Ülesandeid kombinatoorikast "nooremale" rühmale

Tartus 19. detsembril 2016

Loendamine

1. Põrgu Ülemnõukogu iga saadik kuulub täpselt ühte 666 fraktsioonist. Igas fraktsioonis on neli saadikut, kellest üks on fraktsiooni esimees. Põrgu Põhiseaduse kohaselt võib rühm saadikuid moodustada komisjoni, kui selles rühmas on igast fraktsioonist täpselt üks liige ning ülimalt üks neist pole fraktsiooni esimees.

   Kui palju erinevaid komisjone on Põrgu Ülemnõukogus võimalik moodustada? (PKV 11. klass 1999)

2. Kui palju leidub viiekohalisi 8-ga jaguvaid arve, mille ükski number ei ole null? (LVS noorem rühm 2015)

3. Kehalise kasvatuse tunnis käsib õpetaja tüdrukutel rivistuda nii, et mitte kellegi poleks mõlemal pool kõrval temast lühemat tüdrukut. Klassis on 13 tüdrukut, iga kaks tüdrukut on erineva pikkusega. Leia erinevate võimaluste arv tüdrukutel õpetaja käsk täita. (LVS noorem rühm 2014)

4. Mitmel viisil on võimalik 3 lapse vahel jaotada 3 punast ja 3 sinist kommi nii, et iga laps saaks vähemalt 1 kommi? (PKV 10. klass 2014)

Matemaatiline induktsioon

5. Kaks tantsijat alustab rivitantsu. Saatelaulu teise salmi algul astub kolmas tantsija nende vahele, nii et moodustub kolmene rivi. Samamoodi astub iga järgmise salmi algul iga kahe rivis järjestikku asuva tantsija vahele üks uus tantsija. Mitu tantsijat on rivis kümnenda salmi ajal? (PKV 9. klass 2016)

6. Leidur esitles kuningale oma uut põnevat lauamängu 9×10 ruudustikul. Kuningas lubas talle tasuks esimese ruudu eest ühe riisitera, teise ruudu eest samuti ühe riisitera ning iga järgneva ruudu eest samapalju riisiteri kui kahe eelmise ruudu eest kokku. Tõesta, et viimase ruudu eest teenis leidur vastavalt kuninga lubadusele rohkem kui 2015^4 riisitera. (LVT vanem rühm 2015)

7. Olgu n positiivne täisarv. Tõesta võrratus

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2n+1}}.$$

   (PKV 12. klass 2015)

8. Tahvlile kirjutatakse mingi positiivne täisarv n ühe korra, seejärel kirjutatakse arvu $n-1$ kaks korda jne, igal järgneval sammul kirjutatakse viimati tahvlile kirjutatud arvudest ühe võrra väiksemat arvu kaks korda rohkem kordi. Nullideni jõudmisel lõpetatakse. Tõesta, et lõpuks tahvlil olevate arvude summa on väiksem kui 2^{n+1}. (LPV 12. klass 2014)

9. Korrapärase n-nurga igasse tippu on kirjutatud kas arv 0 või arv 1. Juku jaotab n-nurga lõikumatute diagonaalidega kolmnurkadeks ning kirjutab iga kolmnurga sisse tema tippudes olevate arvude summa. Tõesta, et Juku saab diagonaalid valida nii, et kolmnurkadesse kirjutatud arvudest suurim ja vähim ei erine rohkem kui 1 võrra. (LVS vanem rühm 2009)

10. Ühel lõunameresaarel on n kindlust ($n>0$), mis asuvad ühel sirgel. Iga kindlust valvab kaks elevanti, kes mõlemad vaatavad piki seda sirget, kuid vastassuundades. Et kindlus A saaks kindluse B alistada, peab see elevant kindlusest A, kes vaatab mööda sirget B suunas, minema oma vaatesuunda muutmata piki sirget B poole, võitlema kõigi teele jäävate kindluste nende elevantidega, kelle vaatesuund on tema omale vastupidine (k.a kindluse B vastava elevandiga, kuid mitte kindluse A teise elevandiga), ja nad kõik võitma. On teada, et kõik elevandid on erineva raskusega, raskem elevant alati võidab kergema ja elevantide kaalud sündmuste käigus ei muutu. Tõesta, et saarel leidub täpselt üks kindlus, mida ükski teine kindlus alistada ei saa. (LVS vanem rühm 2015, IMO eelvalik 2015)

11. Elektriskeemis on lõplik arv lampe. Mõned lampide paarid on juhet pidi otseühenduses. Iga lamp põleb kas punaselt või siniselt. Ühe lülitusega muudavad korraga värvi (punasest siniseks või vastupidi) kõik

need lambid, mis on otseühenduses mõne teist värvi lambiga. Tõesta, et mingi arvu lülituste järel on kõigi lampide värvid samad mis kaks lülitust enne seda. (LVT noorem rühm 2016)

Variandid ja invariandid

12. Tahvlile on kirjutatud arvud 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Igal sammul kustutab Juku omal valikul mingid kaks tahvlil olevat arvu a ja b ning kirjutab asemele ühe arvu $ab+a+b$. Nii toimib ta seni, kuni tahvlile jääb ainult üks arv. Leia kõik võimalused, milline arv võib lõpuks tahvlile jääda. (LVS noorem rühm 2013)

13. Laual on kolm kivihunnikut, mille kivide arvud on 2012, 2013 ja 2014. Ühel sammul tohib võtta mingist hunnikust 2 kivi ja panna need ülejäänud kahte hunnikusse, kummassegi ühe, või võtta mingist kahest hunnikust kummastki 1 kivi ning panna need mõlemad kolmandasse. Kas on võimalik, et peale lõplikku arvu samme on

    (a) kõigis hunnikutes võrdselt 2013 kivi?

    (b) kõik kivid ühes hunnikus?

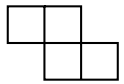
    (PKV 11. klass 2014)

14. Jukul on ruudulisest paberist välja lõigatud kõik erinevad **tetrominokujundid**, st kujundid, mis koosnevad neljast omavahel külgipidi ühendatud ühikruudust. Kas Juku saab oma kujunditest moodustada ristküliku, nii et iga kujundit on kasutatud täpselt üks kord? Kujundeid võib selleks tasandil pöörata, kuid mitte üles tõsta ja teistpidi keerata. (PKV 12. klass 2011)

15. Ruudustikule asetatakse hulk kaarte mõõtmetega 1×2 nii, et kaartide servad ühtivad ruudustiku joontega, ükski kaart ei ulatu üle ruudustiku ääre ja iga lahtrit katab täpselt kaks kaarti. Tõesta, et saab eemaldada osa kaarte nii, et ruudustiku iga lahtrit jääb katma täpselt üks kaart. (LPV 11. klass 2012)

16. Puldil on nm lampi, mis on paigutatud $n \times m$ tabelina. Algul ükski lamp ei põle. Ühe nupuvajutusega saab ümber lülitada meelevaldselt valitud kolm ühes reas või veerus kõrvuti asuvat lampi. Milliste positiivsete täisarvude paaride (n, m) korral on võimalik saavutada olukord, kus kõik lambid põlevad? (LVT vanem rühm 2015)

17. Olgu k positiivne täisarv. Milline on suurim arv neljast ruudust koosnevaid „jõnkse“, mida saab korraga paigutada $(2k+1) \times (2k+1)$ ruudustikule nii, et jõnksud üksteist ei kata ega ulatu üle ruudustiku ääre? Jõnkse võib pöörata ja ka peegeldada (ümber pöörata). (LVT vanem rühm 2011)



18. Pakis on 2009 kaarti, mille üks külg on valge ja teine must. Kaardid asetatakse ühte ritta, valge külg üleval. Kaks mängijat, asudes samal pool kaartide rida, teevad kordamööda käike. Igal käigul valib mängija 50 järjestikust kaarti, millest esimesel on valge külg üleval, ja pöörab need kõik ümber. Mängija, kes ei saa käiku teha, kaotab.

    a) Kas see mäng peab tingimata lõppema?

    b) Kas esimesel mängijal leidub võitev strateegia?

    (IMO eelvalik 2009)

Ülesandeid kombinatoorikast "nooremale" rühmale

Tartus 19. detsembril 2016

Loendamine

1. Põrgu Ülemnõukogu iga saadik kuulub täpselt ühte 666 fraktsioonist. Igas fraktsioonis on neli saadikut, kellest üks on fraktsiooni esimees. Põrgu Põhiseaduse kohaselt võib rühm saadikuid moodustada komisjoni, kui selles rühmas on igast fraktsioonist täpselt üks liige ning ülimalt üks neist pole fraktsiooni esimees.

   Kui palju erinevaid komisjone on Põrgu Ülemnõukogus võimalik moodustada? (PKV 11. klass 1999)

2. Kui palju leidub viiekohalisi 8-ga jaguvaid arve, mille ükski number ei ole null? (LVS noorem rühm 2015)

3. Kehalise kasvatuse tunnis käsib õpetaja tüdrukutel rivistuda nii, et mitte kellegi poleks mõlemal pool kõrval temast lühemat tüdrukut. Klassis on 13 tüdrukut, iga kaks tüdrukut on erineva pikkusega. Leia erinevate võimaluste arv tüdrukutel õpetaja käsk täita. (LVS noorem rühm 2014)

4. Mitmel viisil on võimalik 3 lapse vahel jaotada 3 punast ja 3 sinist kommi nii, et iga laps saaks vähemalt 1 kommi? (PKV 10. klass 2014)

Matemaatiline induktsioon

5. Kaks tantsijat alustab rivitantsu. Saatelaulu teise salmi algul astub kolmas tantsija nende vahele, nii et moodustub kolmene rivi. Samamoodi astub iga järgmise salmi algul iga kahe rivis järjestikku asuva tantsija vahele üks uus tantsija. Mitu tantsijat on rivis kümnenda salmi ajal? (PKV 9. klass 2016)

6. Leidur esitles kuningale oma uut põnevat lauamängu 9×10 ruudustikul. Kuningas lubas talle tasuks esimese ruudu eest ühe riisitera, teise ruudu eest samuti ühe riisitera ning iga järgneva ruudu eest samapalju riisiteri kui kahe eelmise ruudu eest kokku. Tõesta, et viimase ruudu eest teenis leidur vastavalt kuninga lubadusele rohkem kui 2015^4 riisitera. (LVT vanem rühm 2015)

7. Olgu n positiivne täisarv. Tõesta võrratus

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2n+1}}.$$

   (PKV 12. klass 2015)

8. Tahvlile kirjutatakse mingi positiivne täisarv n ühe korra, seejärel kirjutatakse arvu $n-1$ kaks korda jne, igal järgneval sammul kirjutatakse viimati tahvlile kirjutatud arvudest ühe võrra väiksemat arvu kaks korda rohkem kordi. Nullideni jõudmisel lõpetatakse. Tõesta, et lõpuks tahvlil olevate arvude summa on väiksem kui 2^{n+1}. (LPV 12. klass 2014)

9. Korrapärase n-nurga igasse tippu on kirjutatud kas arv 0 või arv 1. Juku jaotab n-nurga lõikumatute diagonaalidega kolmnurkadeks ning kirjutab iga kolmnurga sisse tema tippudes olevate arvude summa. Tõesta, et Juku saab diagonaalid valida nii, et kolmnurkadesse kirjutatud arvudest suurim ja vähim ei erine rohkem kui 1 võrra. (LVS vanem rühm 2009)

10. Ühel lõunameresaarel on n kindlust ($n>0$), mis asuvad ühel sirgel. Iga kindlust valvab kaks elevanti, kes mõlemad vaatavad piki seda sirget, kuid vastassuundades. Et kindlus A saaks kindluse B alistada, peab see elevant kindlusest A, kes vaatab mööda sirget B suunas, minema oma vaatesuunda muutmata piki sirget B poole, võitlema kõigi teele jäävate kindluste nende elevantidega, kelle vaatesuund on tema omale vastupidine (k.a kindluse B vastava elevandiga, kuid mitte kindluse A teise elevandiga), ja nad kõik võitma. On teada, et kõik elevandid on erineva raskusega, raskem elevant alati võidab kergema ja elevantide kaalud sündmuste käigus ei muutu. Tõesta, et saarel leidub täpselt üks kindlus, mida ükski teine kindlus alistada ei saa. (LVS vanem rühm 2015, IMO eelvalik 2015)

11. Elektriskeemis on lõplik arv lampe. Mõned lampide paarid on juhet pidi otseühenduses. Iga lamp põleb kas punaselt või siniselt. Ühe lülitusega muudavad korraga värvi (punasest siniseks või vastupidi) kõik

need lambid, mis on otseühenduses mõne teist värvi lambiga. Tõesta, et mingi arvu lülituste järel on kõigi lampide värvid samad mis kaks lülitust enne seda. (LVT noorem rühm 2016)

Variandid ja invariandid

12. Tahvlile on kirjutatud arvud 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Igal sammul kustutab Juku omal valikul mingid kaks tahvlil olevat arvu a ja b ning kirjutab asemele ühe arvu $ab+a+b$. Nii toimib ta seni, kuni tahvlile jääb ainult üks arv. Leia kõik võimalused, milline arv võib lõpuks tahvlile jääda. (LVS noorem rühm 2013)

13. Laual on kolm kivihunnikut, mille kivide arvud on 2012, 2013 ja 2014. Ühel sammul tohib võtta mingist hunnikust 2 kivi ja panna need ülejäänud kahte hunnikusse, kummassegi ühe, või võtta mingist kahest hunnikust kummastki 1 kivi ning panna need mõlemad kolmandasse. Kas on võimalik, et peale lõplikku arvu samme on

    (a) kõigis hunnikutes võrdselt 2013 kivi?

    (b) kõik kivid ühes hunnikus?

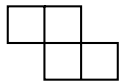
    (PKV 11. klass 2014)

14. Jukul on ruudulisest paberist välja lõigatud kõik erinevad **tetrominokujundid**, st kujundid, mis koosnevad neljast omavahel külgipidi ühendatud ühikruudust. Kas Juku saab oma kujunditest moodustada ristküliku, nii et iga kujundit on kasutatud täpselt üks kord? Kujundeid võib selleks tasandil pöörata, kuid mitte üles tõsta ja teistpidi keerata. (PKV 12. klass 2011)

15. Ruudustikule asetatakse hulk kaarte mõõtmetega 1×2 nii, et kaartide servad ühtivad ruudustiku joontega, ükski kaart ei ulatu üle ruudustiku ääre ja iga lahtrit katab täpselt kaks kaarti. Tõesta, et saab eemaldada osa kaarte nii, et ruudustiku iga lahtrit jääb katma täpselt üks kaart. (LPV 11. klass 2012)

16. Puldil on nm lampi, mis on paigutatud $n \times m$ tabelina. Algul ükski lamp ei põle. Ühe nupuvajutusega saab ümber lülitada meelevaldselt valitud kolm ühes reas või veerus kõrvuti asuvat lampi. Milliste positiivsete täisarvude paaride (n, m) korral on võimalik saavutada olukord, kus kõik lambid põlevad? (LVT vanem rühm 2015)

17. Olgu k positiivne täisarv. Milline on suurim arv neljast ruudust koosnevaid „jõnkse“, mida saab korraga paigutada $(2k+1) \times (2k+1)$ ruudustikule nii, et jõnksud üksteist ei kata ega ulatu üle ruudustiku ääre? Jõnkse võib pöörata ja ka peegeldada (ümber pöörata). (LVT vanem rühm 2011)



18. Pakis on 2009 kaarti, mille üks külg on valge ja teine must. Kaardid asetatakse ühte ritta, valge külg üleval. Kaks mängijat, asudes samal pool kaartide rida, teevad kordamööda käike. Igal käigul valib mängija 50 järjestikust kaarti, millest esimesel on valge külg üleval, ja pöörab need kõik ümber. Mängija, kes ei saa käiku teha, kaotab.

    a) Kas see mäng peab tingimata lõppema?

    b) Kas esimesel mängijal leidub võitev strateegia?

    (IMO eelvalik 2009)