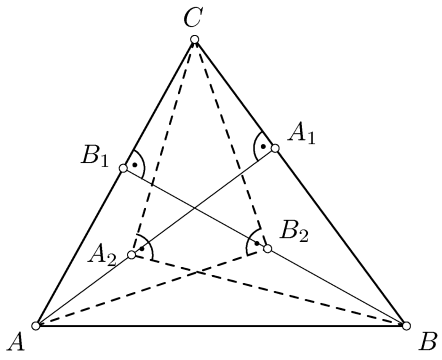
Lause 9. *Kui A_2 ja B_2 on vastavalt kolmnurga ABC kõrguste AA_1 ja BB_1 sellised sisepunktid, et*

$$\angle CA_2B = \angle CB_2A = 90^\circ,$$

siis $CA_2 = CB_2$.

Tõestus. Kuna A_2A_1 ja B_2B_1 on vastavalt täisnurksete kolmnurkade CA_2B ja CB_2A kõrgused, siis teoreemi põhjal kehtivad võrdused

$$CA_2^2 = CB \cdot CA_1 \quad \text{ja} \quad CB_2^2 = CA \cdot CB_1.$$



Sellest, et kolmnurgad A_1B_1C ja ABC on sarnased, järeldub seos

$$\frac{CB_1}{CB} = \frac{CA_1}{CA},$$

millest eelpool antud võrdusi arvestades saame, et

$$CA_1 \cdot CB = CB_1 \cdot CA \quad \Leftrightarrow \quad CA_2^2 = CB_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad CA_2 = CB_2.$$

Lause 10. *Kui täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus jaotab täisnurga kaheks mittevõrdseks osaks, siis täisnurga pikem lähiskaatet on suurema osanurga haaraks.*

Tõestus. Olgu CC_1 täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile tõmmatud kõrgus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $AC < BC$. Näitame siis, et $\angle ACC_1 < \angle BCC_1$. Kuna kolmnurgad ACC_1, CBC_1 ja ABC on sarnased, siis

$$AC < BC \quad \Leftrightarrow \quad \angle ABC < \angle BAC \quad \Leftrightarrow \quad \angle ACC_1 < \angle BCC_1.$$

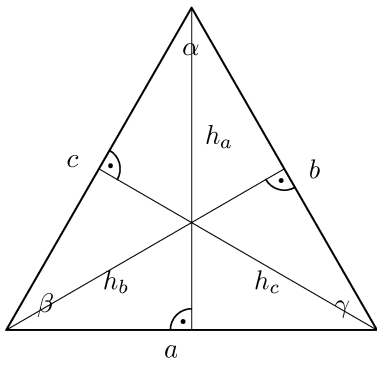
Olgu a, b ja c antud kolmnurga külgede pikkused, h_a, h_b ja h_c nendele külgedele tõmmatud vastavate kõrguste pikkused ning α, β ja γ antud külgede vastasnurkade suurused.

Üldtuntud tarvilik ja piisav tingimus kolmnurga võrdkülgsuseks on selle kõrguste võrdsus. Lisame sellele tingimusele veel ühe.

Teoreem 11. *Kolmnurk on võrdkülgne parajasti siis, kui*

$$a + h_a = b + h_b = c + h_c.$$

Tõestus. Tarvilikkus on ilmne. Tõestame piisavuse. Kehtigu võrdus $a + h_a = b + h_b = c + h_c$. Oletame vastuväiteliselt, et kolmnurk ei ole võrdkülgne. Siis üldisust kitsendamata, võime eeldada, et $a \neq b$. Kuna



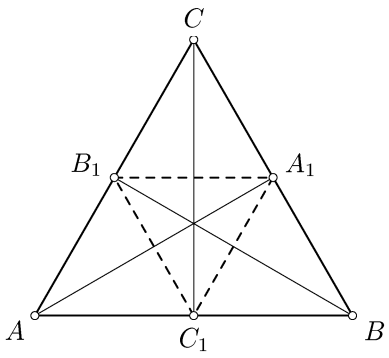
$$a + h_a = a + b\sin\gamma \quad \text{ja} \quad b + h_b = b + a\sin\gamma,$$

siis saame $(a - b)(1 - \sin\gamma) = 0$. Järelikult $\sin\gamma = 1$ oletuse $a \neq b$ tõttu ning $\gamma = 90^\circ$. See aga tähendab, et c on kolmnurga kõige pikem külg. Seega ka $a \neq c$. Kuna nüüd

$$a + h_a = a + c\sin\beta \quad \text{ja} \quad c + h_c = c + a\sin\beta,$$

siis analoogiliselt saame, et $\beta = 90^\circ$. Tekib vastuolu, sest β ja γ on kolmnurga nurgad. Järelikult vaadeldav kolmnurk on võrdkülgne.

Näide 12. Olgu AA_1, BB_1 ja CC_1 teravnurkse kolmnurga ABC kõrgused. Tõestame, et kui $A_1B_1 || AB$ ja $B_1C_1 || BC$, siis $A_1C_1 || AC$.



Teame, et kolmnurgad A_1CB_1 ja ACB on sarnased, seega näiteks $\angle B_1A_1C = \angle BAC$. Kuna lõigud A_1B_1 ja AB on paralleelsed, siis $\angle B_1A_1C = \angle ABC$ (kaasnurgad). Analoogiliselt, kuna $B_1C_1 || BC$, siis $\angle ABC = \angle BCA$. Järelikult kolmnurk ABC on võrdkülgne ja kuna A_1C_1 osutub selle kolmnurga kesklõiguks, siis $A_1C_1 || AC$.