GRAAFITEOORIA PÕHIMÕISTED

Õppematerjal TÜ Teaduskooli õpilastele, koostanud Mare Koit, internetipõhiseks kohandanud Hilja Afanasjeva

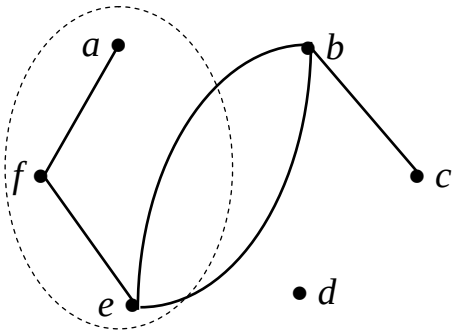
Küllap on kõik kogenud, et joonise kasutamine muudab mõnegi ülesande lahendamise piltlikumaks ja aitab juhtida mõtet õigele rajale. Nii näiteks kujutame punktide või sõõridena linnu, tehaseid, inimesi, keemiliste elementide aatomeid - muidugi sõltuvalt probleemist, mille kallal parajasti pead murrame - ja ühendame neid joontega, tähistades niiviisi vastavate objektide vahelisi seoseid. Selliselt saadud skeeme nimetatakse **graafideks**. Seega on graafid midagi muud kui graafikud, millega olete kokku puutunud funktsionaalset sõltuvust uurides.

Graafiteooriale pani aluse šveitsi matemaatik L. Euler oma 1736. aastal ilmunud töös. Esialgu suhtuti uue teooria algmetesse üsna umbusklikult, sest pikka aega leidsid graafid kasutamist enamasti meelelahutusülesannetes (näiteks: Königsbergi sildade ületamine, dodekaeedri tippude läbimine, ratsukäigud malelaual jne). 20. sajandi alguseks kerkis aga esile terve rida teoreetilise ja praktilise tähtsusega probleeme, mis olid otseselt või kaudselt seotud graafidega. Termini ***graaf*** võttis kasutusele saksa matemaatik D. König oma töös *Lõplike ja lõpmatute graafide teooria*, mis ilmus 1936. aastal.

Tänapäeval on graafiteooria kujunenud iseseisvaks matemaatikaharuks, millel on soliidne hulk praktilisi rakendusi. Graafiteooriat kasutatakse rahvamajanduse planeerimisel, juhtimise organiseerimisel, keemias, bioloogias, sotsioloogias, aga ka matemaatikas endas, näiteks binaarsete seoste uurimisel. Väikese osa graafiteooriast moodustavad ka praegu nuputamisülesanded. Nii köitis matemaatikute meeli terve sajandi vältel kuulus nelja värvi probleem: kas iga tasandile joonestatud poliitilist kaarti on võimalik värvida ainult nelja värvi abil nii, et ühist piiri omavad naaberriigid oleksid erinevat värvust? Jaatav vastus tõestati alles 1976. aastal. Muuhulgas on nelja värvi probleemiga tegelnud ka Tartu matemaatikaprofessorid Jaan Sarv (1877 - 1954), Jüri Nuut (1894 - 1957) ja Hermann Jaakson (1891 - 1964).

1. Mis on graaf?

Oletame, et teie klassis toimub maleturniir. Püüame joonisel kujutada võistluste käiku. Seame igale võistlejale vastavusse ühe punkti tasandil ja ühendame joonega need punktipaarid, mis vastavad omavahel juba võistelnud mängijatele. Võime eeldada, et objektiivsuse huvides peab iga võistleja ülejäänud võistlejaga mängima kaks mängu. Mingiks tähtajaks lõppenud kohtumisi kujutab siis skeem joonisel 1. Niisugune skeem ongi **graaf**.



Joonis 1

Ta koosneb punktidest, mida nimetatakse graafi **tippudeks** (ehk sõlmedeks) ja neid ühendavatest joontest - graafi **servadest**. Joonisel 1 toodud graafil on 6 tippu ja 5 serva. Selle graafi kohaselt on mängija a võistelnud mängijaga f; mängija b on kohtunud mängijaga c ja kaks korda mängijaga e; omavahel on võistelnud mängijad e ja f; ühtegi kohtumist ei ole veel pidanud mängija d.

Üldiselt: ütleme, et on antud **graaf G = (X, U), kui on antud**

1) mittetühi tippude hulk X,

2) paaride u = (x, y) (servade) hulk U, kus x ∈ X, y ∈ X.

Eeldame, et iga tipupaari ühendab ülimalt lõplik arv servi. Tippude hulk X võib olla lõpmatu - siis kõneldakse lõpmatust graafist. Edaspidi vaatleme siiski põhiliselt lõplikke graafe.

Harjutus 1. Jalgpallivõistlustel osalevad 5 meeskonda (a, b, c, d, e). Joonestage graaf, mis vastab olukorrale, kus omavahel on kohtunud meeskonnad a ja b; a ja c; b ja d; b ja e; e ja d. Mitu tippu ja mitu serva on sellel graafil? (Tehke harjutusi ja kontrollige nende lahendusi vastavale lingile vajutades õppematerjali omandamise huvides.)

Harjutuse 1 lahendus

Huvitagu meid toodu näite puhul nüüd ainult võistlejate a, e ja f omavahelised mängud. Joonisel 1 vastab neile nn alamgraaf (ümbritsetud punktiiriga).

Graafi (X, U) **alamgraafiks** nimetame graafi (A, U_A), kus A on tippude hulga X mingi alamhulk ja U_A on kõigi niisuguste servade (x, y) ∈ U hulk, mille mõlemad tipud x ja y kuuluvad hulka A.

Graafi (X, U) **osagraafi** all mõistame graafi (X, U'), kus U' ⊂ U, st graafi, milles osa lähtegraafi (X, U) servadest on ära jäetud.

Joonisel 1 kujutatud graafi üheks osagraafiks on näiteks graaf, mis vastab olukorrale, kus ühelgi võistlejal ei ole peetud rohkem kui üks mäng (üks tippe b ja e ühendavatest servadest on ära jäetud). Samal ajal on joonisel toodud graaf omakorda kogu turniiri lõpptulemust kujutava graafi osagraafiks.

Harjutus 2. Joonestage graaf, mille tippudeks on Eesti linnad ja servadeks neid linnu ühendavad raudteed.

Harjutuse 2 lahendus

Harjutus 3. Leidke jalgpallivõistluste graafis (harjutus 1) alamgraaf, mis kujutab

a) ainult meeskondade b, d, e mänge,

b) ainult meeskondade a, b, c ja d mänge.

Mitu tippu ja mitu serva on kummaski alamgraafis?

Harjutuse 3 lahendus

Harjutus 4. Leidke jalgpallivõistluste graafis (harjutus 1) kõik sellised osagraafid, mis kirjeldavad olukorda, kus ükski meeskond ei ole pidanud üle ühe mängu.

Harjutuse 4 lahendus

Ütleme, et servade jada $\mu = [u_1, u_2, ...]$ on **marsruut** graafis (X, U), kui igal lähispaaril selles jadas on ühine tipp. Kui $u_i = (x_i, x_{i+1})$, siis tähistame marsruuti ka $\mu = (x_1, x_2, ...)$. Marsruuti, milles ükski serv ei esine korduvalt, nimetame **ahelaks**. Marsruuti, mille kõik tipud on erinevad, nimetame **lihtahelaks**. Marsruut võib koosneda ka ühest ainsast servast. Servade arvu marsruudis nimetame **marsruudi pikkuseks**.

Tsükliks nimetame ahelat $\mu = (x_1, x_2, ..., x_n)$, kus algustipp ühtib lõpptipuga $x_1 = x_n$. Ahela saab moodustada ka ainult üks serv (x, x) - nn **silmus**.

Joonisel 1 kujutatud graafis leiduvad näiteks ahelad (a, f, e, b, c), (b, e, b, c), (a, f, e), (b, c) ja tsükkel (b, e, b).

Ütleme, et graaf (X, U) on **sidus**, kui iga tema kahe tipu x ja y korral võib leida marsruudi (x, ...,y). Joonisel 1 kujutatud graaf ei ole sidus: d on **isoleeritud tipp**.

Harjutus 5. Tõestage, et harjutuses 1 konstrueeritud graaf on sidus.

Harjutuse 5 lahendus

Graafi (X, U) servade hulk võib olla ka tühi. Sel juhul saame nn **tühigraafi**, mis koosneb ainult isoleeritud tippudest. Malevõistluste graaf on tühigraaf parajasti turniiri alguses, kui ükski võistleja ei ole veel pidanud ühtegi mängu.

Teiseks äärmiseks juhtumiks on **täielik graaf**, mille iga kaks tippu on ühendatud servaga. Malevõistlusi kujutav graaf oleks täielik siis, kui iga võistleja oleks juba mänginud vähemalt ühe korra ülejäänud võistlejaga.

Harjutus 6. Jalgpallivõistlustel osalevad 5 meeskonda. Joonestage graaf, mis kujutab olukorda, kus ei ole peetud veel ühtegi mängu.

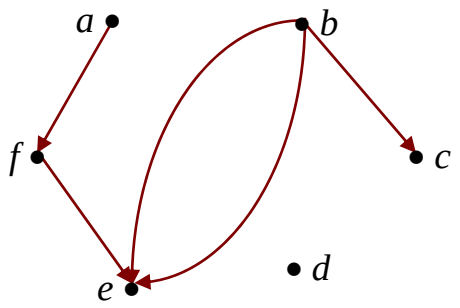
Harjutuse 6 lahendus

Harjutus 7. Jalgpallivõistlustel osalevad 5 meeskonda. Igaüks neist peab iga ülejäänud meeskonnaga ühe mängu. Joonestage graaf, mis kujutab olukorda, kus kõik mängud on juba peetud.

Harjutuse 7 lahendus

2. Orienteeritud graafid

Teeme joonisel 1 täienduse, et näidata, millise tulemusega lõppesid maletajate mängud: **orienteerime graafi servad** (varustades nad nooltega, mis on suunatud võitjalt kaotajale). Vastaku võistluste seisule vaadeldaval momendil joonisel 2 kujutatud orienteeritud graaf: mängija a on alistanud mängija f, see omakorda mängija e; mängijate b ja e mõlemad kohtumised on lõppenud b võiduga; b on võitnud ka mängijat e.



Joonis 2

Tähistame eristamiseks orienteeritud graafi servi (nn kaari) $u = (x \to y)$ ja kaarte (järjestatud tipu-paaride) hulka $\bar{U}$. Orienteeritud graafi alam- ja osagraafid on samuti orienteeritud.

Marsruudiks orienteeritud graafis (**orienteeritud marsruudiks**) nimetame kaarte jada $[\bar{u}_1, \bar{u}_2, ...]$, kus iga järgneva kaare algustipp ühtib eelneva kaare lõpptipuga. Orienteeritud marsruuti tippude järgi tähistades kirjutame $(x_1 \to x_2 \to ...)$.

Orienteeritud lihtahelat nimetame **teeks**. Orienteeritud lihttsüklit nimetame **kontuuriks**.

Joonisel 2 kujutatud graafis on näiteks järgmised teed: $(a \to f)$, $(f \to e)$, $(b \to e)$ - kõik pikkusega 1, $(a \to f \to e)$ - pikkusega 2. Selles graafis ei ole ühtegi kontuuri.

Kasutatakse graafe, mis sisaldavad samaaegselt nii orienteeritud kui ka orienteerimata servi. See võimaldab vaadeldud maleturniiril näiteks kujutada ka viigiga lõppenud mänge: lepime kokku ühendada kaks tippu orienteerimata servaga siis, kui vastavad võistlejad mängivad viiki.

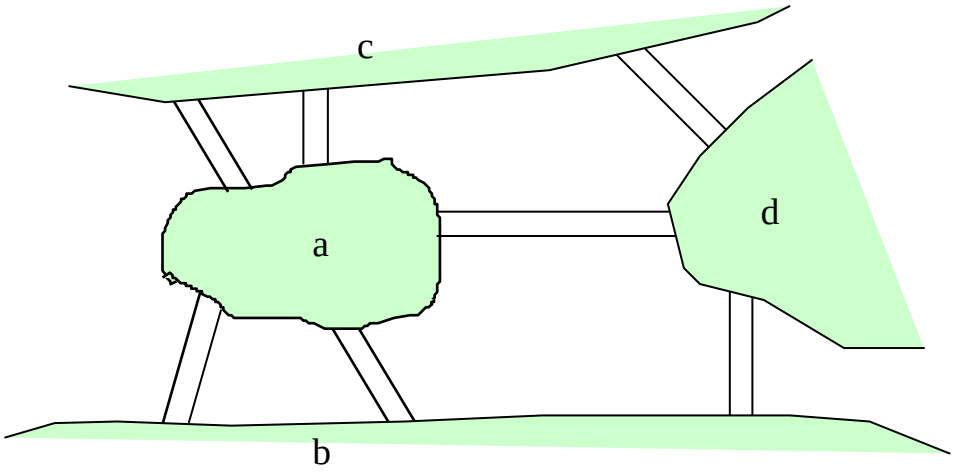
Harjutus 8. Jalgpallivõistlustel osalevad 5 meeskonda (a, b, c, d, e). Joonestage graaf, mis vastab olukorrale, kus meeskond a on alistanud meeskonnad b ja c; meeskond b meeskonna c; meeskond c meeskonna d ning e ja d on omavahel mänginud viiki. Leidke selles graafis kõik teed.

Harjutuse 8 lahendus

Orienteeritud graafina võib vaadelda linna plaani, kus tippudeks on tänavate lõikumiskohad, kaarteks aga lõikepunktide vahelised tänavalõigud. Kui liiklus punktide x ja y vahel on mõlemasuunaline, siis on graafis kaared ($x \to y$) ja ($y \to x$). Linna plaani võib kujutada ka segagraafina, kus orienteerimata servad vastavad mõlemasuunalise liiklusega tänavalõikudele.

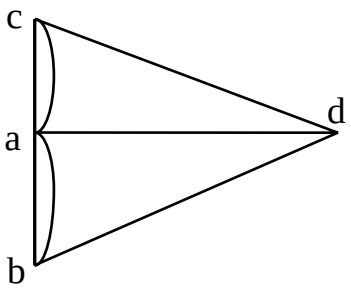
3. Euleri ja Hamiltoni graafid

Oma graafidele pühendatud artiklit alustas Euler ühest nuputamisülesandest. See oli Königsbergi sildade ülesanne. Königsbergi linn asus jõe kaldal ja kahel saarel. Erinevad linnaosad olid ühendatud seitsme sillaga (joonis 3).



Joonis 3

Küsiti: kas saab korraldada niisuguse jalutuskäigu, mis algaks ja lõpeks samas kohas ning mille jooksul läbitaks iga silda täpselt üks kord?



Joonis 4

Joonisel 4 on kujutatud graaf, mille tippudeks on linnaosad a, b, c, d ja servadeks nendevahelised sillad. Kui soovitud jalutuskäik oleks võimalik, siis tuleks igasse linnaossa saabuda ja seal lahkuda ühesugune arv kordi, st graafi igas tipus peaks olema paarisarv servi. Et joonisel 4 kujutatud graaf seda tingimust ei rahulda, siis tuleb ülesandes esitatud küsimusele vastata eitavalt.

Oma töös püstitas Euler tegelikult üldisema probleemi: missugustes graafides saab leida sellise tsükli, mis läbiks kõik graafi kaared täpselt üks kord? Sellist tsüklit nimetame **Euleri tsükliks**. Graafi, milles leidub Euleri tsükkel, nimetame Euleri graafiks. Euleri graaf peab olema lõplik ja sidus. Lisaks sellele peab igasse tippu sisenema niisama palju servi, kui sealt väljub. Nimetame mingisse tippu sisenevate või sealt väljuvate servade arvu selle tipu **astmeks**.

Seega: Euleri graafi iga tipu aste peab olema paarisarv. Euler tõestas, et need tingimused - graafi lõplikkus, sidusus ja kõigi tippude astmete paarisarvulisus - on ühtlasi piisavad. Näitame seda.

Alustame ahelat μ mingist tipust a ja jätkame seda nii kaugele kui võimalik, läbides iga kord serva, mida me veel ei ole läbinud. Servade arv on lõplik, sellepärast lõpeb see protsess kunagi. Igas tipus on paarisarv servi, seega on igas tipus, mis ei ole algustipp, vähemalt üks võimalus ahela jätkamiseks. Niisiis peab ahel lõppema tipus a. Kui μ sisaldab graafi kõik servad, siis on ta otsitav. Kui aga leidub tipp b, mis kuulub küll ahelasse μ, kuid millest väljuv serv ahelas μ ei sisaldu, siis saame kindlasti leida ka sellise ahelas μ mittesisalduva serva, mis siseneb tippu b (sest kõikide tippude astmed on paarisarvud). Alustame nüüd tipust b uut ahelat μ‘, kasutades ainult neid servi, mis ei kuulu ahelasse μ. Ahel μ‘ lõpeb tipus b. Nüüd aga saame moodustada suurema tsükli: liigume tipust a mööda ahelat μ kuni tipuni b, seejärel läbime tsükli μ‘ ning lõpuks ülejäänud osa ahelast μ, kuni tipuni a. Kui osutub, et on veel läbimata servi, siis võime saadud ahelat uuesti laiendada, kuni viimaks leiame Euleri tsükli.

Graaf, mis kujutab mingi näituse plaani, on tavaliselt Euleri tsükkel: näituseruumidesse saab paigutada viidad nii, et vaataja mööduks igast eksponaadist täpselt üks kord.

Huvi pakub järgmine ülesanne: leida graafis tsükkel, mis läbib graafi iga tippu täpselt üks kord. Sellist tsüklit nimetame **Hamiltoni tsükliks** (ülesande esitaja, 19. sajandi iiri matemaatiku W. R. Hamiltoni järgi).

Vaatamata analoogiale Euleri tsükliga, on Hamiltoni tsükli leidmine suvalises graafis tunduvalt raskem probleem. Täielikus graafis on seevastu Hamiltoni tsükli leidmine täiesti triviaalne. Olgu graafi igale servale omistatud kindel reaalarv, mida nimetame selle serva pikkuseks. Siis täielikus graafis minimaalse pikkusega Hamiltoni tsükli leidmist nimetatakse ka **rändkaupmehe ülesandeks**. Ülesande nimetus on tulnud sellest, et teda võib teisiti sõnastada järgmiselt: rändkaupmees, kes elab ühes n linnas, peab külastama kõiki ülejäänud linnu ja pöörduma lähtelinna tagasi, leida rändkaupmehe kõikvõimalike marsruutide seast lühim marsruut.

Harjutus 9. Rändkaupmees elab linnas a ning kavatseb külastada linnu b, c ja d. Linnadevahelised kaugused kilomeetrites on: ab = 120, ac = 140, ad = 180, bc = 70, bd = 100, cd = 110. Leidke proovimise teel lühim marsruut, mis algab ja lõpeb linnas a ning läbib ülejäänud 3 linna.

Harjutuse 9 lahendus

4. Puud

Puu on sidus tsükliteta graaf. Mittesidusat tsükliteta graafi nimetame **metsaks**: tema sidusad alamgraafid on aga puud.

(Orienteeritud) puuna saab kujutada näiteks ametialast hierarhiat kui ühendame (orienteeritud) kaarte abil iga ülemust tähistava tipu tema vahetutele alluvatele vastavate tippudega (suunaga ülemuselt alluvale). Tõepoolest: kui niisuguses graafis oleksid tsüklid, siis võiks see viia vasturääkivate korraldusteni.

Lihtsaim puu koosneb kahest tipust ja neid ühendavast servast. Suvalise puu saame sellest lähtudes konstrueerida, lisades järjest servi. Iga kord, kui lisame ühe serva, lisandub ka tipp, järelikult on n tipuga puul n - 1 serva. Puu on minimaalne sidus graaf: kõigist sidusaist graafidest, millel on fikseeritud arv tippe, on puul vähim arv servi. Tuginedes puu sellele omadusele, saab lahendada mõningaid ekstreemumülesandeid, näiteks linnade ühendamise ülesannet.

Olgu tarvis n linna omavahel ühendada elektriliinide abil, kusjuures hargnemine võib toimuda vaid linnades. Iga liinide paari jaoks olgu teada ka neid ühendava elektriliini maksumus.

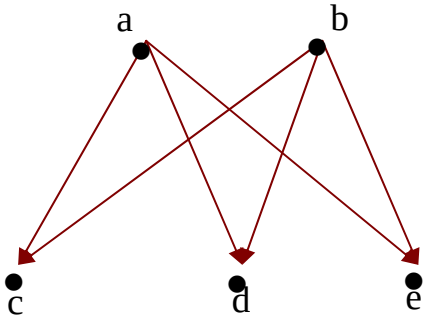
Odavaima võrgu graaf peab olema puu, sest kui ta sisaldaks tsüklit, siis võiks selle tsükli ühe serva ära jätta, ja linnad oleksid ikka ühendatud. Järelikult tuleb n linna ühendamiseks ehitada n - 1 elektriliini, mille maksumus on kõige väiksem. Seega peame igal järgneval sammul lisama puule odavaima lülidest, mis ei tekita tsüklit (kui on mitu sellist lüli, siis valime suvalise).

Harjutus 10. Leidke antud 5 linna (a, b, c, d, e) ühendav odavaim kommunikatsioonide skeem, kui on teada ühenduslülide maksumused arvestusühikutes: ab = 12, ac = 13, ad = 20, ae = 17, bc = 14, bd = 21, cd = 11, ce = 16 ja ed = 16.

Harjutuse 10 lahendus

5. Genealoogilised graafid

Genealoogilised graafid on orienteeritud graafide eriliik, mis ei sisalda orienteeritud tsükleid. Nimetus on tulnud sellest, et niisuguseid graafe kasutavad bioloogid geneetiliste aretuskatsete tulemuste kirjeldamiseks. Kaar (a $\rightarrow$ b) sellises graafis tähendab, et b on a otsene järeltulija (poeg või tütar). Et igal indiviidil on kaks vanemat, ema ja isa, siis peab igasse tippu sisenema täpselt kaks kaart. Meie teadmised väga kaugete esivanemate kohta on tavaliselt ebatäiuslikud, sellepärast jõuame graafi koostamisel lõpuks olukorrani, kus me ei tea kas üht või teist vanemat. Sellepärast lepitaksegi kokku, et genealoogilise graafi igasse tippu siseneb kas kaks kaart või vähem.



Joonis 6

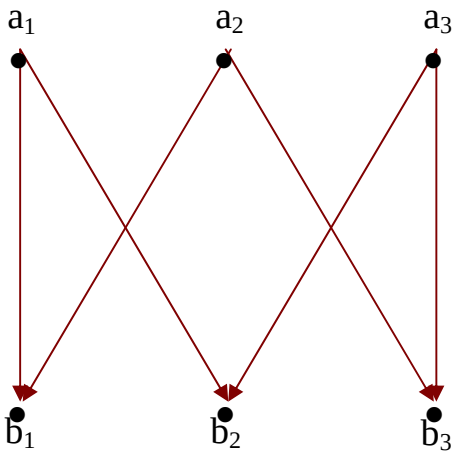
Joonisel 6 on esitatud genealoogiline graaf, millest loeme välja, et indiviidid c, d ja e on omavahel õed-vennad, sest nad on kõik ühtede ja samade vanemate (a ja b) otsesed järeltulijad. Juhime tähelepanu asjaolule, et joonisel 6 kujutatud graafis on tsükleid, näiteks (a, c, b, e, a), mistõttu ta ei ole puu, küll aga ei ole orienteeritud tsükleid.

Harjutus 11. Joonestage genealoogiline graaf, mis kirjeldab olukorda, et kaks indiviidi on omavahel poolvennad.

Harjutuse 11 lahendus

Olgu antud niisugune orienteeritud graaf, kus igasse tippu siseneb ülimalt kaks kaart. Kas võib lugeda seda graafi genealoogiliseks, st kas saab tema tipud jaotada kahte klassi - emade klass E ja isade klass I nii, et kui mingisse tippu siseneb kaks kaart, siis neist ühe algustipp oleks klassis E, teisel aga klassis I?

Probleemi lahendamiseks teeme joonise.



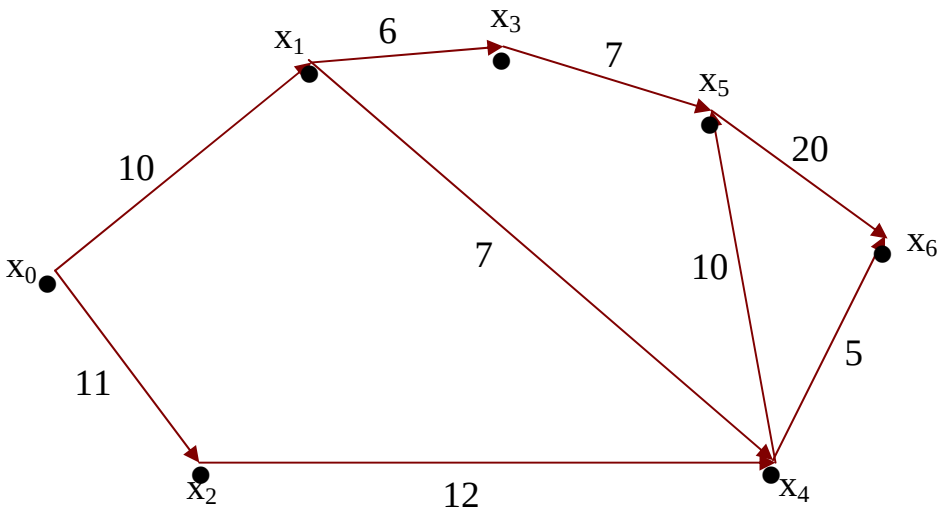
Joonis 7

Jooniselt 7 näeme, et alati ei ole see võimalik. Oletame näiteks, et a_1 kuulub isade klassi I. Siis peab a_2 kuuluma emade klassi E, sest tema laps b_1 on ühtlasi ka a_1 laps. Seega b_3 on b_1 poolvend või poolõde, sest neil on ühine ema a_2. Sellepärast peab a_3 kuuluma klassi I. Nüüd aga selgub, et b_2 mõlemad vanemad – a_1 ja a_3 on isad. Analoogiliselt jõuame vastuoluni, kui oletame, et a_1 kuulub klassi E. Seega kirjeldatud graafi ei saa lugeda genealoogiliseks.

6. Transpordivõrgud

Graafide üks eriliike on võrgud. Lõplikku sidusat silmusteta graafi nimetame **võrguks**, kui ta on orienteeritud ning temas on üks ja ainult üks tipp x_0 (võrgu sisend), millest kaared ainult väljuvad ning üks ja ainult üks tipp x_n (võrgu väljund), millesse kaared ainult sisenevad.

Kui võrgu igale kaarele on vastavusse seatud mittenegatiivne täisarv, nn kaare läbilaskevõime, siis nimetame seda võrku **transpordivõrguks.** Joonisel 8 on kujutatud transpordivõrk, mille sisendiks on tipp x_0, väljundiks tipp x_6. Iga kaare juurde on märgitud selle läbilaskevõime. Seda transpordivõrku võib interpreteerida näiteks raudteevõrguna, kaare läbilaskevõime on siis näiteks maksimaalne rongide arv, mis vastavat raudteelõiku ühes ajaühikus (näiteks ühe tunni jooksul) võivad läbida.



Joonis 8

Transpordivõrgu igale kaarele võib vastavusse seada veel ühe mittenegatiivse täisarvu, mis ei ületa selle kaare läbilaskevõimet - **voo**.
Näiteks kui transpordivõrgus (joonis 8) on kaare ($x_1 \rightarrow x_3$) läbilaskevõime 6, siis voog mööda seda kaart võib olla 0 kuni 6. Voogu võime interpreteerida kui rongide arvu, mis seda kaart (raudteelõiku) tegelikult ühes ajaühikus läbivad. Kõigi kaarte vood kokku moodustavad voo võrgus.

Voog on lubatav, kui võrgu igas tipus (välja arvatud sisend ja väljund) võrdub sisenevate kaarte voogude summa väljuvate kaarte voogude summaga (teisiti: suvalisse punkti x suunduvate rongide arv võrdub punktis x väljuvate rongide arvuga). Võrgu sisendist väljuvate kaarte voogude summa võrdub siis väljundisse sisenevate kaarte voogude summaga, see on nn **voo suurus**.

Kuidas määrata transpordivõrgu suurimat võimalikku voogu?

Suurima voo leidmiseks on välja töötatud mitmeid algoritme. Kirjeldame ühte neist. Eeldame, et transpordivõrgus on antud mingi voog.

Ütleme, et kaar transpordivõrgus on küllastatud, kui tema voog on võrdne läbilaskevõimega. Kui iga orienteeritud tee sisendist väljundisse sisaldab vähemalt ühe küllastatud kaare, siis ütleme, et voog transpordivõrgus on täielik. Iga voo saab muuta täielikuks järgmisel viisil. Otsime orienteeritud tee sisendist väljundisse, mille ükski kaar ei ole küllastatud ning suurendame selle tee iga kaare voogu 1 võrra. Vood transpordivõrgu ülejäänud kaartel jätame muutmata.

Selle tulemusel saame võrgus uue voo, mille suurus on eelmisest 1 võrra suurem. Kui saadud voog ei ole veel täielik, siis kordame protsessi.

Harjutus 12. Leida joonisel 8 kujutatud transpordivõrgus täielik voog.
Harjutuse 12 lahendus

Kuidas suurendada täielikku voogu? Hakkame märgendama transpordivõrgu tippe. Kõigepealt varustame märgendiga 0 võrgu sisendi. Vaatleme kaari, mis lähtuvad sisendist ja ei ole küllastatud. Kõigi selliste kaarte lõpptippudele omistame märgendi +0. Üldiselt, kui tipp x_i on juba märgendatud, siis tähistame märgendiga $+i$ need veel märgendamata tipud, kuhu suunduvad tipust x_i lähtuvad kaared, mis ei ole küllastatud. Märgendiga $-i$ varustame kõik need veel märgendamata tipud, kuhu suunduvad tipust x_i lõppevad kaared, mille voog ei ole 0. Kui sellise protsessi käigus jõuame lõpuks olukorrani, kus võrgu väljund on märgitud, siis leidub vähemalt üks tee μ sisendist väljundisse, mille kõik tipud on erinevad ja märgendatud eelnevate tippude indeksitega (täpsusega kuni märgini). Suurema voo saamiseks suurendame nüüd 1 võrra kõikide selliste teesse μ kuuluvate kaarte voogusid, mis läbitakse liikumisel sisendist väljundisse orientatsiooni suunas ning vähendame 1 võrra kõikide selliste teesse kuuluvate kaarte voogusid, mis läbitakse orientatsioonile vastupidises suunas. Teesse μ mittekuuluvate kaarte vood jätame muutmata. Saadud uue voo suurus on eelmisest 1 võrra suurem. Kui mingisugust voogu on võimatu suurendada äsja kirjeldatud viisil, siis ongi ta maksimaalne.

Harjutus 13. Leida joonisel 8 kujutatud transpordivõrgu maksimaalne voog.
Harjutuse 13 lahendus

Lõpuks juhime tähelepanu, et eesti keeles on graafiteooria alalt ilmunud populaarses vormis kirjutatud raamat: ***O. Ore. Graafid ja nende kasutamine. Tallinn, 1976***.Lühiülevaate graafiteooria mõnedest mõistetest ja probleemidest võib leida ka artiklist: *M. Koit. Pilk graafiteooriasse. Matemaatika ja kaasaeg, XIV. Tartu, 1968, lk. 31 - 46.* Graafiteooria mõningaid küsimusi ja rakendusi käsitletakse ka õpikus: *Ü. Kaasik, L. Kivistik. Operatsioonianalüüs. Tallinn, Valgus, 1982.*

KONTROLLTÖÖ ÜLESANDED