TÜ TEADUSKOOL

DIRICHLET' PRINTSIIP

Ettevalmistus matemaatikaolümpiaadiks I

MAA01-**II**

Koostanud Raili Vilt

TARTU
2016

DIRICHLET' PRINTSIIP

Olgu meil 4 jänest kolmes puuris nii, et ükski puur ei ole tühi. Mitu jänest on igas puuris? On üpriski lihtne leida vastust, et ühes puuris on kaks jänest ja ülejäänud kahes, kummaski üks.
Kui meil on aga vaja 5 jänest panna 3 puuri nii, et ükski puur ei oleks tühi?
Paneme kõigepealt igasse puuri ühe jänese, siis jääb veel kaks jänest puuridesse panna. Võime jänesed panna nii, et ühes oleks kolm ja kahes ülejäänus üks, aga võime ka panna ühte ühe ja kahte ülejäänusse kumbagi kaks.
On selge, et olukorras, kus jäneseid on rohkem kui puure ja ükski puur ei ole tühi, eksisteerib alati vähemalt üks puur, milles on rohkem kui üks jänes. (Vähemalt üks st. üks selline on kindlasti, aga võib olla ka rohkem.)
Olgu meil jällegi 5 jänest vaja panna 3 puuri, aga mõni puuridest võib tühjaks jääda. Siis on meil lisaks eelnenud võimalustele veel kolm võimalust: kõik jänesed istuvad ühes puuris, ühes puuris on kaks jänest ning teises kolm ja kolmas on tühi, ühes on üks jänes teises neli ja kolmas on tühi. Kõigi kolme võimaluse korral eksisteerib samuti vähemalt üks puur, milles on vähemalt kaks jänest.

Sellele tähelepanekule tuginebki Dirichet' printsiip, mis kõlab:

Olgu N puuris mitte vähem kui N+1 jänest, siis leidub puur, milles on mitte vähem kui 2 jänest.

(* mitte vähem kui N+1, st. seal on kas N+1 või veel rohkem)

Näide 1. Kuus last sõid kokku ära 8 jäätist.
a) Tõestage, et üks neist sõi vähemalt 2 jäätist,
b) Kas keegi lastest sõi kindlasti täpselt kaks jäätist?

Lahendus: a) Et jäätisi on rohkem lapsi, siis vastavalt Dirichlet' printsiibile leidub laps, kes sõi vähemalt 2 jäätist.
b) Sellele küsimusele ei saa nende andmete põhjal vastata.
Näiteks, kõik kaheksa jäätist võis ära süüa üks laps.
Kui aga juurde lisada eeldus, et igaüks sõi vähemalt ühe, siis on võimalik, et viis last sõid ühe ja üks kolm jäätist või neli sõid ühe ja kaks sõid kaks jäätist.

Dirichlet' printsiip rakendub ka järgmises ülesandes, mis on väga hästi tuntud.
Sahtlis on 10 kollast ja 10 sinist sokki. Vähemalt mitu sokki tuleb pimesi sahtlist võtta, et nende seas oleks vähemalt üks paar sama värvi sokke?
Me saame mõelda nii: sokkide värvid- need oleks nagu puurid ja välja võetavate sokkide arv oleks jänesed. Seega küsimus oleks, et meil on kaks puuri ja vähemalt mitut jänest oleks vaja, et vähemalt ühes puuris oleks kaks jänest.
Loomulikult ei pea iga ülesande lahenduses kirjutama, et need on nüüd puurid ja need on jänesed.
Saab ju vastuse leida ka nii, et olgu esimene sokk kollane, siis juhul kui teine on kollane, siis ongi OK. Aga me ei saa olla kindlad, et kahest piisab, sest halvemal juhul on teine sokk sinine. Kuna sokke on vaid kahte värvi, siis kolmanda soki värv peab kindlasti ühtima ühe eelnevalt väljavõetud soki värviga.
Aga mõte on siingi tegelikult seesama, mis ennem. On kaks erinevat hulka ja meil on kolm objekti ja järelikult kaks objekti kuuluvad samasse hulka.

Näide 2. Klassis on 15 õpilast. Kas leidub kuu, millal oma sünnipäeva tähistab mitte vähem kui kaks õpilast?

Lahendus: Jah, leidub küll, sest on ainult 12 kuud, aga õpilasi on 15, 15>12.
(Selles ülesandes on õpilased "jänesteks" ja kuud "puurideks".)

Näide 3. On antud 25 neljakohalist naturaalarvu, mille kirjutamiseks on kasutatud numbreid 1,2,3,4 ning igas arvus on kõik numbrid erinevad. Põhjenda, et nende 25 arvu seas on vähemalt kaks võrdset arvu?

Lahendus: Erinevaid neljakohalisi arve, mille kirjutamiseks on kasutatud nelja erinevat numbrit ja iga numbrit on igas arvus kasutatud vaid üks kord, on kokku $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Kuna arve on 25 siis neid on rohkem kui võimalusi ja järelikult vähemalt kaks antud arvudest peavad olema võrdsed.

Näide 4. Peeter tahab tahvlile kirjutada 55 erinevat kahekohalist arvu nii, et nende seas ei oleks kahte arvu, millede summa on 100. Kas ta saab seda teha ?
Lahendus: Ei saa. Vaatleme kõiki kahekohalisi arve. Jaotame arvud 10 kuni 90 (välja arvatud arv 50) paaridesse: (10, 90); (11,89); . . . ; (49,51).
Iga paari summa on 100. Selliseid paare on 40 ja veel on 10 arvu ilma paariliseta. Need arvud on 50, 91, 92, ... , 99. Seega kokku on 50 "puuri" (40 + 10).

Peeter tahab kirjutada 55 arvu, aga 55 > 50, seega kirjutab ta kindlasti kaks arvu ühest paarist, aga nende summa on 100.
Dirichlet' printsiibi üldistus:

Kui N puuris on rohkem kui (N · k) jänest, siis leidub puur, milles on rohkem kui k jänest. (k on naturaalarv)

Näide 5. Kastis on nelja sorti õunu ja kokku on neid 105. Põhjendage, et nende seas leidub vähemalt 27 õuna, mis on ühest ja samast sordist.

Lahendus 1: Siin ülesandes on õunad "jänesteks" ja sordid "puurideks" ning paneme andmed Dirichlet' printsiibi üldistuse sõnastusse asemele.
Kui kastis on nelja sorti õunu kokku rohkem kui 4 · k, siis leidub kastis sort, mida on rohkem kui k õuna. Et kastis on kokku 105 õuna ja 105 = 4 · 26 + 1, siis k = 26. Järelikult peab leiduma sort, mida on rohkem kui 26 õuna ehk vähemalt 27 õuna.

Lahendus 2: Oletame vastuväiteliselt, et ei leidu sorti, mida oleks vähemalt 27 õuna. Seega igast sordist saab maksimaalselt olla 26 õuna ning õunte koguarv saaks maksimaalselt olla 4 · 26 = 104. Et tegelikult on õunu 105, siis oli oletus vale ja peab leiduma vähemalt üks sort, mida on vähemalt 27 õuna.

Näide 6. Inimesel on peas mitte üle 400 000 juuksekarva. Linnas M on rohkem kui 8 miljonit elanikku. Tõestage, et leidub vähemalt 20 linna M elanikku, kellel on sama arv juuksekarvu.

Lahendus 1: Tingimuse kohaselt võib igal elanikul peas olla 0 kuni 400 000 juuksekarva. Seega, kui elanikud jaotada rühmadesse, nii et ühte rühma kuuluvad inimesed, kellel on sama arv juuksekarvu, saame 400 001 rühma.
Kui elanikke on kokku 400001 · k, siis leidub moodustatud rühmadest vähemalt üks, milles on rohkem kui k inimest. Et elanikke on vähemalt 8000000 ja 8000000 = 400001 · 19 + 399981, siis leidub rühm, milles on rohkem kui 19 ehk vähemalt 20 inimest.
Lahendus 2: Oletame, et väide ülesandes on vale. See tähendab, teeme oletuse, et kiilaspäiseid linnas M ei ole rohkem kui 19, neid kellel on peas ainult üks juuksekarv ei ole ka rohkem kui 19, ... ja neid, kellel 400 000 juuksekarva, ei ole ka rohkem kui 19. Siis kokku saame linna M elanikke mitte rohkem kui

$19 \cdot 400\,001 = 7600019$, mis on vähem kui 8 miljonit. Tekib vastuolu ja seega tõesti leidub vähemalt 20 linna M elanikku, kellel on peas ühepalju juuksekarvu.
Dirichlet' printsiibist saab järeldada

*** Kui N puuris on vähem kui $\frac{N(N-1)}{2}$ jänest, siis leidub jäneste mistahes paigutuse korral vähemalt kaks puuri, milledes on ühepalju jäneseid (võib olla et mitte ühtegi).**

Seda Dirichlet' printsiibi järeldust nimetatakse ka **ebapiisavuse printsiibiks**, sest jäneseid ei ole piisavalt, et neid igasse puuri panna erinev arv.

Olgu meil 4 puuri, siis eeltoodud järelduse kohaselt peab selleks, et leiduks vähemalt kaks puuri, milledes on ühepalju jäneseid, jäneste koguarv olema väiksem kui $6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$. Seega 5, 4, 3, 2 ja 1 jänese mistahes paigutuse korral 4 puuri, leidub alati vähemalt kaks puuri, milledes on ühepalju jäneseid, võib olla et mõnes puuris ei ole ühtegi.
Miks see järeldus kehtib?

Põhjenduseks leiame vähima arvu jäneseid, keda saab N puuri paigutada nii, et igas puuris on erinev arv jäneseid. Olgu esimeses puuris 0 jänest, teises 1 jänes, kolmandas 2 jänest, . . ., N puuris N–1 jänest. Siis neis puurides on kokku jäneseid $0 + 1 + 2 + \ldots + (N-1) = \frac{N(N-1)}{2}$. Seega, kui on vähem jäneseid, siis peab leiduma vähemalt kaks puuri, milledes on ühepalju jäneseid, sõltumata sellest, kuidas me neid sinna paigutame.

Näide 7. On viis jänest ja need tuleb puuridesse panna nii, et jäneste mistahes paigutuse korral leidub vähemalt kaks puuri, milles on ühepalju jäneseid, võib olla et mõnes pole ühtegi. Leia vajaminevate puuride vähim võimalik arv.

Lahendus: Kasutades eeltoodud järeldust saame, et viie jänese korral on vähim puuride arv 4. Seda sellepärast, et 4 on vähim arv, mille korral $\frac{N(N-1)}{2} > 5$.

Veel mõned näiteülesanded.

Näide 8. 1) Leia võimalikud jäneste arvud, kui puure on 8 ning
a) vähemalt ühes puuris on vähemalt kaks jänest
b) leiduks vähemalt kaks puuri, milledes on ühepalju jäneseid

2) Leia võimalikud puuride arvud, kui jäneseid on 8 ning
a) vähemalt ühes puuris on vähemalt kaks jänest
b) leiduks vähemalt kaks puuri, milledes on ühepalju jäneseid

Vastus:1) a) 9 või enam, b) 27 või vähem
2) a) 7 või vähem, b) 5 või rohkem

Näide 9. Põhjenda, et mitte ükski sirge ei saa lõikuda kolmnurga kõigi kolme küljega, kui ükski lõikepunkt ei asu kolmnurga tippudes.

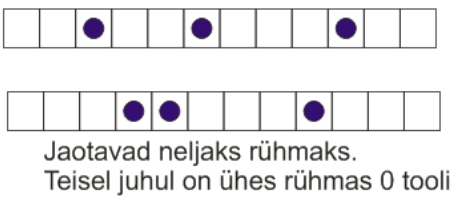
Lahendus: Sirge jaotab tasandi kaheks pooltasandiks. *Siin need pooltasandid on puurideks ja kolmnurga tipud on jänesteks.* On selge, et kolmnurga kaks tippu peavad asuma ühel pooltasanadil. Seega see joonistatud sirge ei saa läbida seda kolmnurga külge, mille mõlemad tipud asuvad samal pooltasandil.

Näide 10. Ruumis on 5 inimest. Põhjendage, et on nende seas vähemalt 2 inimest, kellel on nende viie seas ühepalju sõpru. (Sõprus on teatavasti vastastikune.)

Lahendus: Vaatleme kõigepealt ühte inimest. Tal kas on 0, 1, 2, 3 või 4 sõpra. Kui ta on kõigiga sõber, siis ei leidu nende viie seas inimest, kellel poleks ühtegi sõpra. Seega igal ruumis viibival inimesel on kas 0, 1, 2, 3 või 1, 2, 3, 4 sõpra. Mõlemal juhul on neli võimalust, aga inimesi on viis. Järelikult on nende seas vähemalt kaks, kellel on ühepalju sõpru.

Näide 11. Reas on 12 tooli ja neil istub 9 inimest (iga inimene ikka vaid ühel toolil korraga). Põhjenda, et kindlasti leiduvad kolm kõrvuti olevat tooli, millel inimesed istuvad.

Lahendus: Kuna toole on 12 ja inimesi on 9, siis tühje toole on 3. Need kolm tühjad tool jaotavad ülejäänud toolid nelja rühma (kui kaks tühja tooli on kõrvuti, siis ühes ülejäänud toolide rühmas on null tooli). Kui me 9 inimest jaotame 4 rühma, siis



Jaotavad neljaks rühmaks.
Teisel juhul on ühes rühmas 0 tooli

peab leiduma vähemalt üks rühm, milles on vähemalt 3 inimest. (Kui oleks 4 rühma ja igas oleks vähem kui 3, siis saaks inimesi olla maksimaalselt 8). Seega tõesti peavad leiduma kolm kõrvutiolevat tooli, millel inimesed istuvad.

Näide 12. Ümmarguse laua taga istusid võrdsete vahedega 100 inimest. Teada on, et nende seas oli mehi rohkem kui naisi. Tõesta, et istujate seas leidub vähemalt kaks meest, kes istuvad vastamisi (ehk leidub diameeter, mille mõlemas otsas istub mees.).

Lahendus: Et laua ääres istub 100 inimest, siis kokku on 50 diameetrit, millede otstes istuvad inimesed. Et mehi on rohkem kui naisi, siis saab olla maksimaalselt 49 diameetrit, mille ühes otsas istuks naine. Seega peab leiduma vähemalt üks diameeter, mille mõlemas otsas istuks meesterahvas.

Näide 13. (2009. OI piirkonnavoor, 9.klass)
Banaanias on 2009 ärimeest, kes sooritavad äritehinguid ainult omavahel (iseendaga tehinguid sooritada ei saa). Lõppeval kuul oli igal Banaania ärimehel paarisarv tehingupartnereid (võib olla ka 0). Tõesta, et Banaanias leidub kolm ärimeest, kellel oli lõppeval kuul sama arv tehingupartnereid.

Lahendus: Igal Banaania ärimehel saab lõppeval kuul olla kas 0, 2, 4, . . . , 2006 või 2008 tehingupartnerit, seega kokku 1005 võimalust. Kui kellelgi on 2008 tehingupartnerit, on ta teinud tehinguid kõigi ülejäänud Banaania ärimeestega, mis tähendab, et igaühel ülejäänud ärimeestest on rohkem kui 0 tehingupartnerit. Järelikult ei saa Banaanias leiduda kaht ärimeest, kel oleks lõppeval kuul vastavalt 0 ja 2008 tehingupartnerit, nii et erinevaid võimalikke tehingupartnerite arvusid on 1004. Oletades, et ülimalt kahel ärimehel on lõppeval kuul sama arv tehingupartnereid, saame Banaania ärimeeste arvuks ülimalt $2 \cdot 1004$ ehk 2008, mis on vastuolus eeldusega. Järelikult peab Banaanias leiduma vähemalt kolm ärimeest, kellel on lõppeval kuul sama arv tehingupartnereid.

Märkus 1. See ülesanne on rakendus Dirichlet' printsiibile: *kui on n puuri ja neisse paigutatakse* $kn + 1$ *objekti, siis leidub puur, kus on vähemalt* $k + 1$ *objekti*. Siin olid pesade rollis võimalused, mitu tehingupartnerit võib lõppeval kuul olla, ja objektide rollis Banaania ärimehed, kusjuures $n = 1004$, $k = 2$.
Märkus 2. Selline riik, kus on 2009 ärimeest ja igaühel on lõppeval kuul paarisarv tehingupartnereid, on kindlasti võimalik – näiteks igaüks neist võib lõppeval kuul olla tehinguid mitte teinud.

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks MAA01-II

Ülesanne 1. (5p) Paberisse mõõtmetega 10 cm $\times$ 100 cm torgati nõelaga 999 auku. Tõesta, et sellest paberist on kindlasti võimalik välja lõigata ruut mõõtmetega 1 cm $\times$ 1 cm nii, et selles ei oleks ühtegi torgatud aukudest. (Torgatud augud on imepisikesed ja loeme neid punktideks.)

Ülesanne 2. (5p) On 25 kommi. Leia vähim arv lapsi, kellede vahel saab neid komme jaotada nii, et mistahes jaotuse korral leidub alati vähemalt kaks last, kes saavad ühepalju komme (võib olla, et mõni ei saanud ühtegi).

Ülesanne 3. (5p) Maadlustrennis oli kohal 10 poissi. Treeningu käigus pidi iga poiss maadlema täpselt ühe korra iga ülejäänud poisiga. Tõesta, et trenni mistahes ajahetkel leidus vähemalt kaks poissi, kellel oli peetud võrdne arv maadlusi.

Ülesanne 4. (5p) Ruudustikku 10 $\times$ 10 igasse ruutu tuleb kirjutada, kas 1, 2 või 3 ja seejärel leida igas reas, igas veerus ja kummalgi diagonaalil olevate arvude summa. Kas on võimalik neid arve sellesse ruudustikku kirjutada nii, et kõik leitud summad oleksid erinevad? Kui jah, siis tee vastav ruudustik, kui ei, siis miks.

Ülesanne 5. (5p) Kerakujulisel planeedil Sjam-Ljam on maismaad üle poole planeedi pinnast. Tõesta, et planeedi pinnal oleva maismaa mistahes paiknemise korral on võimalik kindlasti tõmmata lõik, mis ühendab maismaad maismaaga ja läbib seejuures planeedi keskpunkti.