# 6. Lisakonstruktsioonide meetod

Koostanud Maksim Ivanov
TÜ Teaduskool

# Lisakonstruktsioonide meetod

## 1. Meetodi kirjeldus

Geomeetriaülesannete lahendamisel ja tõestamisel on oluliseks lahendusideede allikaks sobiv joonis. Sellega seoses tekib lahendajal tavaliselt kaks küsimust.

1. Kas tehtud joonis on õige, st kas see vastab ülesandes kirjeldatud olukorrale?
2. Kas tehtud joonis on täielik, st kas olemasoleva konstruktsiooni põhjal saab leida vajalikke seoseid või tuleb sellele joonisele lisada sobivalt valitud kujundeid?

Selles vihikus vaatlemegi, milliseid lisakonstruktsioone on mõistlik teha konkreetse probleemi lahendamiseks. Kui probleemi on õnnestunud lahendada joonise täiendamise tulemusena, siis öeldakse, et on kasutatud *lisakonstruktsioonide meetodit*.

*Lisakonstruktsioonide meetodiks* nimetatakse protseduuri, mille käigus täiendatakse antud ülesande kohta tehtud joonist uute elementidega nii, et esialgu üsna raskesti märgatavad seosed ülesandes antud suuruste ja otsitavate suuruste vahel saavad selgemaks.

Eelmistes vihikutes esitatud materjali põhjal võime öelda, et joonise täiendamine uute elementidega on mõnede tõestusülesannete puhul ainsaks võimaluseks ülesandes püstitatud probleemi lahendamiseks. Enamikul juhtudel on aga lisakonstruktsioonide sisse toomine tõestuse oluliseks osaks.

Kasutatud lisakonstruktsioonide seas on selliseid, mis tekivad loomulikult ülesande andmete põhjal, aga on ka neid, mis ei ole nii ilmsed ning nõuavad lahendajalt leidlikkust ja niisugust tüüpi ülesannete lahendamise kogemust. Esimeste lisakonstruktsioonide näideteks on uute elementide (lõikude, sirgete, ringjoonte jne) moodustamine joonisel olemasolevate punktide ühendamisel, lõikude pikendamine jne. Teiste näideteks on antud lõikudega või sirgetega paralleelsete või ristuvate sirgete tõmbamine, sümmeetriliste punktide, lõikude või sirgete joonistamine jne. Kui esimesel juhul õnnestub lahendajal kasutada lisakonstruktsioonide meetodit isegi siis, kui ta seda ei mõista, siis teist liiki lisakonstruktsioonide tegemine eeldab selle meetodi tundmist ja teadlikku rakendamist.

Selle meetodi rakendamist geomeetriaülesannete lahendamisel saab kirjeldada järgmise algoritmi abil.

1. Proovi lahendada ülesannet lisakonstruktsioone tegemata.
2. Kui õnnestub tulemuseni jõuda, siis kirjuta lahendus ja lõpeta. Kui ei õnnestu, siis jätka.
3. Tee otstarbekad olemasolevate punktide ühendamisel saadud sirg- ja/või ringjoonelised lisakonstruktsioonid ja proovi nüüd lahendada ülesannet.

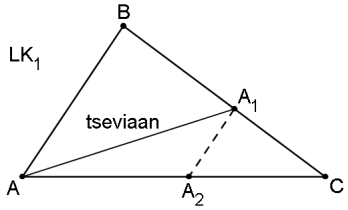
4. Kui õnnestub tulemuseni jõuda, siis kirjuta lahendus ja lõpeta. Kui ei õnnestu, siis jätka.
5. Kasuta mittestandardseid lisakonstruktsioone ja proovi nüüd lahendada ülesannet.
6. Kui õnnestub tulemuseni jõuda, siis kirjuta lahendus ja lõpeta. Kui ei õnnestu, siis vaata kas punkti 2 või punkti 5 või küsi abi.

Kokkuvõttes võib öelda, et keerukamate geomeetriaülesannete lahendamisel on esmatähtis õige joonise tegemine ja pärast seda ülesandes antud ja otsitavate elementide vahelise seose leidmine lisakonstruktsioonide abil.

## 2. Kolmnurga tseviaanidega seotud lisakonstruktsioonid (LK)

*Tseviaaniks* nimetatakse kolmnurga tipust selle vastasküljele või selle pikendusele tõmmatud sirglõiku või selle lõigu pikkust.

**LK 1.** *Kui kolmnurgas on antud tseviaan, siis tõmbame selle tseviaani aluspunktist kolmnurga külgedega paralleelsed lõigud.*



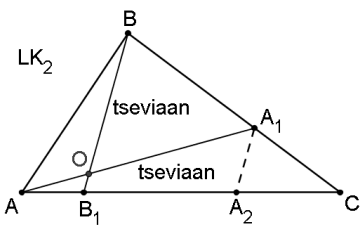

- Olgu $AA_1$ kolmnurga $ABC$ tseviaan (sh mediaan, nurgapoolitaja või kõrgus).
- Kui $A_2$ on külje $AC$ selline sisepunkt, et $A_1A_2 \parallel AB$, siis saame kasutada kiirteteoreemi: nurk $ACB$ ning paralleelsed lõikajad $AB$ ja $A_1A_2$ määravad seose $\frac{CA_2}{CA_1} = \frac{A_2A}{A_1B}$.
- Kolmnurgad $ABC$ ja $A_2A_1C$ on sarnased.

Märkused.

a) Punktist $A_1$ tõmmatud lõik võib olla ka küljega $AC$ paralleelne.

b) Kui tseviaan $AA_1$ osutub kolmnurga mediaaniks, siis $A_2$ on lõigu $AC$ keskpunkt ja lõik $A_1A_2$ on kolmnurga $ABC$ kesklõik.

**LK 2.** *Kui kolmnurgas on erinevatest tippudest tõmmatud kaks tseviaani, siis ühe tseviaani aluspunktist tõmbame teise tseviaaniga paralleelse kiire.*

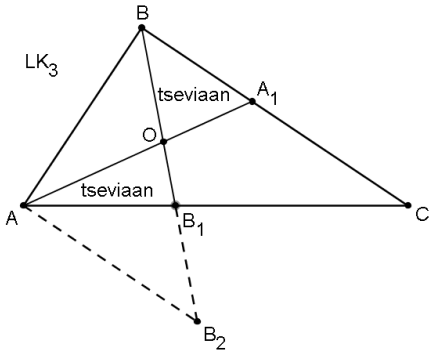


- Olgu $AA_1$ ja $BB_1$ kolmnurga $ABC$ tseviaanid ning $O$ nende lõikepunkt.
- Kui $A_2$ on külje $AC$ selline sisepunkt, et $A_1A_2 \parallel BB_1$, siis tekib kaks kiirteteoreemi olukorda:

  a) nurk $ACB$ ning paralleelsed lõikajad $A_1A_2$ ja $BB_1$ määravad seose $\frac{CA_2}{CA_1} = \frac{A_2B_1}{A_1B}$ ning $\Delta A_1A_2\mathrm{C} \sim \Delta BB_1C$.

  b) nurk $A_1AC$ ning paralleelsed lõikajad $A_1A_2$ ja $OB_1$ määravad seose $\frac{AO}{AB_1} = \frac{OA_1}{B_1A_2}$ ning $\Delta AA_1A_2 \sim \Delta AOB_1$.

**LK 3.** *Kui kolmnurgas on erinevatest tippudest tõmmatud kaks tseviaani, siis pikendame ühest tipust tõmmatud tseviaani üle selle aluspunkti kuni lõikumiseni sirgega, mis läbib teist tippu ja on paralleelne vastasküljega.*

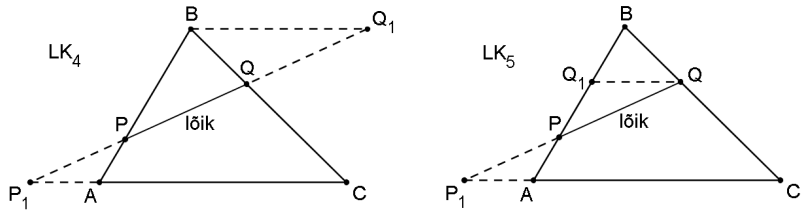



- Olgu $AA_1$ ja $BB_1$ kolmnurga $ABC$ mis tahes tseviaanid ning $O$ nende lõikepunkt. Olgu $B_2$ läbi punkti $A$ küljega $BC$ paralleelse sirge ja tseviaani $BB_1$ pikenduse lõikepunkt. Siis on sarnased järgmised kolmnurgad: $\Delta AOB_2 \sim \Delta A_1OB$; $\Delta AB_1B_2 \sim \Delta CB_1B$.

**LK 4, 5.** *Kui on antud kolmnurga kahe külje sisepunkte ühendav lõik, mis ei ole paralleelne küljega, siis võime pikendada seda lõiku ja leida selle pikenduse lõikepunkti kolmanda külje pikendusega ning*

a) *leida lõikepunkti kolmanda küljega paralleelse ja selle vastastippu läbiva sirgega (*LK$_4$*);*

b) *tõmmata lõigu otspunktidest kolmnurga külgedega paralleelseid lõike (*LK$_5$*).*

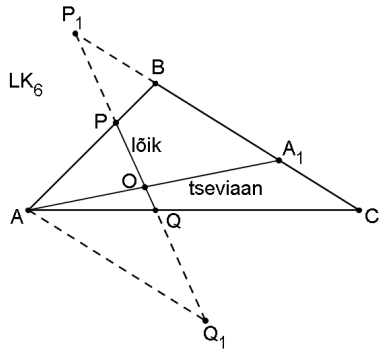


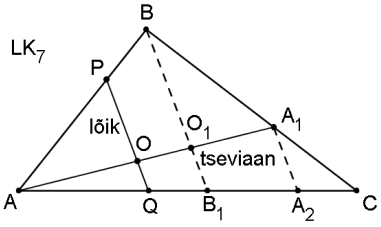

- LK$_4$ juhul on sarnased järgmised kolmnurgad: $\Delta QBQ_1 \sim \Delta QCP_1$ ja $\Delta PBQ_1 \sim \Delta PAP_1$.
- LK$_5$ juhul tekib kiirteteoreemi olukord: $\angle ABC$ ja lõikajad $QQ_1 \parallel AC$ ning tekivad ka sarnased kolmnurgad: $\Delta PQQ_1 \sim \Delta PP_1A$ ja $\Delta BQQ_1 \sim \Delta BCA$.

**LK 6, 7.** *Kui kolmnurga ühest tipust on tõmmatud tseviaan ja selle nurga lähiskülgedel asuvaid punkte ühendav kuid küljega mitteparalleelne lõik, siis võime*

a) *pikendada seda lõiku ja leida selle pikenduse lõikepunktid kolmnurga kolmanda külje pikendusega ning selle külje vastastippu läbiva ja küljega paralleelse sirgega (*$LK_6$*);*

b) *tõmmata kolmnurga tippudest ja vaadeldava tseviaani aluspunktist antud lõiguga paralleelseid lõike (*$LK_7$*).*




- Olgu $O$ antud tseviaani $AA_1$ ja lõigu $PQ$ lõikepunkt, punkt $P_1$ lõigu $PQ$ pikenduse ja külje $BC$ pikenduse lõikepunkt ning asugu punkt $Q_1$ lõigu $PQ$ pikendusel nii, et $AQ_1 \parallel BC$.
- $LK_6$ korral tekib kolm paari sarnaseid kolmnurki:

$$\Delta APQ_1 \sim \Delta BPP_1, \qquad \Delta AQQ_1 \sim \Delta CQP_1, \qquad \Delta AOQ_1 \sim \Delta A_1OP_1.$$

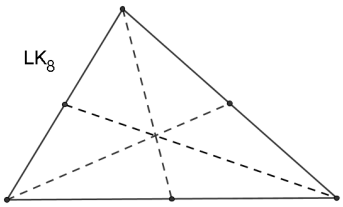
- $LK_7$ korral tekib päris mitmeid sarnaste kolmnurkade paare ning saab korduvalt rakendada ka kiirteteoreemi, näiteks tekib kaks põhilist kiirteteoreemi rakendamise võimalust:

$$\angle A_1AA_2 \text{ ja lõikajad } OQ \parallel O_1B_1 \parallel A_1A_2;$$

$$\angle BCB_1 \text{ ja lõikajad } A_1A_2 \parallel BB_1.$$

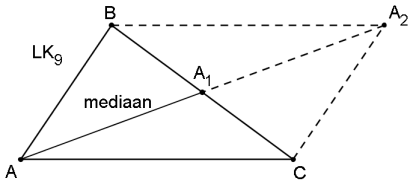
## 3. Mediaanidega seotud lisakonstruktsioonid

**LK 8.** *Kui kolmnurgas on antud külgede keskpunktid, siis tõmbame mediaanid.*




- Mediaan jaotab kolmnurga kaheks võrdpindseks kolmnurgaks ja kolm mediaani jaotavad kolmnurga kuueks võrdpindseks kolmnurgaks.
- Mediaanide lõikepunkt jaotab iga mediaani suhtes $2:1$ kolmnurga tipust alates.

**LK 9.** *Kui kolmnurgas on antud mediaan, siis pikendame seda mediaani üle aluspunkti mediaani pikkuse võrra.*



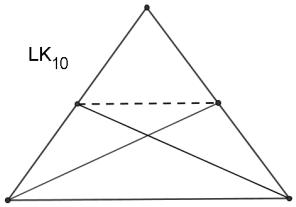

- Olgu $AA_1$ kolmnurga $ABC$ mediaan ning punkt $A_2$ saadud mediaani $AA_1$ pikendamisel üle punkti $A_1$ nii, et $AA_1 = A_1A_2$.
- Siis
  a) nelinurk $ABA_2C$ on rööpkülik;
  b) kolmnurgad $AA_1B$ ja $A_2A_1C$ ning $AA_1C$ ja $A_2A_1B$ on vastavalt võrdsed tunnuse KKK põhjal;
  c) lõigud $A_2A_1$, $BA_1$ ja $CA_1$ on vastavalt kolmnurkade $BA_2C$, $ABA_2$ ja $ACA_2$ mediaanid.

Märkused.

a) Kui kolmnurgas on antud kaks või kolm mediaani, siis analoogiliselt saab moodustada vastavalt kaks või kolm rööpkülikut.

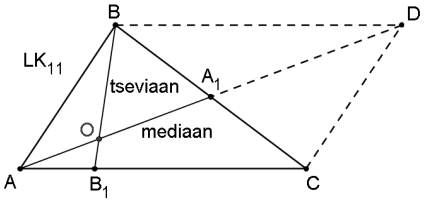
b) Vaadelda võib ka rööpkülikuid, mis tekivad kolmnurga mediaani pikendamisel üle aluspunkti kas $\frac{1}{3}$ või $\frac{2}{3}$ mediaani pikkuse võrra.

**LK 10.** *Kui kolmnurgas on antud kaks mediaani, siis ühendame nende aluspunktid.*



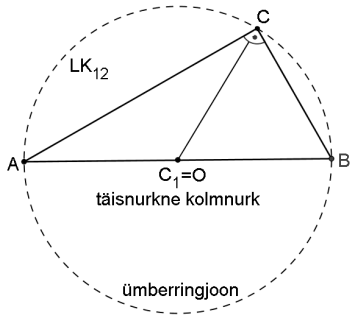

- Mediaanide aluspunkte ühendav lõik osutub selle kolmnurga kesklõiguks, mille pikkus on pool selle külje pikkusest, mille otspunktidest on tõmmatud mediaanid.

**LK 11.** *Kui kolmnurgas on ühest tipust tõmmatud mediaan ja teisest tipust tõmmatud tseviaan (sh teine mediaan, nurgapoolitaja või kõrgus), siis pikendame mediaani nii, et tekiks rööpkülik.*



- Olgu $O$ kolmnurga $ABC$ mediaani $AA_1$ ja mis tahes tseviaani $BB_1$ lõikepunkt ning punkt $D$ selline, et $ABDC$ on rööpkülik.
- Siis kolmnurgad $AOB_1$ ja $DOB$ on sarnased.
- Erijuhul, kui $BB_1$ on kolmnurga $ABC$ teine mediaan, siis saame mediaanide põhiomaduse kujul $\frac{BO}{OB_1} = 2 = \frac{AO}{OA_1}$.
- Kui $BB_1$ on näiteks kolmnurga $ABC$ nurgapoolitaja, siis nurgapoolitaja põhiomadust kasutades saame, et $\frac{BO}{OB_1} = 1 + \frac{BC}{AB}$.

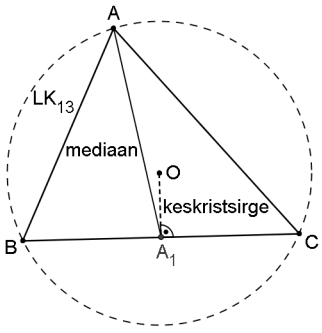
**LK 12.** *Kui täisnurkses kolmnurgas on hüpotenuusile tõmmatud mediaan, siis joonestame antud kolmnurga ümberringjoone.*




- Antud kolmnurga ümberringjoone keskpunkt ühtib hüpotenuusile tõmmatud mediaani aluspunktiga.

Märkus. Võib toimida ka vastupidises suunas: kui on antud täisnurkne kolmnurk ja selle kolmnurga ümberringjoon oma keskpunktiga, siis ühendades täisnurga tipu ümberringjoone keskpunktiga saame kolmnurga mediaani.

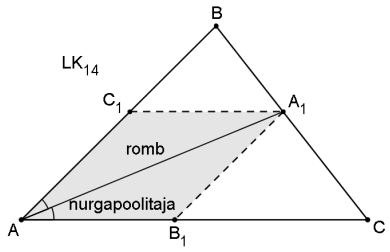
**LK 13.** *Kui kolmnurgas on tõmmatud mediaan ja antud selle kolmnurga ümberringjoon oma keskpunktiga, siis ühendame mediaani aluspunkti ja ümberringjoone keskpunkti.*




- Mediaani aluspunkti ja ümberringjoone keskpunkti läbiv sirge osutub selle kolmnurga külje keskristsirgeks.

## 4. Nurgapoolitajatega seotud lisakonstruktsioonid

**LK 14.** *Kui kolmnurgas on antud sisenurga poolitaja, siis läbi selle nurgapoolitaja aluspunkti tõmbame kolmnurga külgedega paralleelsed sirged.*



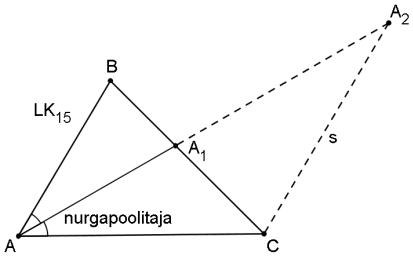

- Olgu $AA_1$ kolmnurga $ABC$ sisenurga poolitaja ning $B_1$ ja $C_1$ vastavalt külgede $AC$ ja $AB$ sellised punktid, et $A_1C_1 \parallel AC$ ja $A_1B_1 \parallel AB$.
- Siis nelinurk $AB_1A_1C_1$ on romb.

Märkused.

a) Mõnikord on kasulikum vaadelda tekkinud võrdhaarset kolmnurka $AC_1A_1$ (või $AB_1A_1$).

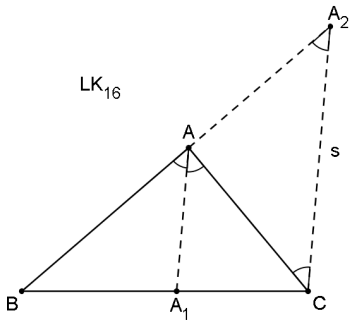
b) Märgime, et seejuures kolmnurgad $ABC$, $C_1BA_1$ ja $B_1A_1C$ on sarnased.

**LK 15.** *Kui kolmnurgas on antud sisenurga poolitaja, siis pikendame nurgapoolitajat üle selle aluspunkti kuni lõikumiseni sirgega, mis läbib selle kolmnurga teist tippu ja on paralleelne selle tipu vastasküljega.*



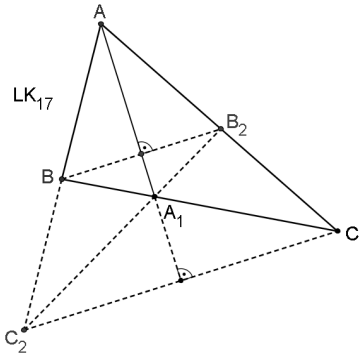

- Olgu $AA_1$ kolmnurga $ABC$ sisenurga poolitaja. Olgu $s$ punkti $C$ (või punkti $B$) läbiv ja küljega $AB$ (või küljega $AC$) paralleelne sirge. Olgu $A_2$ sirge $s$ ja nurgapoolitaja $AA_1$ pikenduse lõikepunkt.
- Siis kolmnurk $ACA_2$ on võrdhaarne ja $\Delta ABA_1 \sim \Delta A_2CA_1$.

**LK 16.** *Kui kolmnurgas on antud sisenurga poolitaja, siis üle selle nurga tipu pikendame ühte selle nurga lähiskülgedest ja läbi kolmanda tipu tõmbame nurgapoolitajaga paralleelse sirge.*



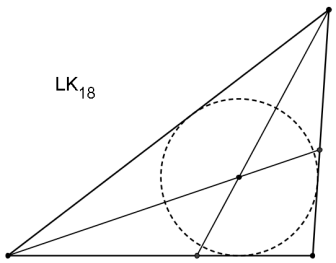

- Olgu $AA_1$ kolmnurga $ABC$ sisenurga poolitaja. Olgu $s$ näiteks punkti $C$ läbiv ja nurgapoolitajaga $AA_1$ paralleelne sirge. Olgu $A_2$ sirge $s$ ja külje $AB$ pikenduse lõikepunkt.
- Siis kolmnurk $CAA_2$ on võrdhaarne ja $\Delta ABA_1 \sim \Delta A_2BC$.

**LK 17.** *Kui kolmnurgas on antud sisenurga poolitaja, siis leiame kolmnurga tippudega sümmeetrilised punktid antud nurgapoolitaja suhtes.*




- Olgu $AA_1$ kolmnurga $ABC$ sisenurga poolitaja. Olgu $B_2$ ja $C_2$ vastavalt punktidega $B$ ja $C$ sümmeetrilised punktid nurgapoolitaja $AA_1$ suhtes.
- Siis saame, et punktid $B_2$ ja $C_2$ asuvad vastavalt sirgetel $AC$ ja $AB$. Seega tekivad sarnased võrdhaarsed kolmnurgad $BAB_2$ ja $C_2AC$.

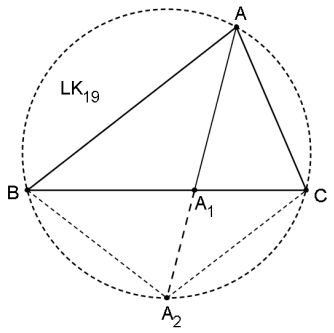
**LK 18.** *Kui kolmnurgas on antud vähemalt kaks nurgapoolitajat, siis joonestame antud kolmnurga siseringjoone.*




- Antud kolmnurga siseringjoone keskpunkt langeb kokku selle kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunktiga.

Märkus. Siin on võimalik ka vastupidine arutlus: kui on antud kolmnurk ja selle siseringjoon oma keskpunktiga, siis siseringjoone keskpunkti ja mis tahes kolmnurga tippu läbiv sirge osutub antud kolmnurga sisenurga poolitajaks.

**LK 19.** *Kui kolmnurgas on antud sisenurga poolitaja, siis joonestame selle kolmnurga ümberringjoone ja pikendame nurgapoolitajat lõikumiseni ümberringjoonega.*



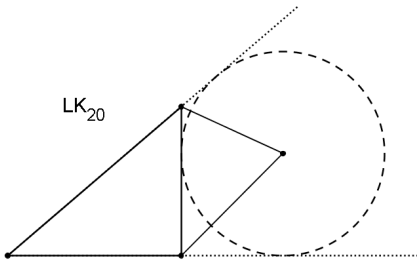

- Olgu $AA_1$ kolmnurga $ABC$ sisenurga poolitaja ning $A_2$ nurgapoolitaja pikenduse ja kolmnurga $ABC$ ümberringjoone lõikepunkt.
- Siis punkt $A_2$ poolitab kaare $BC$ ning $BA_2 = CA_2$.

Märkused.

a) Kui $O$ on ümberringjoone keskpunkt, siis $OA_2$ on kolmnurga külje $BC$ keskristsirge.

b) Ülaltoodud lisakonstruktsioon annab meile idee nurgapoolitaja joonestamiseks. Kui on antud kolmnurk ja selle ümberringjoon, siis poolitades näiteks kaare $BC$ või konstrueerides külje $BC$ keskristsirge ja leides selle lõikepunkti ümberringjoonega, oleme leidnud nurgapoolitaja punkti $A_2$.

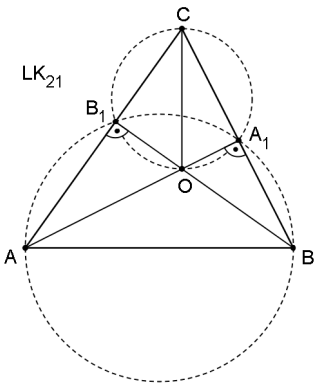
**LK 20.** *Kui kolmnurgas on antud kahe välisnurga poolitaja lõikepunkt, siis joonestame nende nurkade lähiskülje külgringjoone.*




- Antud kolmnurga külgringjoone keskpunkt langeb kokku selle kolmnurga kahe vastava välisnurga poolitaja ja kolmanda nurga sisenurga poolitaja lõikepunktiga.

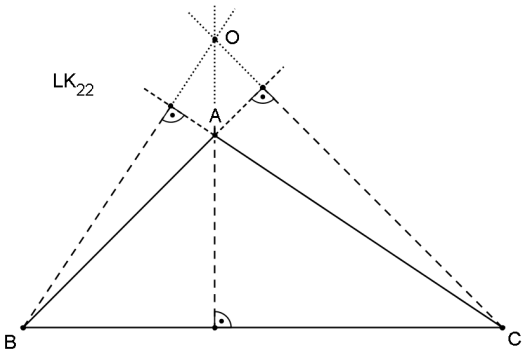
## 5. Kõrgustega seotud lisakonstruktsioonid

**LK 21.** *Kui kolmnurgas on antud kahest tipust tõmmatud kõrgused, siis joonestame ringjoone läbi antud kõrguste aluspunktide ja kas läbi vaadeldava kahe tipu või läbi kõrguste lõikepunkti ja kolmnurga kolmanda tipu.*



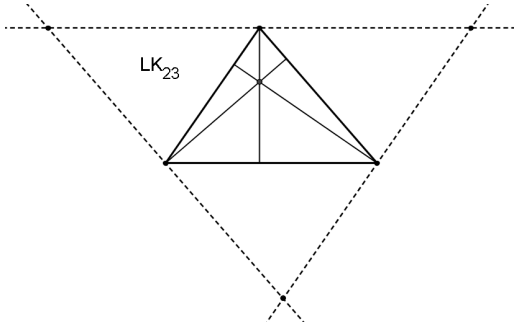

- Olgu $AA_1$ ja $BB_1$ kolmnurga $ABC$ kõrgused ning $O$ nende lõikepunkt, siis esimesel juhul lõik $AB$ ja teisel juhul lõik $CO$ on joonestatud ringjoonte diameetrid.

**LK 22.** *Kui nürinurkses kolmnurgas on antud kõrguste lõikepunkt, siis moodustame kolmnurga, mille tippudeks on esialgse kolmnurga teravnurkade tipud ja kõrguste lõikepunkt.*



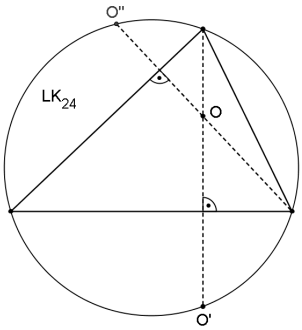

- Olgu $ABC$ nürinurkne kolmnurk nürinurgaga $BAC$ ning $O$ selle kolmnurga kõrguste lõikepunkt.
- Siis punkt $A$ on teravnurkse kolmnurga $BOC$ kõrguste lõikepunkt. Seega ka kolmnurga $BOC$ jaoks saab kasutada kõiki kõrguste omadusi.

**LK 23.** *Kui kolmnurgas on antud kõrguste lõikepunkt, siis läbi kolmnurga tippude tõmbame vastaskülgedega paralleelsed sirged.*



- Kui antud kolmnurga korral tõmbame läbi kolmnurga tippude vastaskülgedega paralleelsed sirged, siis tekib suurem kolmnurk, mille külgede keskpunktideks on esialgse kolmnurga tipud, ning mille keskristsirgete lõikepunktiks on esialgse kolmnurga kõrguste lõikepunkt.

**LK 24.** *Kui kolmnurgas on antud kõrguste lõikepunkt, siis joonestame selle kolmnurga ümberringjoone.*




- Osutub antud kolmnurga kõrguse pikenduse ja selle kolmnurga ümberringjoone lõikepunkt kõrguste lõikepunktiga sümmeetriliseks punktiks selle kolmnurga külje suhtes, millele vaadeldav kõrgus on tõmmatud.