Ülesandeid kombinatoorikast "nooremale" rühmale

Tartus 19. detsembril 2016

Loendamine

- ***Liitmisreegel.*** Olgu teatud omadusega objekti koostamiseks n võimalust ühel viisil ja m võimalust teisel viisil, kusjuures erinevad koostamisviisid annavad tulemuseks erinevad objektid. Siis kokku on nõutud omadusega objekti koostamiseks $n + m$ võimalust.

Näide. Kool annab ühe Madonna kontserdipileti sellisele õpilasele, kes oskab laulda. On teada, et koolis oskab laulda 10 poissi ja 4 tüdrukut. Mitmel viisil saab kool piletiga premeeritavat õpilast valida?

- ***Korrutamisreegel.*** Olgu kõigi teatud omadusega objektide koostamine võimalik läbi kahe valiku, millest esimeseks on n võimalust ja teiseks m võimalust, kusjuures ühe või teise valiku tegemine erinevalt annab kindlasti tulemuseks erinevad objektid. Siis kokku on nõutud omadusega objekti koostamiseks nm võimalust.

Näide. Kool annab Madonna kontserdipileti poisile ja tüdrukule, kes mõlemad oskavad laulda. On teada, et koolis oskab laulda 10 poissi ja 4 tüdrukut. Mitmel viisil saab kool kontserti külastava paari valida?

- ***Astendamisreegel.*** Olgu kõigi teatud omadusega objektide koostamine võimalik n valikuga m objektist, kusjuures kõik valikud on üksteisest sõltumatud ja kasvõi ühe valiku tegemine erinevalt või valikute järjekorra muutmine annab tulemuseks erinevad objektid. Siis kokku on nõutud omadusega objekti koostamiseks m^n võimalust.

Näide. Kool annab Madonna kontserdile paaripileti kõigile tüdrukutele, kes oskavad laulda. Iga laulda oskav tüdruk valib laulda oskavate poiste seast kaaslase, kellega koos kontserdile minna. Erinevad paaripiletid kehtivad erinevatel õhtutel (ehk erinevad tüdrukud saavad valida sama poissi). Koolis oskab laulda 10 poissi ja 4 tüdrukut. Mitmel võimalikul moel saavad kontserte külastavad paarid kujuneda?

Matemaatiline induktsioon

- ***Induktsiooniprintsiip.*** Olgu P kõigil naturaalarvudel defineeritud predikaat. Kui $P(0)$ ning iga naturaalarvu i korral järeldub $P(i)$ kehtivusest $P(i + 1)$ kehtivus, siis kehtib $P(n)$ iga naturaalarvu n korral.

Näide. Tõestada, et iga naturaalarvu n korral $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

- ***Täielik induktsiooniprintsiip.*** Olgu P kõigil naturaalarvudel defineeritud predikaat. Kui iga naturaalarvu i korral järeldub $P(i)$ sellest, et iga $j < i$ korral $P(j)$, siis kehtib $P(n)$ iga naturaalarvu n korral.

- ***Langusprintsiip.*** Igas mittetühjas naturaalarvude hulgas (ka lõpmatus!) leidub vähim element.

- ***Stabiliseeruvusprintsiip.*** Iga (lõpmatu) naturaalarvude jada $a_0, a_1, a_2, \ldots$, mis rahuldab tingimust $a_i \geqslant a_{i+1}$ iga naturaalarvu i korral, stabiliseerub, st mingi n korral $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$.

Näide. Tõestada, et iga naturaalarv esitub paarikaupa erinevate 2 astmete summana.

Invariandid ja variandid

- ***Invariant.*** Protsessi käigus muutumatuks jäävat suurust nimetatakse selle protsessi invariandiks.

Näide. Juku kirjutab tahvlile üheksakohalise arvu, mis sisaldab kõiki nullist erinevaid numbreid. Seejärel valib ta selles arvus mingi vähemalt kahest numbrist koosneva lõigu ja asendab selle lõigu temas sisalduvate numbrite korrutisega. Siis sooritab ta samasuguse operatsiooni saadud arvuga, jne. Kas võib juhtuda, et mingil sammul saab Juku tulemuseks arvu 9999?

- ***Variant.*** Protsessi käigus pidevalt vähenevat naturaalarvulist suurust nimetatakse selle protsessi variandiks.

Näide. Juku ja Miku mängivad järgmist mängu. Algul on tahvlil kirjutatud üheksakohaline arv, mis sisaldab kõiki nullist erinevaid numbreid. Igal käigul valib mängija selles arvus mingi vähemalt kahest numbrist koosneva lõigu ja asendab selle lõigu temas sisalduvate numbrite korrutisega. Mängija, kes ei saa käiku teha, kaotab. Tõesta, et mängul leidub võitja.

Ülesandeid kombinatoorikast "nooremale" rühmale

Tartus 19. detsembril 2016

Loendamine

- ***Liitmisreegel.*** Olgu teatud omadusega objekti koostamiseks n võimalust ühel viisil ja m võimalust teisel viisil, kusjuures erinevad koostamisviisid annavad tulemuseks erinevad objektid. Siis kokku on nõutud omadusega objekti koostamiseks $n + m$ võimalust.

Näide. Kool annab ühe Madonna kontserdipileti sellisele õpilasele, kes oskab laulda. On teada, et koolis oskab laulda 10 poissi ja 4 tüdrukut. Mitmel viisil saab kool piletiga premeeritavat õpilast valida?

- ***Korrutamisreegel.*** Olgu kõigi teatud omadusega objektide koostamine võimalik läbi kahe valiku, millest esimeseks on n võimalust ja teiseks m võimalust, kusjuures ühe või teise valiku tegemine erinevalt annab kindlasti tulemuseks erinevad objektid. Siis kokku on nõutud omadusega objekti koostamiseks nm võimalust.

Näide. Kool annab Madonna kontserdipileti poisile ja tüdrukule, kes mõlemad oskavad laulda. On teada, et koolis oskab laulda 10 poissi ja 4 tüdrukut. Mitmel viisil saab kool kontserti külastava paari valida?

- ***Astendamisreegel.*** Olgu kõigi teatud omadusega objektide koostamine võimalik n valikuga m objektist, kusjuures kõik valikud on üksteisest sõltumatud ja kasvõi ühe valiku tegemine erinevalt või valikute järjekorra muutmine annab tulemuseks erinevad objektid. Siis kokku on nõutud omadusega objekti koostamiseks m^n võimalust.

Näide. Kool annab Madonna kontserdile paaripileti kõigile tüdrukutele, kes oskavad laulda. Iga laulda oskav tüdruk valib laulda oskavate poiste seast kaaslase, kellega koos kontserdile minna. Erinevad paaripiletid kehtivad erinevatel õhtutel (ehk erinevad tüdrukud saavad valida sama poissi). Koolis oskab laulda 10 poissi ja 4 tüdrukut. Mitmel võimalikul moel saavad kontserte külastavad paarid kujuneda?

Matemaatiline induktsioon

- ***Induktsiooniprintsiip.*** Olgu P kõigil naturaalarvudel defineeritud predikaat. Kui $P(0)$ ning iga naturaalarvu i korral järeldub $P(i)$ kehtivusest $P(i + 1)$ kehtivus, siis kehtib $P(n)$ iga naturaalarvu n korral.

Näide. Tõestada, et iga naturaalarvu n korral $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

- ***Täielik induktsiooniprintsiip.*** Olgu P kõigil naturaalarvudel defineeritud predikaat. Kui iga naturaalarvu i korral järeldub $P(i)$ sellest, et iga $j < i$ korral $P(j)$, siis kehtib $P(n)$ iga naturaalarvu n korral.

- ***Langusprintsiip.*** Igas mittetühjas naturaalarvude hulgas (ka lõpmatus!) leidub vähim element.

- ***Stabiliseeruvusprintsiip.*** Iga (lõpmatu) naturaalarvude jada $a_0, a_1, a_2, \ldots$, mis rahuldab tingimust $a_i \geqslant a_{i+1}$ iga naturaalarvu i korral, stabiliseerub, st mingi n korral $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$.

Näide. Tõestada, et iga naturaalarv esitub paarikaupa erinevate 2 astmete summana.

Invariandid ja variandid

- ***Invariant.*** Protsessi käigus muutumatuks jäävat suurust nimetatakse selle protsessi invariandiks.

Näide. Juku kirjutab tahvlile üheksakohalise arvu, mis sisaldab kõiki nullist erinevaid numbreid. Seejärel valib ta selles arvus mingi vähemalt kahest numbrist koosneva lõigu ja asendab selle lõigu temas sisalduvate numbrite korrutisega. Siis sooritab ta samasuguse operatsiooni saadud arvuga, jne. Kas võib juhtuda, et mingil sammul saab Juku tulemuseks arvu 9999?

- ***Variant.*** Protsessi käigus pidevalt vähenevat naturaalarvulist suurust nimetatakse selle protsessi variandiks.

Näide. Juku ja Miku mängivad järgmist mängu. Algul on tahvlil kirjutatud üheksakohaline arv, mis sisaldab kõiki nullist erinevaid numbreid. Igal käigul valib mängija selles arvus mingi vähemalt kahest numbrist koosneva lõigu ja asendab selle lõigu temas sisalduvate numbrite korrutisega. Mängija, kes ei saa käiku teha, kaotab. Tõesta, et mängul leidub võitja.