Harjutusülesandeid arvuteooriast IMO võistkonnale

6. juuni 2017

Soojenduseks

1. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (m, n), mille korral

$$m + 3n - 5 = 2\,\mathrm{lcm}(m, n) - 11\,\gcd(m, n).$$

(Sloveenia piirkonnavooru 12. klass 2014)

SÜT ja VÜK omadused

2. Kui palju on positiivsete täisarvude paare (m, n), mille korral $m < n$ ja mis rahuldavad võrrandit

$$\frac{3}{2008} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}?$$

("Balti Tee" 2008)

3. Mašal on aias elektrikarussell, millel ta iga päev sõidab. Korraarmastajana jätab ta alati karusselli pärast tarvitamist ühte ja samasse asendisse. Igal ööl hiilivad aga aeda kolm karu ja asuvad karusselli keerutama. Karuisa keerutab karusselli korraga täpselt $\frac{1}{7}$ täispöörde võrra. Karuema keerutab karusselli korraga täpselt $\frac{1}{9}$ täispöörde võrra. Karulaps keerutab karusselli korraga täpselt $\frac{1}{32}$ täispöörde võrra. Iga karu võib karusselli keerutada niipalju kordi kui tahab. Mitmest erinevast asendist võib Maša hommikul aeda minnes karusselli leida? (Eesti LVT vanem rühm 2016)

Harjutusülesandeid edasijõudnuile

4. Leia kõik täisarvud n, mille korral $\frac{8n-25}{n+5}$ on ratsionaalarvu kuup. (Kreeka olümpiaadi vanem rühm 2014)

5. Olgu $(x_n : n \in \mathbb{Z}^+)$ reaalarvude jada, kus $x_1 = 1$ ja iga $n > 1$ korral $2x_{n+1} = 3x_n + \sqrt{5x_n^2 - 4}$.

   (a) Tõestada, et selle jada kõik liikmed on täisarvud.

   (b) Kas jadas leidub arv, mis jagub 2011-ga?

   (Kreeka valikvõistluse vanem rühm 2014)

6. Leia kõik naturaalarvude paarid (n, m), mis rahuldavad tingimusi $n + m + 1 \mid 2mn$ ja $n + m - 1 \mid n^2 + m^2 - 1$. (Mongoolia põhikooliõpetajate olümpiaad 2014)

Harjutusülesandeid arvuteooriast IMO võistkonnale

6. juuni 2017

Soojenduseks

1. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (m, n), mille korral

$$m + 3n - 5 = 2\,\mathrm{lcm}(m, n) - 11\,\gcd(m, n).$$

(Sloveenia piirkonnavooru 12. klass 2014)

SÜT ja VÜK omadused

2. Kui palju on positiivsete täisarvude paare (m, n), mille korral $m < n$ ja mis rahuldavad võrrandit

$$\frac{3}{2008} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}?$$

("Balti Tee" 2008)

3. Mašal on aias elektrikarussell, millel ta iga päev sõidab. Korraarmastajana jätab ta alati karusselli pärast tarvitamist ühte ja samasse asendisse. Igal ööl hiilivad aga aeda kolm karu ja asuvad karusselli keerutama. Karuisa keerutab karusselli korraga täpselt $\frac{1}{7}$ täispöörde võrra. Karuema keerutab karusselli korraga täpselt $\frac{1}{9}$ täispöörde võrra. Karulaps keerutab karusselli korraga täpselt $\frac{1}{32}$ täispöörde võrra. Iga karu võib karusselli keerutada niipalju kordi kui tahab. Mitmest erinevast asendist võib Maša hommikul aeda minnes karusselli leida? (Eesti LVT vanem rühm 2016)

Harjutusülesandeid edasijõudnuile

4. Leia kõik täisarvud n, mille korral $\frac{8n-25}{n+5}$ on ratsionaalarvu kuup. (Kreeka olümpiaadi vanem rühm 2014)

5. Olgu $(x_n : n \in \mathbb{Z}^+)$ reaalarvude jada, kus $x_1 = 1$ ja iga $n > 1$ korral $2x_{n+1} = 3x_n + \sqrt{5x_n^2 - 4}$.

   (a) Tõestada, et selle jada kõik liikmed on täisarvud.

   (b) Kas jadas leidub arv, mis jagub 2011-ga?

   (Kreeka valikvõistluse vanem rühm 2014)

6. Leia kõik naturaalarvude paarid (n, m), mis rahuldavad tingimusi $n + m + 1 \mid 2mn$ ja $n + m - 1 \mid n^2 + m^2 - 1$. (Mongoolia põhikooliõpetajate olümpiaad 2014)