Polünoomidest IMO 2017 võistkonnale

Tartu, 6. juuni 2017

Põhifaktid

1. **Ühe muutuja n astme polünoom:** $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$.
2. **Polünoomi juur** e. **nullkoht** on selline x_0 väärtus, et $P(x_0) = 0$. Arvu x_0 nimetatakse polünoomi k-kordseks juureks, kui $P(x_0) = 0$, $P'(x_0) = 0$, $\ldots$, $P^{(k-1)}(x_0) = 0$, $P^{(k)}(x_0) \neq 0$.
3. **Algebra põhiteoreem.** Igal (reaalarvuliste kordajatega) n astme polünoomil leidub ülimalt n reaalarvulist juurt. Igal kompleksarvuliste kordajatega polünoomil leidub täpselt n kompleksarvulist juurt (lugedes juuri koos kordsusega).

   Iga reaalarvuliste kordajatega polünoomi saab esitada reaalarvuliste kordajatega lineaarsete ja taandumatute ruutpolünoomide korrutisena. Iga kompleksarvuliste kordajatega polünoomi saab esitada kompleksarvuliste kordajatega lineaarsete polünoomide korrutisena.
4. Kõik täisarvuliste kordajatega polünoomi ratsionaalarvulised juured avalduvad kujul $\frac{p}{q}$, kus p ja q on vastavalt vabaliikme ja pealiikme kordaja täisarvulised jagajad.
5. Jagades täisarvuliste kordajatega polünoomi täisarvuliste kordajatega polünoomiga, mille pealiikme kordaja on 1, on nii jagatis kui ka jääk täisarvuliste kordajatega polünoomid.
6. Olgu $P(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom ning olgu m suvaline täisarv. Kui $x \equiv y \pmod{m}$, siis $P(x) \equiv P(y) \pmod{m}$.
7. **Viet'i valemid.** Olgu polünoomi $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ juured $x_1, \ldots, x_n$. Siis

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_{n-1}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = a_{n-2} \\ \cdots \\ x_1x_2 \cdots x_n = (-1)^n a_0. \end{cases}$$

Ülesanded

1. a) Kas leidub täisarvuliste kordajatega polünoom $P(x)$, mille korral $P(2016) = 1$, $P(2017) = 2017$ ja $P(2018) = 2018$?

   b) Kas leidub täisarvuliste kordajatega polünoom $P(x)$, mille korral $P(2016) = 2$, $P(2017) = 2017$ ja $P(2018) = 2018$?
2. Leida kõik kuni 2017 astme polünoomid $P(x)$, mis rahuldavad tingimusi $P(0) = 0$, $P(1) = 1$, $P(2) = 2, \ldots, P(2016) = 2016$.
3. (Bulgaaria 1961) Leida kõik reaalarvude paarid p, q, mille korral võrrandil $x^4 + px^2 + q = 0$ on 4 lahendit, mis moodustavad aritmeetilise jada.
4. (Vene piirkonnavoor 2015) Olgu antud ruutpolünoom $P(x) = ax^2 + bx + c$, kus a, b, c on positiivsed täisarvud ja $a+b+c = 2000$. Ühel käigul võib polünoomi ühte kordajat suurendada või vähendada ühe võrra. Näidata, et kõige rohkem 1022 käiguga on võimalik saada ruutpolünoom, millel on vähemalt üks täisarvuline juur.
5. (Ungari 1983) Polünoomil $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + 1$ kõik kordajad on mittenegatiivsed ning tal on täpselt n reaalarvulist juurt. Näidata, et $P(2) \geq 3^n$.
6. Leida kõik polünoomid $P(x)$, mis rahuldavad võrrandit $P(x^2) = (P(x))^2$.
7. (BT 2008.1) Leida kõik realarvuliste kordajatega polünoomid $p(x)$, mis rahuldavad tingimusi $p(0) = 0$ ning $p((x+1)^3) = (p(x)+1)^3$.

8. (Kvant M830) Õpetaja valib 2 reaalarvu p_1 ja q_1, mis pole mõlemad nullid, ning kirjutab tahvlile ruutvõrrandi $x^2+p_1x+q_1=0$. Ta palub õpilasel selle ära lahendada ning kui reaalarvulised lahendid $p_2 \le q_2$ on olemas, siis kirjutada tahvlile uue ruutvõrrandi $x^2+p_2x+q_2=0$. Seejärel järgmine õpilane kordab sedasama juba uue võrrandiga. Mitu õpilast maksimaalselt saab tahvli ees käia?

9. (BT 2010.4 ainetel) Leida kõik sellised reaalarvuliste kordajatega polünoomid $P(x)$, et

$$(x-2017)P(x+63) = (x-1)P(x)$$

iga täisarvu x korral.

10. (Hong Kong 2014) Olgu a, b, c erinevad ja nullist erinevad reaalarvud. On teada, et polünoomidel ax^3+bx+c, bx^3+cx+a ja cx^3+ax+b on ühine juur. Näidata, et vähemalt ühel neist polünoomidest on kolm reaalset juurt (mitte tingimata erinevat).

11. (USA 1975) Olgu $P(x)$ n astme polünoom, mis rahuldab tingimust $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$, kui $k = 0, 1, \ldots, n$. Leida $P(n+1)$.

12. (Hollandi valikvõistlus 2015) Leida kõik polünoomid $P(x)$, mille puhul polünoom $(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$ on konstantne.

13. (IMO2013 shortlist) Olgu $m \neq 0$ täisarv. Leida kõik reaalarvuliste kordajatega polünoomid, mis rahuldavad kõigi reaalarvuliste x korral tingimust

$$(x^3 - mx^2 + 1)P(x+1) + (x^3 + mx^2 + 1)P(x-1) = 2(x^3 - mx + 1)P(x).$$