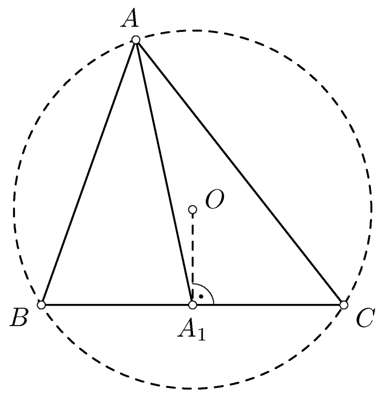
6. Mediaanid, nurgapoolitajad, kõrgused ja kolmnurgaga seotud ringjooned

Koostanud Maksim Ivanov
TÜ Teaduskool

Mediaanid ja kolmnurgaga seotud ringjooned

Selles osas vaatleme mõningaid seoseid kolmnurga mediaanide ja kolmnurgaga seotud ringjoonte vahel. Alljärgnevas kasutame mediaanide lõikepunkti tähistamiseks tähte M ja vaadeldava ringjoone keskpunkti tähistamiseks reeglina tähte O.

Teoreem 1. *Kolmnurga ümberringjoone keskpunkti ja mediaanide aluspunkte läbivad sirged on kolmnurga külgede keskristsirgeteks.*



Tõestus. Olgu AA_1 kolmnurga ABC mediaan.

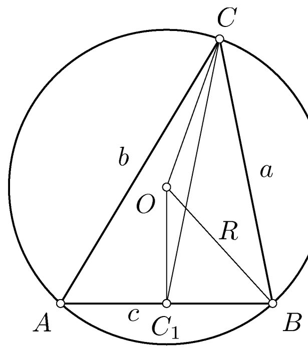
Tõepoolest, ümberringjoone keskpunkt O asub külje BC otspunktidest B ja C võrdsel kaugusel. Seega asub O lõigu BC keskristsirgel, mis läbib ka lõigu BC keskpunkti ehk mediaani aluspunkti A_1.

Teoreemi väite tõestamisel saab toetuda ka faktile, et kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad ühes punktis, kusjuures see on selle kolmnurga ümberringjoone keskpunktiks. □

Järeldus 2. *Kui AA_1 on kolmnurga ABC mediaan ja selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt O erineb punktist A_1, siis kolmnurgad OA_1C ja OA_1B on täisnurksed kolmnurgad.*

Näide 3. Olgu a, b ja c kolmnurga ABC külgede pikkused ning R selle kolmnurga ümberringjoone raadius. Tõestame, et kehtib võrratus

$$\frac{a^2+b^2}{2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}} \leqslant R.$$



Olgu O vaadeldava kolmnurga ümberringjoone keskpunkt ning C_1 külje AB keskpunkt. Küljele c tõmmatud mediaani pikkuse $m_c = CC_1$ võime leida valemist

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Seda valemit kasutades saame tõestatava võrratuse kirjutada kujul

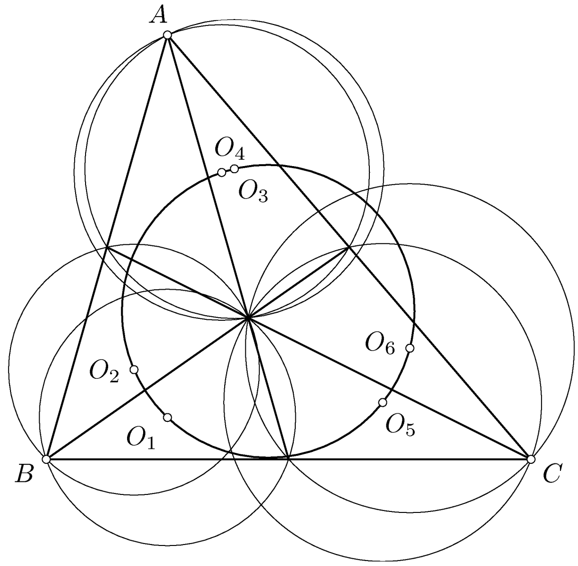
$$a^2 + b^2 \leqslant 4Rm_c \qquad \text{ehk} \qquad 4m_c^2 + c^2 \leqslant 8Rm_c.$$

Lahendades ruutvõrrandit m_c suhtes, saame, et viimane on samaväärne võrratusega

$$|m_c - R| \leqslant \sqrt{R^2 - (c/2)^2}.$$

Kuna OC_1B on täisnurkne kolmnurk, siis Pythagorase teoreemi abil saame viimasega samaväärse võrratuse $|CC_1 - OC| \leqslant OC_1$, mis on kolmnurgavõrratus kolmnurgas COC_1. Märgime, et võrdus kehtib, kui punktid C, O ja C_1 asuvad ühel sirgel. See juhtub parajasti siis, kui $a = b$ või $\angle C = 90^\circ$.

Lause 4. *Kolmnurga mediaanide poolt tekitatud kuue osakolmnurga ümberringjoonte keskpunktid asuvad ühel ja samal ringjoonel (vt joonis).*



Lause 5. ***(Teoreemi 3 järeldus)*** *Täisnurkse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt langeb kokku selle kolmnurga täisnurgast tõmmatud mediaani aluspunktiga (ehk hüpotenuusi keskpunktiga).*

Vaatleme nüüd kolmnurga mediaanide lõikepunkti M ja ümberringjoone keskpunkti O ühendavat lõiku OM.

Lause 6. ***(Leibnizi teoreemi järeldus)*** *Kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkti M ja selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkti O vaheline kaugus võrdub*

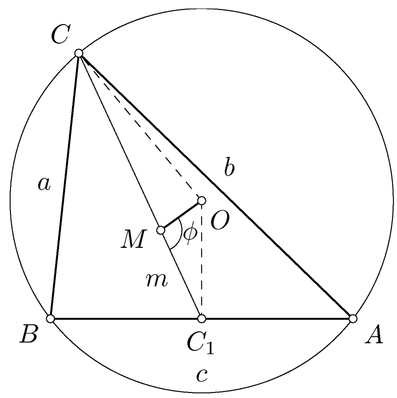
$$OM = \sqrt{R^2 - \frac{1}{9}\left(AB^2 + AC^2 + BC^2\right)},$$

kus R on selle ümberringjoone raadius.

Näide 7. Tõestame, et kui O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ja M punktist O erinev selle kolmnurga mediaanide lõikepunkt, siis sirge OM on mediaaniga CC_1 risti parajasti siis, kui $a^2 + b^2 = 2c^2$, kus a, b ja c on vastavalt kolmnurga ABC külgede BC, AC ja AB pikkused.

Olgu $C_1M = m$ ja $\angle C_1MO = \phi$, siis

$$\angle CMO = 180^\circ - \phi.$$



Kuna $OC = OB$ kui kolmnurga ABC ümberringjoone raadiused ning

$$\cos(180^\circ - \phi) = -\cos\phi,$$

saame koosinusteoreemi kolmnurkade C_1MO ja CMO jaoks kasutades, et

$$OC_1^2 = m^2 + OM^2 - 2m \cdot OM \cdot \cos\phi \qquad \text{ja}$$

$$\begin{aligned} OB^2 &= OC^2 = CM^2 + OM^2 - 2 \cdot CM \cdot OM \cdot \cos(180^\circ - \phi) \\ &= 4m^2 + OM^2 + 4m \cdot OM \cdot \cos\phi. \end{aligned}$$

Teame, et ümberringjoone keskpunkt O on kolmnurga ABC keskristsirgete lõikepunkt ja C_1 on külje AB keskpunkt, seega $OC_1 \perp AB$ ehk BOC_1 on täisnurkne kolmnurk. Kasutades Pythagorase teoreemi selle kolmnurga jaoks, saame

$$BC_1^2 = OB^2 - OC_1^2 = 3m^2 + 6m \cdot OM \cdot \cos\phi.$$

Seega

$$c^2 = 4\dot{B}C_1^2 = 12m^2 + 24m \cdot OM \cdot \cos\phi.$$

Teame, et küljele c tõmmatud mediaani pikkuse m_c võib arvutada valemi $m_c^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$ abil. Kuna mediaanide lõikepunkt M jaotab mediaani CC_1 nii, et $CC_1 = 3m$, siis

$$18m^2 = 2m_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{1}{2}c^2.$$

Järelikult on võrdus $a^2 + b^2 = 2c^2$ punktide O ja M erinevuse korral samaväärne järgmiste võrdustega:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 = 2c^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 18m^2 = \frac{3}{2}c^2 \quad \Leftrightarrow \quad 12m^2 = c^2 \quad \Leftrightarrow \\ c^2 = c^2 + 24m \cdot OM \cdot \cos\phi \quad &\Leftrightarrow \quad 24m \cdot OM \cdot \cos\phi = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \cos\phi = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \phi = 90^\circ \quad \Leftrightarrow \quad CC_1 \perp OM. \end{aligned}$$

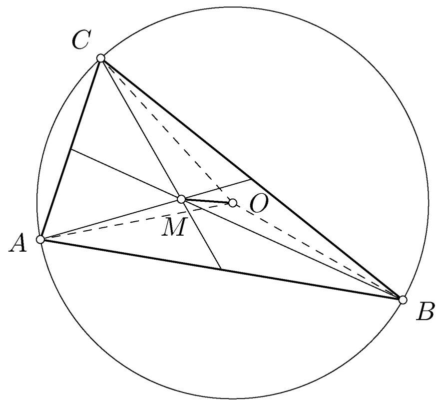
Seega väite tarvilikkus ja piisavus on tõestatud.

Kolmnurga mediaanidega ja ümberringjoone raadiusega seotud võrratused

Lause 8. *Kui m_a, m_b ja m_c on kolmnurga ABC mediaanide pikkused ja R selle kolmnurga ümberringjoone raadius, siis kehtivad järgmised võrratused:*

a) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leqslant \dfrac{27}{4}R^2$;

b) $m_a + m_b + m_c \leqslant \dfrac{9}{2}R$.



Tõestus. **Osa a) tõestus.** Olgu M kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt ja O selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt. Märgime, et

$$AO = BO = CO = R,$$

seega

$$\begin{aligned}
3R^2 &= AO^2 + BO^2 + CO^2 = \\
&= \left(\overrightarrow{AO}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BO}\right)^2 + \left(\overrightarrow{CO}\right)^2 = \\
&= \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MO}\right)^2 + \left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MO}\right)^2 = \\
&= \left(\overrightarrow{AM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{CM}\right)^2 + \\
&\qquad + 2\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\right) \cdot \overrightarrow{MO} + 3\left(\overrightarrow{MO}\right)^2 = \\
&= \left(\overrightarrow{AM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{CM}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MO}\right)^2,
\end{aligned}$$

kuna $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$. Seega

$$\begin{aligned}
3R^2 &= AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3 \cdot MO^2 \geqslant AM^2 + BM^2 + CM^2 = \\
&= \frac{4}{9}\left(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2\right) = \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right).
\end{aligned}$$

Korrutades saadud võrratuse murruga $9/4$, saamegi tõestatava võrratuse.

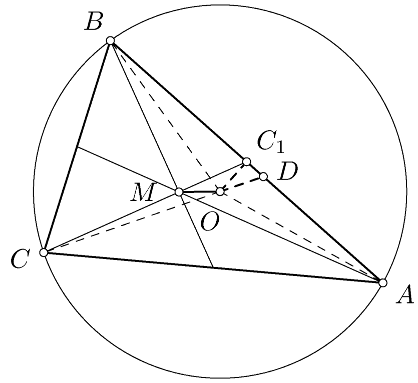
Osa b) tõestus. Kui näitame, et suvaliste reaalarvude x, y ja z korral kehtib võrratus

$$(x + y + z)^2 \leqslant 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

siis kehtib ka võrratus $(m_a + m_b + m_c)^2 \leqslant 3\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)$. Seega arvestades osas a) tõestatud võrratusega, järeldub ka teise võrratuse kehtivus. $\square$

Lause 9. *Kui kolmnurk ABC ei ole nürinurkne ning m_a, m_b ja m_c on selle kolmnurga mediaanide pikkused ja R ümberringjoone raadius, siis kehtib võrratus*

$$m_a + m_b + m_c > 4R.$$



Tõestus. Olgu M kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt ja O selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt. Kuna kolmnurk ABC ei ole nürinurkne, siis selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt O ei asu kolmnurgast väljas, seejuures asub see kas kolmnurga AMB, AMC või BMC sees või küljel.

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et punkt O asub kolmnurga AMB sees või selle küljel. Siis ilmselt kehtib võrratus

$$AM + NB \geqslant AO + OB.$$

Viimane võrratus on samaväärne võrratusega $m_a + m_b \geqslant 3R$.

Olgu D sirge CO ja külje AB lõikepunkt. Sellest, et nurk COC_1 on kolmnurga DOC_1 välisnurk ja sirge OC_1 on külje AB keskristsirge, järeldub võrratus

$$\angle COC_1 > \angle OC_1D = 90^\circ,$$

kust saame, et $\angle COC_1$ on nürinurk. See tähendab, et kolmnurgas COC_1 suurima nurga COC_1 vastas on suurim külg CC_1. Teisisõnu $CC_1 > CO = R$.

Kokkuvõttes saame, et

$$m_a + m_b + m_c \geqslant 3R + m_c > 3R + R = 4R.$$

$\square$

Nurgapoolitajad ja kolmnurgaga seotud ringjooned

Selles osas tõestame mõned seosed kolmnurga nurgapoolitajate ja kolmnurgaga seotud ringjoonte vahel.

Teoreem 1. *Kui kolmnurga ABC sisenurga poolitaja AA_1 pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis A_2, siis on kaared BA_2 ja A_2C võrdsed.*

Tõestus. Kuna piirdenurgad BAA_2 ja A_2AC on võrdsed, siis on võrdsed ka kaartele BA_2 ja A_2C toetuvad kesknurgad ning seega on võrdsed ka need kaared ise. □

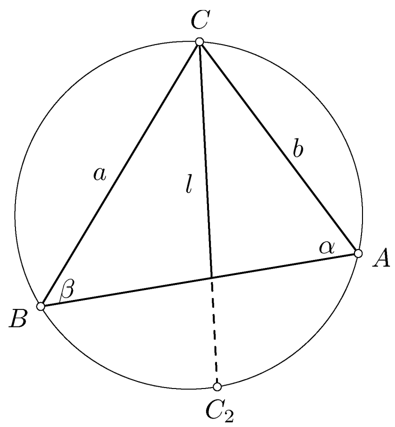
Järeldus 2. *Kui kolmnurga ABC sisenurga poolitaja AA_1 pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis A_2, siis kõõlud BA_2 ja A_2C on võrdsed ning nurgad CBA_2 ja BCA_2 on võrdsed.*

Lause 3. *Ringjoone keskpunkt ja kahe võrdse kuid diameetrist erineva kõõlu lõikepunkt asuvad sirgel, mis poolitab kõõludevahelise nurga.*

Tõestus. Olgu AB ja CD antud ringjoone kaks punktis M lõikuvat võrdset kõõlu. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et ringjoone keskpunkt O asub nurga DMB sees. Tõestame, et MO on selle nurga poolitaja. Sellest, et ringjoone võrdsed kõõlud asuvad ringjoone keskpunktist võrdsetel kaugustel, järeldub, et punkti O kaugused nurga DMB haaradest on võrdsed. Seega punkt O asub nurga DMB poolitajal ehk sirge MO on kõõlude AB ja CD vahelise nurga poolitaja. □

Näide 4. Tõestame, et kui kolmnurga ABC sisenurga ACB poolitaja pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis C_2, siis kehtib võrratus

$$CC_2 > \frac{1}{2}(AC + BC).$$



Olgu $BC = a$, $AC = b$, $CC_2 = l$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Lause tõestuseks on vaja näidata, et $l > \frac{1}{2}(a + b)$.

Olgu d kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter. Siinusteoreemist (üldkujul $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$) järeldub, et suvalise ringjoone kõõlu pikkus võrdub selle ringjoone diameetri d ja sellele kõõlule toetuva piirdenurga siinuse korrutisega. Avaldame nurga CAC_2 suuruse nurkade α ja β kaudu:

$$\angle CAC_2 = \alpha + \angle BAC_2 = \alpha + \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\pi + \alpha - \beta).$$

Siis siinusteoreemi ja taandamisvalemi $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \cos\phi$ põhjal saame

$$a = d\sin\alpha, \quad b = d\sin\beta, \quad l = d\sin\frac{\pi - (\beta-\alpha)}{2} = d\cos\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Seega saame tõestatava võrratusega samaväärsed võrratused

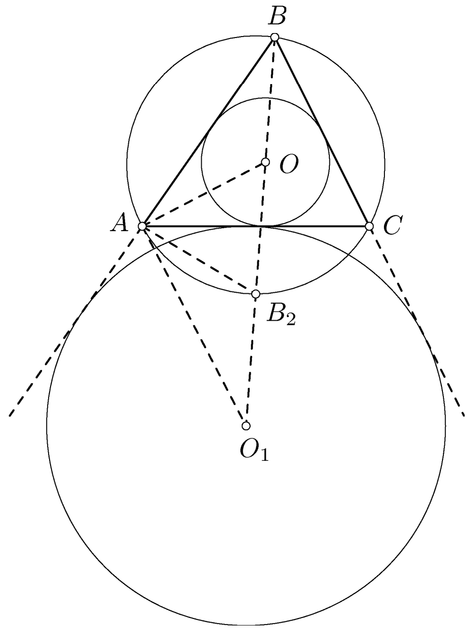
$$\begin{aligned} l > \frac{1}{2}(a+b) \quad &\Leftrightarrow \quad d\cos\frac{\beta-\alpha}{2} > \frac{1}{2}(d\sin\alpha + d\sin\beta) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{\beta-\alpha}{2} > \sin\alpha + d\sin\beta. \end{aligned}$$

Kuna kehtib valem $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ ja antud tingimustel $\cos\frac{\beta-\alpha}{2} > 0$, siis

$$2\cos\frac{\beta-\alpha}{2} > \sin\alpha + \sin\beta \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \sin\frac{\alpha+\beta}{2} < 1.$$

Viimane võrratus on aga tõene, kuna $0^\circ < \frac{\alpha+\beta}{2} < 90^\circ$, sest α ja β on kolmnurga ABC sisenurgad.

Lause 5. *Kui kolmnurga ABC sisenurga ABC poolitaja pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis B_2, punkt O on kolmnurga siseringjoone keskpunkt ja O_1 külge AC puudutava külgringjoone keskpunkt, siis punktid A, C, O ja O_1 asuvad ühel ja samal ringjoonel keskpunktiga B_2.*



Tõestus. Nurk AOB_2 on kolmnurga AOB välisnurk, seega

$$\angle AOB_2 = \angle BAO + \angle ABO.$$

Teame, et kolmnurga siseringjoone keskpunkt langeb kokku selle kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunktiga. Sellest järeldub, et

$$\angle AOB_2 = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC).$$

Avaldame nurga OAB_2 samade nurkade BAC ja ABC kaudu:

$$\angle OAB_2 = \angle OAC + \angle CAB_2 = \frac{1}{2}\angle BAC + \angle CBB_2 = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC).$$

Järelikult, kolmnurk AOB_2 on võrdhaarne, kusjuures $AB_2 = B_2O$. Kuna $AB_2 = B_2C$, siis kehtib ka võrdus $CB_2 = B_2O$. Seega punktid A, C ja O asuvad ringjoonel, mille keskpunktiks on B_2.

Näitame, et sellel ringjoonel paikneb ka punkt O_1. Teame, et nurga BAC välisnurga poolitaja läbib külgringjoone keskpunkti O_1. Samas teame, et kolmnurga sisenurga poolitaja on risti kõrvu oleva välisnurga poolitajaga. Seega kolmnurk OAO_1 on täisnurkne, milles eelnevalt tõestatu põhjal $AB_2 = B_2O$. Järelikult on B_2 täisnurkse kolmnurga OAO_1 hüpotenuusi keskpunkt ja seega ka $B_2O_1 = B_2O$. See tähendab, et ka punkt O_1 asub punktidega A, C ja O ühel ja samal ringjoonel keskpunktiga B_2. $\square$

Järeldus 6. *Kui kolmnurga ABC sisenurga ABC poolitaja pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis B_2 ja punkt O on kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt, siis kolmnurgad AB_2O ja CB_2O on võrdhaarsed.*

Teoreem 7. *Kui kolmnurga ABC sisenurkade poolitajate pikendused lõikavad selle kolmnurga ümberringjoont vastavalt punktides A_2, B_2 ja C_2 ning punkt O on nurgapoolitajate lõikepunkt, siis on tõesed võrdused*

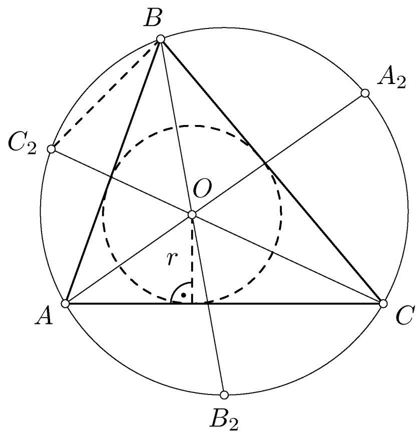
a) $\dfrac{OB \cdot OC}{OA_2} = \dfrac{OA \cdot OC}{OB_2} = \dfrac{OA \cdot OB}{OC_2} = 2r,$

kus r on kolmnurga ABC siseringjoone raadius;

b) $\dfrac{OB_2 \cdot OC_2}{OA} = \dfrac{OA_2 \cdot OC_2}{OB} = \dfrac{OA_2 \cdot OB_2}{OC} = R,$

kus R on kolmnurga ABC ümberringjoone raadius.

Tõestus. **Teoreemi osa a) tõestus.**



Punkt B_2 on kolmnurga AOC ümberringjoone keskpunkt ja OB_2 selle raadius. Kasutame siinusteoreemi kolmnurga AOC külje AO avaldamiseks:

$$AO = 2 \cdot OB_2 \cdot \sin\angle ACO.$$

Kuna kolmnurga ABC siseringjoone raadius r langeb kokku punktist O tõmmatud kolmnurga AOC kõrgusega, siis kehtib võrdus $OC = \dfrac{r}{\sin\angle ACO}$.

Järelikult, $\dfrac{OA \cdot OC}{OB_2} = 2r$. Analoogiliselt saab tõestada, et

$$\frac{OB \cdot OC}{OA_2} = \frac{OA \cdot OB}{OC_2} = 2r.$$

Teoreemi osa b) tõestus.
Sellest, et $\angle OBC_2 = \angle BOC_2 = 180^\circ - \angle BOC$ ja $\angle BC_2O = \angle BC_2C = \angle BAC$, saame

$$\frac{OC_2}{BC} = \frac{BO}{BC} \cdot \frac{OC_2}{BO} = \frac{\sin \angle BCO}{\sin \angle BOC} \cdot \frac{\sin \angle OBC_2}{\sin \angle BC_2O} = \frac{\sin \angle BCO}{\sin \angle BAC}.$$

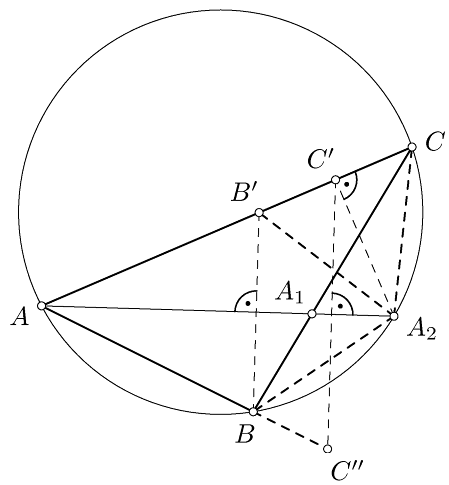
Siinusteoreemi kasutades, saame $BO = 2 \cdot OA_2 \cdot \sin \angle BCO$. Järelikult,

$$\frac{OA_2 \cdot OC_2}{OB} = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = R.$$

Analoogiliselt saab näidata, et $\dfrac{OB_2 \cdot OC_2}{OA} = \dfrac{OA_2 \cdot OB_2}{OC} = R.$ □

Näide 8. Tõestame, et kui kolmnurga ABC sisenurga poolitaja AA_1 pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis A_2, siis lõigu AA_2 ristprojektsioonid külgedele AB ja AC, või nende pikendustele, on võrdsed ja selle projektsiooni pikkus on võrdne külgede AB ja AC pikkuste poolsummaga.

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $AB \leqslant AC$. Vaatleme külje AC punkti B', mis on punktiga B sümmeetriline nurgapoolitaja AA_1 suhtes. Kuna punktid B ja B' on sümmeetrilised ning A ja A_2 asuvad sirgel AA_1, siis ilmselt $AB = AB'$ ja $A_2B = A_2B'$.



Kuna võrdsed nurgad BAA_2 ja CAA_2 toetuvad võrdsetele kõõludele, siis $BA_2 = CA_2$. Seega saame, et

$$B'A_2 = BA_2 = CA_2.$$

Järelikult, kolmnurk $B'A_2C$ on võrdhaarne ja selle kolmnurga tipunurgast tõmmatud kõrgus A_2C' on ka selle kolmnurga mediaan (s.t. $CC' = B'C'$). Lõpuks saame, et

$$AC' = AB' + B'C' = AB + \frac{AC - AB}{2} = \frac{AB + AC}{2}.$$

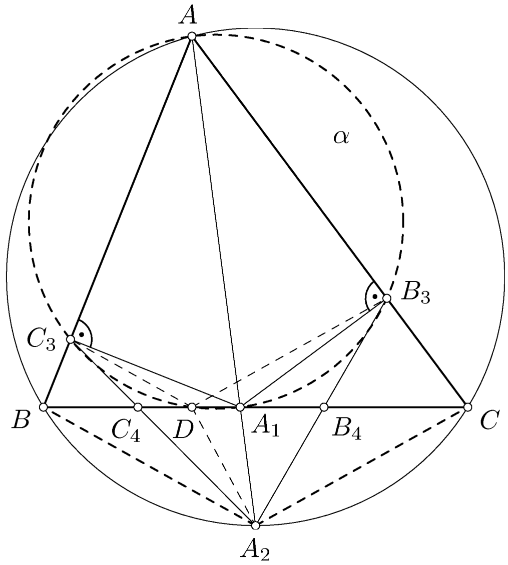
Kui vaadata nüüd punktiga C' sümmeetrilist punkti C'' nurgapoolitaja AA_1 suhtes külje AB pikendusel, siis AC'' ongi AA_2 projektsiooniks sirgel AB ja

$$AC'' = AC' = \frac{AB + AC}{2}.$$

Näide 9. Tõestame, et kui teravnurkse kolmnurga ABC sisenurga poolitaja AA_1 pikendus lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis A_2 ning A_1B_3 ja A_1C_3 on vastavalt külgedele AC ja AB tõmmatud ristlõigud, siis

$$S_{\triangle ABC} = S_{AB_3A_2C_3}.$$

Kuna $\angle AC_3A_1 = \angle AB_3A_1 = 90^\circ$, siis $AB_3A_1C_3$ on kõõlnelinurk ehk punktid B_3 ja C_3 kuuluvad ringjoonele α diameetriga AA_1.



Olgu D ringjoone α ja külje BC lõikepunkt (kui kolmnurk ABC on võrdhaarne alusega BC, siis punktid D ja A_1 langevad kokku). Kuna AA_1 on nurga BAC poolitaja, nurgad BAA_2 ja BCA_2 toetuvad kolmnurga ABC ümberringjoone ühele ja samale kaarele BA_2 ning nurgad A_1AB_3 ja A_1DB_3 toetuvad ringjoone α ühele ja samale kaarele A_1B_3, siis

$$\angle DCA_2 = \angle BCA_2 = \angle BAA_2 = \angle A_1AB_3 = \angle A_1DB_3 = \angle CDB_3.$$

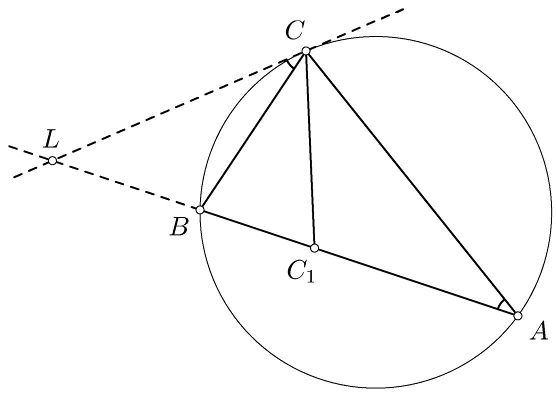
Viimasest järeldub, et $CA_2||DB_3$. Analoogiliselt võib tõestada, et ka $BA_2||DC_3$.

Olgu B_4 ja C_4 külje BC lõikepunktid vastavalt külgedega A_2B_3 ja A_2C_3. Kuna CA_2DB_3 on trapets ja B_4 selle trapetsi diagonaalide lõikepunkt, siis ilmselt $S_{\triangle A_2B_4D} = S_{\triangle CB_4B_3}$. Analoogiliselt trapetsist BA_2DC_3 saame võrduse $S_{\triangle A_2C_4D} = S_{\triangle BC_4C_3}$. Järelikult,

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{AB_3B_4C_4C_3} + S_{\triangle CB_4B_3} + S_{\triangle BC_4C_3} = \\ &= S_{AB_3B_4C_4C_3} + S_{\triangle A_2B_4D} + S_{\triangle A_2C_4D} = S_{AB_3A_2C_3}. \end{aligned}$$

Teoreem 10. *Kui kolmnurga ABC sisenurga poolitaja on CC_1 ning selle kolmnurga ümberringjoone puutuja punktis C lõikab sirget AB punktis L, siis $CL = C_1L$.*

Tõestus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et punkt L asub kolmnurga külje AB pikendusel üle punkti B.



Kuna kõõlu ja puutuja vaheline nurk on võrdne sellele kõõlule toetuva piirdenurgaga, siis $\angle LCB = \angle BAC$. Sellest, et nurk CC_1B on kolmnurga CC_1A välisnurk, saame

$$\angle LCC_1 = \angle LCB + \angle BCC_1 = \angle BAC + \angle ACC_1 = \angle CC_1B.$$

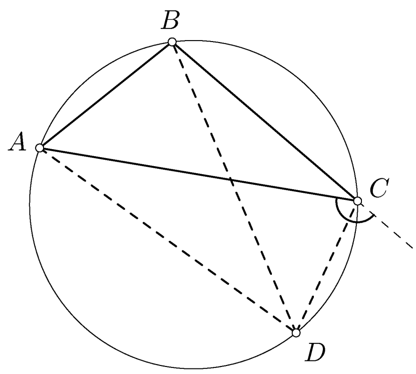
Järelikult kolmnurk CLC_1 on võrdhaarne ja $CL = C_1L$. □

Lause 11. *Kui kolmnurga ABC nurga ACB välisnurga poolitaja lõikab selle kolmnurga ümberringjoont punktis D. Siis $AD = BD$.*

Tõestus. Olgu $\angle ACB = 2\gamma$. Avaldame kolmnurga ABD nurgad suuruse γ kaudu. Kuna

$$\angle ACD = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\gamma) = 90^\circ - \gamma,$$

siis $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ - \gamma$ (toetuvad kaarele AD).



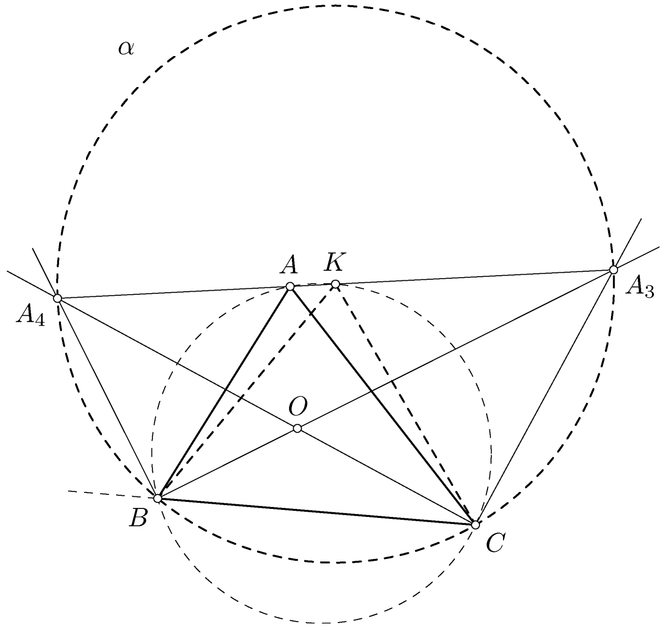
Sellest, et nurgad ADB ja ACB toetuvad ühele ja samale kaarele AB, järelduvad võrdused

$$\begin{aligned} \angle ADB = \angle ACB &= 2\gamma \quad \text{ning} \\ \angle BAD = 180^\circ - \angle ADB - \angle ABD &= 180^\circ - 2\gamma(90^\circ - \gamma) = 90^\circ - \gamma. \end{aligned}$$

Seega kolmnurk ABD on võrdhaarne ja $AD = BD$. □

Näide 12. Tõestame, et kui A_3 on kolmnurga ABC sisenurga ABC poolitaja ja nurga ACB välisnurga poolitaja lõikepunkt ning A_4 sisenurga ACB poolitaja ja nurga ABC välisnurga poolitaja lõikepunkt, siis lõigu A_3A_4 keskpunkt K asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.

Väite tõestamiseks piisab näidata, et nurk BAC võrdub nurgaga BKC.



Kuna kolmnurga sisenurga poolitaja on risti kõrvu oleva välisnurga poolitajaga, siis

$$\angle A_4BA_3 = \angle A_3CA_4 = 90^\circ.$$

Seega punktid B, C, A_3 ja A_4 asuvad ühel ja samal ringjoonel α diameetriga A_3A_4 ja keskpunktiga K (täisnurgad toetuvad ringjoone diameetrile). Sellest järeldub, et

$$\angle A_3A_4C = \angle A_3BC = \frac{1}{2}\angle ABC \quad \text{ja} \quad \angle A_4A_3B = \angle A_4CB = \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Olgu O nurgapoolitajate BA_3 ja CA_4 lõikepunkt. Kuna BOA_4 on kolmnurga OA_3A_4 välisnurk, saame

$$\angle BOA_4 = \angle A_3A_4O + \angle A_4A_3O = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB).$$

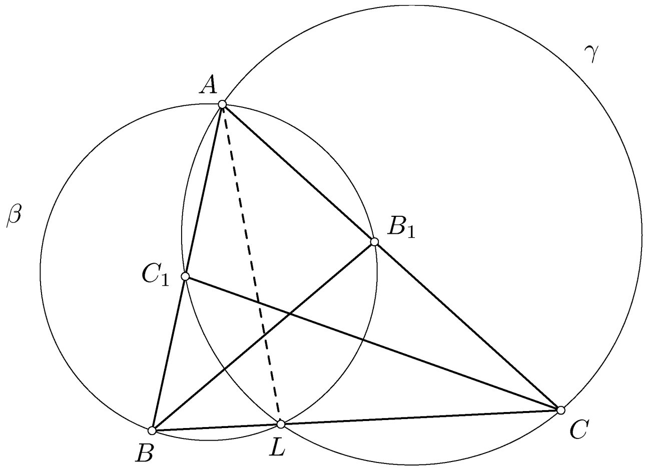
Järelikult,

$$\angle BA_4C = 90^\circ - \angle BOA_4 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Kuna BA_4C on ringjoone α piirdenurk, BKC samale kõõlule toetuv kesknurk ja $\angle BA_4C = \frac{1}{2}\angle BAC$, siis $\angle BAC = \angle BKC$. Järelikult punktid A ja K asuvad ühel ja samal ringjoonel punktidega B ja C.

Näide 13. Tõestame, et kui kolmnurga ABC sisenurkade poolitajate BB_1 ja CC_1 aluspunktid asuvad vastavalt külgedel AC ja AB ning kolmnurkade ABB_1 ja ACC_1 ümberringjoonte lõikepunkt asetseb küljel BC, siis $\angle BAC = 60^\circ$.

Olgu L kolmnurkade ABB_1 ja ACC_1 vastavate ümberringjoonte β ja γ lõikepunkt, mis asub küljel BC.



Siis piirdenurgad LAB_1 ja LBB_1 toetuvad ringjoone β ühele ja samale kaarele LB_1. Samuti toetuvad piirdenurgad LAC_1 ja LCC_1 ringjoone γ ühele ja samale kaarele LC_1. Kuna BB_1 ja CC_1 on nurgapoolitajad, siis

$$\angle BAC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB).$$

Siis võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} \angle BAC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) \\ \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ \end{cases}$$

saame, et $\angle BAC = 60^\circ$.

Kõrgused ja kolmnurgaga seotud ringjooned

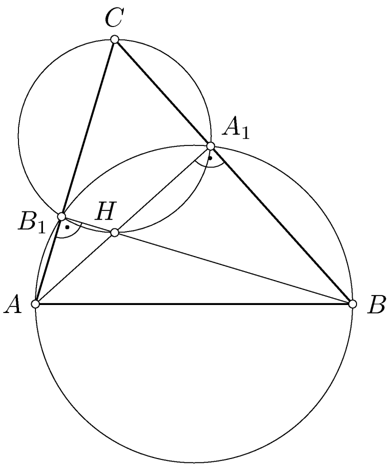
Selles osas vaatleme seoseid kolmnurga kõrguste ja mõnede ringjoonte vahel. Seetõttu kasutame kõrguste lõikepunkti tähistamiseks tähte H.

Teoreem 1. *Kui AA_1 ja BB_1 on kolmnurga ABC kõrgused ning H nende lõikepunkt, siis*

a) punktid C, B_1, H ja A_1 asuvad ühel ja samal ringjoonel diameetriga CH;

b) punktid B, A_1, B_1 ja A asuvad ühel ja samal ringjoonel diameetriga AB.

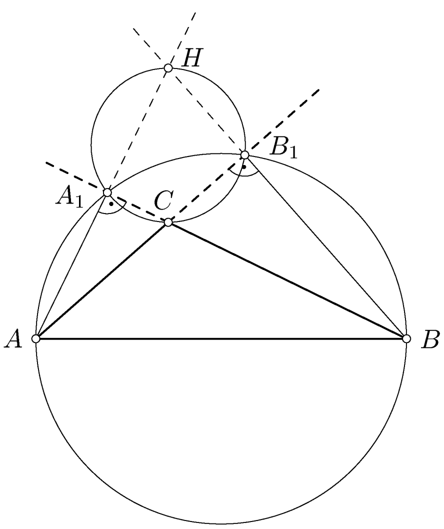
Tõestus. Esialgu tõestame teoreemi teravnurkse kolmnurga jaoks ja seejärel põhjendame, miks tulemus jääb kehtima ka teiste kolmnurga liikide korral.

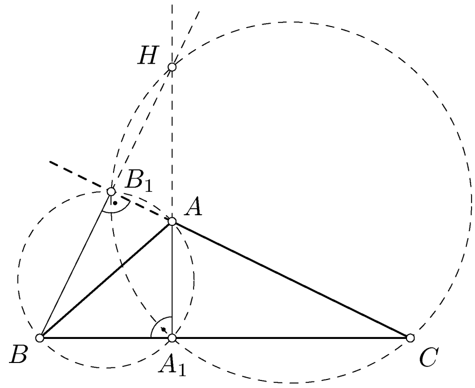


Osa a) tõestus. Teame, et nelinurk on kõõlnelinurk parajasti siis, kui nelinurga vastasnurkade summa on 180°. Kuna nelinurga CB_1HA_1 vastasnurgad CB_1H ja CA_1H on täisnurgad, siis CB_1HA_1 on ülalöeldu põhjal tõepoolest kõõlnelinurk. Kuna piirdenurgad suurusega 180° toetuvad alati diameetrile, siis CH on nelinurga CB_1HA_1 ümberringjoone diameetriks.

Osa b) tõestus. Kuna nurgad AA_1B ja AB_1B on täisnurgad, siis ka punktid B, A_1, B_1 ja A asuvad ühel ja samal ringjoonel, kusjuures AB on selle ringjoone diameetriks.

Tõestus nürinurkse ja täisnurkse kolmnurga jaoks.





Olgu tegemist nürinurkse kolmnurgaga ABC. Siis on kaks võimalust: kas 1) mõlemad kolmnurga kõrgused AA_1 ja BB_1 on tõmmatud kolmnurga teravnurkade tippudest (vasakpoolne joonis) või 2) üks neist on tõmmatud nürinurga tipust (parempoolne joonis).

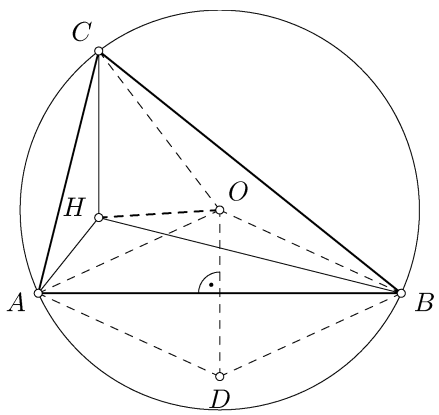
Esimesel juhul tekib teravnurkne kolmnurk ABH, kusjuures AB_1 ja BA_1 on selle kõrgused ning punkt C on nende lõikepunkt. Siis käesoleva teoreemi osa a) tõestuse põhjal punktid C, B_1, H ja A_1 asuvad ühel ja samal ringjoonel diameetriga CH. Ning ilmselt ka A, A_1, B_1 ja B asuvad ühel ringjoonel diameetriga AB.

Teise võimaluse juhul olgu AA_1 kolmnurga ABC nürinurgast tõmmatud kõrgus. Kasutades nüüd teoreemi b) osa teravnurkse kolmnurga CHB jaoks kõrgustega CB_1 ja HA_1, saame, et punktid H, B_1, A_1 ja C asuvad ühel ja samal ringjoonel diameetriga CH. Ning ka punktid B, B_1, A ja A_1 asuvad ühel ringjoonel diameetriga AB.

Kui kolmnurk ABC on täisnurkne, siis juhul 1) punktid C, A_1, B_1 ja H lihtsalt langevad kokku, juhul 2) aga ühtivad punktid A, B_1 ja H. Mõlemal juhul võib lugeda teoreemi väited õigeks. □

Teoreem 2. *Kui O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, siis H on selle kolmnurga kõrguste lõikepunkt parajasti siis, kui kehtib võrdus*

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$



Tõestus. Tõestame esmalt tarvilikkuse. Olgu H kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Moodustame vektori $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$. On selge, et lõik OD on rombi $OADB$ diagonaal. Seega $OD \perp AB$. Kuna lõik CH asub küljele AB tõmmatud kõrgusel (st $CH \perp AB$), siis sirged CH ja OD on paralleelsed. Kui nüüd moodustame vektori $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$, siis eelmises punktis näidatud paralleelsusest järeldub, et punkt E asub sirgel CH.

Analoogiliselt saame moodustada vektorid $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF}$ ja $\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG}$ ning järeldada, et punkt G asub sirgel BH. Kuna

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OG},$$

siis punktid E ja G langevad kokku sirgete CH ja BH ainsa ühise punktiga H. See tähendabki, et

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$$

Tõestame nüüd piisavuse. Kehtigu võrdus

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

ning olgu R kolmnurga ABC ümberringjoone raadius. Tõestame, et lõigud CH ja AB on risti. Selleks moodustame vektorid $\overrightarrow{CH}$ ja $\overrightarrow{AB}$ ning näitame, et nende skalaarkorrutis on 0. Kuna

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

ning

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB},$$

siis

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) =$$

$$= -\left(\overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OB}\right)^2 = -R^2 + R^2 = 0.$$

Analoogiliselt saab näidata, et $BH \perp AC$ ning $AH \perp BC$. Seega H on kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. □

Täiendavaid tulemusi kolmnurga kõrguste ja ümberringjoonte kohta

Konstrueerime punktiga H sümmeetrilised punktid kolmnurga külgede suhtes ja tõestame järgmise teoreemi.

Teoreem 3. *Antud kolmnurga kõrguste lõikepunktiga sümmeetrilised punktid kolmnurga külgede suhtes asuvad selle kolmnurga ümberringjoonel.*

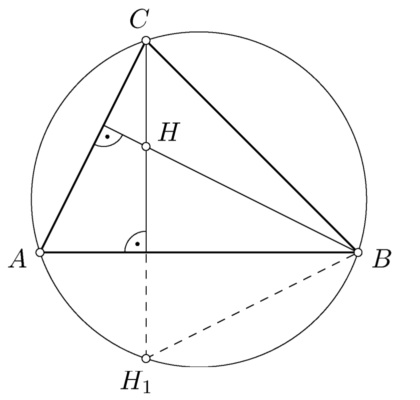
Tõestus. Kui kolmnurk ABC on täisnurkne, siis väide on triviaalne, kuna täisnurkse kolmnurga kõrguste lõikepunkt langeb kokku kolmnurga tipuga täisnurga juures. Seega kõrguste lõikepunkt asub selle kolmnurga kahel küljel (kaatetitel) ning kõrguste lõikepunktiga sümmeetriline punkt hüpotenuusi (ümberringjoone diameetri) suhtes ilmselt asub kolmnurga ümberringjoonel.

Olgu H teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt ning H_1 olgu üle punkti H võetud lõigu CH pikenduse ja kolmnurga ABC ümberringjoone lõikepunkt. Kolmnurk HBH_1 osutub võrdhaarseks, kuna

$$\angle BH_1H = \angle BH_1C = \angle BAC,$$

kui samale kõõlule toetuvad piirdenurgad, ning

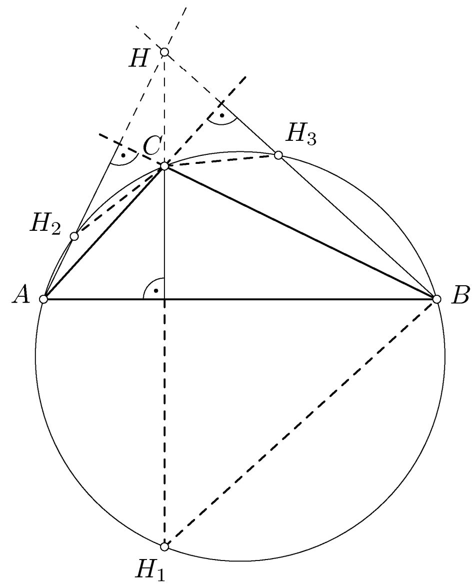
$$\angle BAC = \angle BHH_1,$$



kui vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad. Kuna võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud kõrgus osutub ka mediaaniks, siis AB on lõigu HH_1 keskristsirge. Viimane aga tähendabki, et H_1 on punktiga H sümmeetriline punkt külje AB suhtes. Analoogiliselt saab näidata, et punktiga H sümmeetrilised punktid ka teiste külgede suhtes asuvad selle kolmnurga ümberringjoonel.

Olgu nüüd H nürinurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt ning H_1 üle punkti C võetud lõigu HC pikenduse ja kolmnurga ABC ümberringjoone lõikepunkt.

Olgu H_2 ja H_3 vastavalt lõikude HA ja HB ning kolmnurga ABC ümberringjoone lõikepunktid, mis erinevad punktidest A ja B. Siis analoogiliselt eelmise juhuga saame, et kolmnurgad HBH_1, HCH_2 ja HCH_3 on võrdhaarsed kolmnurgad, kuna



$$\angle BH_1H = \angle BH_1C = \angle BAC = \angle BHH_1,$$

$$\angle CH_2H = 180^\circ - \angle CH_2A = \angle CBA = \angle CHH_2$$

ning

$$\angle CH_3H = 180^\circ - \angle CH_3B = \angle CAB = \angle CHH_3.$$

Seega AB, BC ja AC on vastavalt lõikude HH_1, HH_2 ja HH_3 keskristsirged ehk punktid H_1, H_2 ja H_3 on punktiga H sümmeetrilised punktid vastavalt külgede AB, BC ja AC suhtes. $\square$

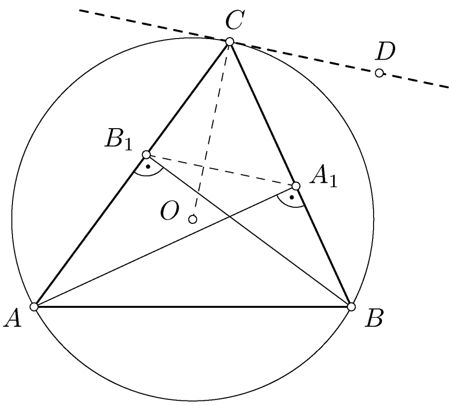
Näitame nüüd mõned seosed kolmnurga ümberringjoone puutuja ja keskpunkti ning kõrguste aluspunkte ühendava lõigu vahel.

Teoreem 4. *Kui AA_1 ja BB_1 on kolmnurga ABC kõrgused, siis*

a) kolmnurga ABC ümberringjoonele punktis C tõmmatud puutuja on paralleelne sirgega A_1B_1;

b) $A_1B_1 \perp OC$, kus O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt.

Tõestus. **Osa a) tõestus.** Võtame punkti C läbival kolmnurga ABC ümberringjoone puutujal punkti D nii, et punktid A ja D asuksid sirge BC suhtes erinevatel pooltasanditel. Kuna ringjoone puutuja ja kõõlu vaheline nurk on pool selle nurga sees asetsevast kaarest, siis



$$\angle DCA_1 = \angle DCB = \angle CAB.$$

Sellest, et kolmnurgad CAB ja CA_1B_1 on sarnased, järeldub nurkade võrdsus

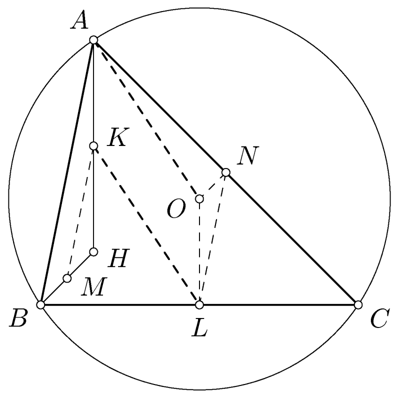
$$\angle CAB = \angle CA_1B_1.$$

Kuna põiknurgad DCA_1 ja CA_1B_1 on võrdsed, siis $CD||A_1B_1$.

Osa b) tõestus. Sellest, et puutepunkti tõmmatud raadius on risti puutujaga ($CD \perp OC$) ja äsja tõestatud paralleelsusest $CD||A_1B_1$ järeldubki lõikude A_1B_1 ja OC ristseis.

Märgime, et teoreemi tõestus ei sõltu kolmnurga liigist. □

Näide 5. Tõestame, et kui H on teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt, siis lõikude AH ja BC keskpunkte ühendava lõigu pikkus võrdub kolmnurga ABC ümberringjoone raadiuse pikkusega.



Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ning K ja L vastavalt lõikude AH ja BC keskpunktid. Esmalt näitame, et $AK = OL$. Olgu M ja N vastavalt lõikude BH ja AC keskpunktid. Siis KM ja LN on vastavalt kolmnurkade ABH ja ABC kesklõigud. Seega

$$KM = LN = \frac{1}{2} \cdot AB \quad \text{ning} \quad KM||LN||AB.$$

Kuna OL ja ON on vastavalt külgede BC ja AC keskristsirged ning $AH \perp BC$ ja $BH \perp AC$, siis

$$AH||OL \quad \text{ja} \quad BH||ON.$$

Seega kolmnurgad MHK ja NOL on võrdsed tunnuse NKN põhjal, kuna $\angle HMK = \angle ONL$, $KM = LN$ ja $\angle HKM = \angle OLN$. Järelikult

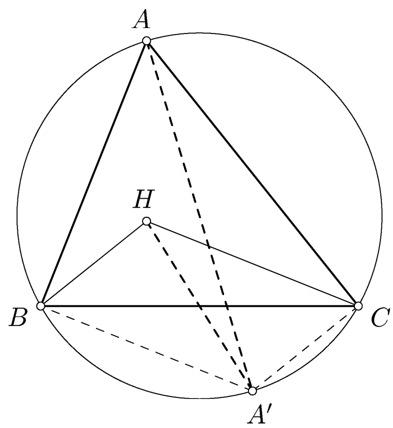
$$OL = HK = AK.$$

Kuna $OL = AK$ ning $OL||AK$, siis nelinurk $AKLO$ on rööpkülik. See tähendab, et $AO = KL$. Sellest, et AO on kolmnurga ABC ümberringjoone raadius, saamegi, et lõigu KL pikkus võrdub kolmnurga ABC ümberringjoone raadiuse pikkusega.

Tõestatud teoreemist järeldub vahetult üsna kasulik meetriline seos kolmnurgas.

Järeldus 6. *Kolmnurga tipu kaugus selle kolmnurga kõrguste lõikepunktist on kaks korda suurem kolmnurga ümberringjoone keskpunkti kaugusest selle tipu vastasküljest.*

Näide 7. Tõestame, et kui H on teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt ning AA' on selle kolmnurga ümberringjoone diameeter, siis lõik $A'H$ poolitab külje BC.



Kuna AA' on ümberringjoone diameeter, siis kolmnurk ACA' on täisnurkne ehk $A'C \perp AC$. Sellest, et $BH \perp AC$, järeldub, et $BH||A'C$. Analoogiliselt saame, et $CH||A'B$. Seega nelinurk $A'BHC$ on rööpkülik ja selle diagonaalid poolitavad teineteist.

Näitame nüüd, kuidas on võimalik punkti H läbiva kolme ringjoone abil tekitada esialgsega võrdset kolmnurka.

Teoreem 8. *Kui H on mittetäisnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt, siis kolmnurkade AHB, AHC ja BHC ümberringjoonte keskpunktidega määratud kolmnurk on võrdne kolmnurgaga ABC.*

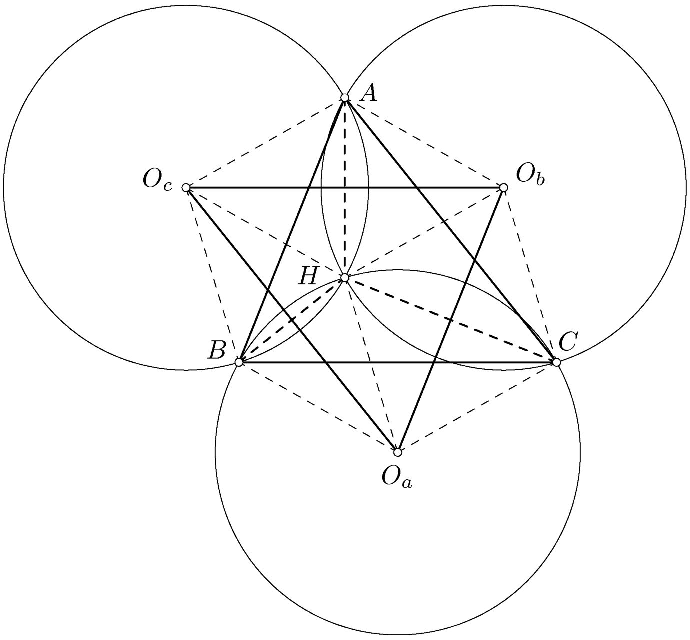
Tõestus. Olgu O_a, O_b ja O_c vastavalt kolmnurkade BHC, AHC ja AHB ümberringjoonte keskpunktid. Esmalt tõestame, et nimetatud kolmnurkade ümberringjooned on võrdsed kolmnurga ABC ümberringjoonega.

Olgu R ja R_a vastavalt kolmnurkade ABC ja BHC ümberringjoonte raadiused. Kuna

$$\sin \angle BHC = \sin (180^\circ - \angle BHC) = \sin \angle BAC,$$

siis siinusteoreemist (üldkujul $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$) järeldub seos

$$R_a = \frac{BC}{2\sin\angle BHC} = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = R.$$



Analoogiliselt saab näidata, et ka vastavalt kolmnurkade AHC ja AHB ümberringjoonte raadiused R_b ja R_c on kolmnurga ABC ümberringjoone raadiusega võrdsed. Seega nelinurgad AO_bHO_c ja HO_bCO_a on rombid, kuna nende küljed on võrdsete ringjoonte raadiused. Järelikult

$$AO_c = O_bH = CO_a \quad \text{ja} \quad AO_c||O_bH||CO_a$$

Ning

$$AO_b = O_cH = BO_a \quad \text{ja} \quad AO_b||O_cH||BO_a.$$

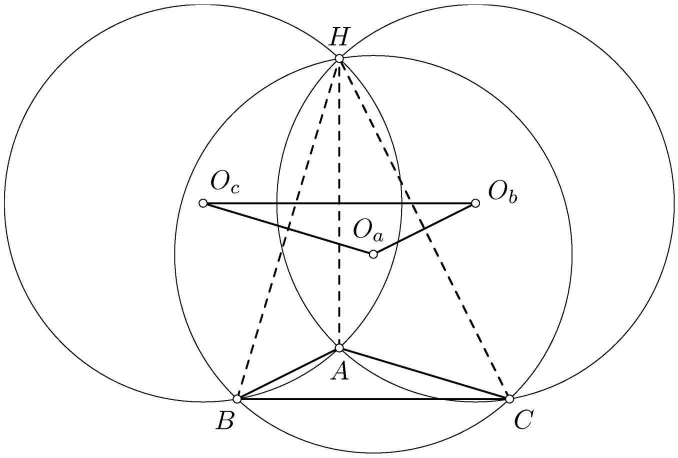
Nelinurgad AO_cO_aC ja AO_bO_aB on rööpkülikud ja seega

$$O_aO_b = AB \quad \text{ja} \quad O_aO_c = AC.$$

Analoogiliselt saab näidata, et kehtib võrdus $O_bO_c = BC$. Seega kolmnurgad ABC ja $O_aO_bO_c$ on võrdsed tunnuse KKK põhjal.

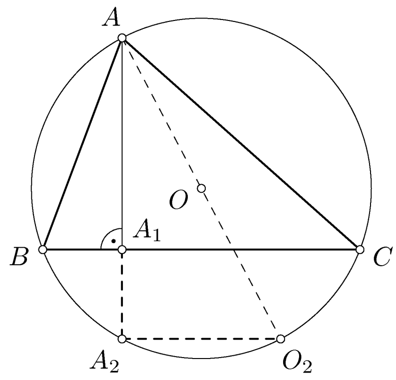
□

Teoreemi tõestust nürinurkse kolmnurga korral illustreerime järgmise joonise põhjal.



Näitame nüüd, kuidas on hõlbus leida nurka kolmnurga tipust tõmmatud kõrguse ja sama tippu ümberringjoone keskpunktiga ühendava lõigu vahel.

Näide 9. Tõestame, et kui AA_1 on teravnurkse kolmnurga ABC kõrgus ja O selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt, siis $\angle BAA_1 = \angle CAO$.



Olgu ABC teravnurkne kolmnurk. Kui lõikude AA_1 ja AO pikendused teist korda lõikavad kolmnurga ABC ümberringjoont vastavalt punktides A_2 ja O_2, siis AO_2 on selle ringjoone diameeter ning $\angle AA_2O_2$ on täisnurk. Seega $BC||A_2O_2$, millest järeldub kaarte BA_2 ja CO_2 võrdsus. Kuna võrdsetele kaartele toetuvad võrdsed piirdenurgad, siis

$$\angle BAA_1 = \angle CAO.$$

Järeldus 10. *Kui AA_1 on kolmnurga ABC kõrgus ja O selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt, siis*

$$\angle OAA_1 = |\angle ABC - \angle ACB|.$$

Kolmnurga ümberringjoone raadiuse ja külgede pikkuste abil on võimalik leida ka kõrguse või selle osalõigu pikkust.

Lause 11. *Kui AA_1 on kolmnurga ABC kõrgus, H on kõrguste lõikepunkt ja R on selle kolmnurga ümberringjoone raadius, siis kehtivad võrdused*

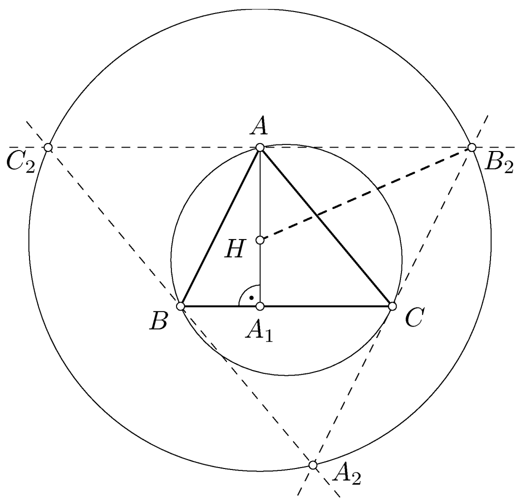
a) $\quad AA_1 = \dfrac{AB \cdot AC}{2R}$;

b) $\quad AH^2 = 4R^2 - BC^2$.

Tõestus. **Osa a) tõestus.** Kui S on kolmnurga ABC pindala, siis siinusteoreemi põhjal saame, et

$$AA_1 = \frac{2S}{BC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC}{BC} = \frac{AB \cdot AC}{2R}.$$

Osa b) tõestus. Tõmbame läbi kolmnurga ABC tippude A, B ja C vastaskülgedega paralleelsed sirged. Kui tekkinud kolmnurgas $A_2B_2C_2$ punktid A, B ja C on vastavalt külgede B_2C_2, A_2C_2 ja A_2B_2 sisepunktid, siis need punktid on ka samade külgede keskpunktideks, sest näiteks nelinurgad $ABCB_2$ ja $BCAC_2$ on rööpkülikud.



Seega kolmnurga ABC kõrgused on kolmnurga $A_2B_2C_2$ keskristsirged ning H on kolmnurga $A_2B_2C_2$ ümberringjoone keskpunkt, kuna mis tahes kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad selle kolmnurga ümberringjoone keskpunktis.

Sellest, et kolmnurkade ABC ja $A_2B_2C_2$ küljed on vastavalt paralleelsed ning A, B ja C on kolmnurga $A_2B_2C_2$ külgede keskpunktid, järeldub kolmnurkade ABC ja $A_2B_2C_2$ sarnasus (sarnasustegur 2). Seega

$$4R^2 = B_2H^2 = B_2A^2 + AH^2 = BC^2 + AH^2,$$

millest $AH^2 = 4R^2 - BC^2$, mida oligi vaja tõestada. $\square$