IMO õppesessioon — Disk mat: loendamine

12. juuni 2017, 14:45–18:00, Tartu, J. Liivi 2, ruum 207
Erik Paemurru

Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalarvude jada ja k positiivne täisarv. Iga k järjestikuse liikme summat $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+k-1}$ kutsume *k-summaks*.

1. Leia suurim võimalik liigete arv reaalarvude jadas, mille iga 7-summa on negatiivne ning iga 11-summa positiivne.
2. Olgu p ja q ühistegurita positiivsed täisarvud. Leia ülemine tõke liigete arvule reaalarvude jadas, mille iga p-summa on negatiivne ning iga q-summa positiivne.
3. Olgu p ja q positiivsed täisarvud suurima ühisteguriga d. Leia ülemine tõke liigete arvule reaalarvude jadas, mille iga p-summa on negatiivne ning iga q-summa positiivne.
4. Näita, et kui eelmises ülesandes leidub tingimustele vastav jada, milles on n liiget, siis leidub ka tingimustele vastav n liikmega täisarvude jada, milles kehtib $a_i = a_{n+1-i}$.
5. Olgu $p, q \geq 1$ täisarvud suurima ühisteguriga d. Leia ülemine tõke liigete arvule positiivsete reaalarvude jadas, kus iga p-korrutis on väiksem ühest ja iga q-korrutis suurem ühest.
6. Leia suurim võimalik liigete arv positiivsete täisarvude jadas, mille iga 17-summa on paaris ning iga 18-summa on paaritu.
7. Leia reaalarvujada $a_1, \ldots, a_{12}$, kus iga 5-summa on negatiivne, aga kogusumma positiivne.

   Eluline tõlgendus: aastas iga viie järjestikuse kuu majanduslik kahju on miljon eurot, aga terve aasta peale kokku on kasum miljard eurot.
8. Tähistame lõpliku hulga X elementide arvu $|X|$. Olgu n positiivne täisarv ning $A_1, \ldots, A_n$ lõplikud hulgad. Veendu, et

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

9*. Olgu $p \geq 3$ algarv. Kasutades väiteid

- iga positiivse $p-1$ teguri d korral leidub polünoomil $x^d - 1$ modulo p täpselt d nullkohta vahemikus $x \in \{0, \ldots, p-1\}$,
- kui täisarvu $m \geq 2$ kanooniline esitus on $m = \prod m_i^{a_i}$, siis $\varphi(m) = \prod (m_i - 1) m_i^{a_i - 1}$,

tõesta, et leidub $c \in \{1, \ldots, p-1\}$ nii, et iga täisarvu $1 \leq r \leq p-2$ korral $c^r \neq 1 \pmod{p}$.

10. Leia valemid summadele $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ ja $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.
11. Malevõistlusel osaleb $2n$ mängijat. Leia esimese vooru võimalike erinevate paaringute arv.
12. Olgu $n \geq 4$ täisarv. Tasandil on kumer n-nurk. Joonestame kõik tema diagonaalid. Leia

    a) diagonaalide arv,

    b) suurim võimalik diagonaalide lõikepunktide arv,

    c) mitmeks osaks on hulknurk jaotatud, kui ükski kolm diagonaali ei läbi sama punkti,

    d) mitu kolmnurka diagonaalid tekitavad, kui ükski kolm diagonaali ei läbi sama punkti.

Lahendused

1. *Lahendus 1.* Kirjutame jada liikmed tabelina.

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_7 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_8 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{17} \end{array}$$

Näeme, et iga rea summa on negatiivne, aga iga veeru summa positiivne, mis on vastuolu. Seega antud jadas on ülimalt 16 liiget.

Näeme, et 16 liiget on näiteks jadas

$$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5.$$

Lahendus 2. Vaatame vähemalt 16 liikmega jadasid. Näeme, et

$$a_1 + \cdots + a_7 < 0, \quad a_1 + \cdots + a_{11} > 0 \quad \Longrightarrow \quad a_8 + \cdots + a_{11} > 0.$$

Analoogselt saame, et kõik 4-summad peale võib-olla $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$ on positiivsed. Liites kõrvutiolevad 4-summad, näeme

$$a_1 + \cdots + a_7 < 0, \quad a_1 + \cdots + a_8 > 0 \quad \Longrightarrow \quad a_8 > 0.$$

Analoogselt saame

$$a_1, a_2, a_4, a_5, a_6, a_8, a_9, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{15}, a_{16} > 0.$$

Kuna 4-summa $a_4 + a_5 + a_6 + a_7$, liikmed a_1, a_2 on positiivsed, aga 7-summa $a_1 + \cdots + a_7$ on negatiivne, siis $a_3 < 0$. Analoogselt saame $a_7 < 0, a_{10} < 0, a_{14} < 0$. Seega jada märgid on täpselt

$$+, +, -, +, +, +, -, +, +, -, +, +, +, -, +, +.$$

Kui jadas on vähemalt 17 liiget, siis rakendades antud mõttekäiku liikmetele $a_2, \ldots, a_{17}$, saame, et antud märgid hoopis liikmetele $a_1, \ldots, a_{17}$, mis muuhulgas tähendab, et $a_3 < 0$ ja $a_3 > 0$, mis on vastuolu. Seega jadas on ülimalt 16 liiget.

Näide, et 16 sobib, võtta lahendusest 1.

2. Analoogselt ülesande 1 esimesele lahendusele.

Mõned näited ülemise tõkke saavutamisest. Olgu $\epsilon = 10^{-10}$, $a = 1$ ning $k \geq 0$.

(p, q)	$b = *$	jada
$(2, 2k+1)$	$a + \epsilon$	$a, -b, a, -b, a, -b, \ldots, -b, a, -b, a$
$(3, 3k+1)$	$2a + \epsilon$	$a, a, -b, a, a, -b, a, a, -b, \ldots, -b, a, a, -b, a, a$
$(3, 3k+2)$	$2a - \epsilon$	$-a, b, -a, -a, b, -a, -a, b, \ldots, b, -a, -a, b, -a$
$(4, 4k+1)$	$3a + \epsilon$	$a, a, a, -b, a, a, a, -b, a, a, a, -b, \ldots, -b, a, a, a$
$(4, 4k+3)$	$3a - \epsilon$	$-a, -a, b, -a, -a, -a, b, -a, -a, -a, b, \ldots, b, -a, -a, -a, b, -a, -a$
$(5, 5k+1)$	$4a + \epsilon$	$a, a, a, a, -b, a, a, a, a, -b, \ldots, -b, a, a, a, a$
$(5, 5k+2)$	$\frac{3}{2}a - \epsilon$	$-a, b, (-a, b, -a, -a, b), \ldots, (-a, b, -a, -a, b), -a, b, -a$

3. Tähistame $p = rd$ ja $q = td$. Kirjutame d-summad tabelina.

$$\begin{array}{cccc} (a_1 + \cdots + a_d) & (a_{d+1} + \cdots + a_{2d}) & \cdots & (a_{(r-1)d+1} + \cdots + a_{rd}) \\ (a_{d+1} + \cdots + a_{2d}) & (a_{2d+1} + \cdots + a_{3d}) & \cdots & (a_{rd+1} + \cdots + a_{(r+1)d}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{(t-1)d+1} + \cdots + a_{td}) & (a_{td+1} + \cdots + a_{(t+1)d}) & \cdots & (a_{(r+t-2)d+1} + \cdots + a_{(r+t-1)d}) \end{array}$$

Näeme, et iga rea summa on p-summade summa, seega negatiivne, aga iga veeru summa q-summade summa, seega positiivne, mis on vastuolu. Seega tingimustele vastavas jadas on ülimalt $(r + t - 1)d - 1 = p + q - d - 1$ liiget.

6. Näitame, et jadas ei saa olla rohkem kui 33 liiget. Eeldame vastuväiteliselt, et jadas on vähemalt 34 liiget. Kuna $a_1 + \cdots + a_{17}$ ja $a_2 + \cdots + a_{18}$ on paaris, aga $a_1 + \cdots + a_{18}$ on paaritu, siis a_1 ja a_{18} on paaritud. Analoogselt, kuna $a_{17} + \cdots + a_{33}$ ja $a_{18} + \cdots + a_{34}$ on paaris, aga $a_{17} + \cdots + a_{34}$ on paaritu, siis a_{17} ja a_{34} on paaritud. Analoogselt kõik vahepealsed ka ehk teisisõnu $a_1, \ldots, a_{18}$ on kõik paaritud. Seega nende summa on paaris, mis on vastolu. Järelikult ei saa jadas olla rohkem kui 33 liiget.

Näide, et 33 on võimalik.

$$\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{16}, 0, \overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{16}$$

7. Võtan ülesande 2 lahenduse tabelist näite paari $(5, 5k + 2)$, nimelt $(5, 12)$, ning sealt esimesed 12 liiget. Saan

$$-a, b, -a, b, -a, -a, b, -a, b, -a, -a, b,$$

kus $a = 1$, $\epsilon = 10^{-10}$ ja $b = \frac{3}{2}a - \epsilon$.

10. Ruutude summa — paneme neljas püramiidist kokku risttahuka. Näide $n = 3$ jaoks kihtide kaupa.

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & 1 & & 3 & 3 & 3 & 2 & & 3 & 3 & 2 & 2 & & 3 & 2 & 2 & 2 \\ & 1 & 1 & & 3 & 3 & 1 & 1 & & 3 & 3 & 2 & 2 & & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & & 3 & 1 & 1 & 1 & & 3 & 1 & 1 & 1 & & 3 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

Kuupide summa — kirjuta lihtsalt välja esimesed kaks-kolm väärtust ja näed valemit.

11. Valime esimesele mängijale paarilise, selleks on $2n - 1$ võimalust, valime teisele, selleks on $2n - 3$ võimalust, jne. Kokku on $(2n - 1)!!$ võimalust.

12. a) Punktipaaride arv miinus külgede arv, $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

    b) Leidub bijektsioon diagonaalide lõikepunktide ja punktinelikute vahel. Punktinelikuid on lihtne lugeda, $\binom{n}{4}$.

    c) Euleri valemist lõpliku ühendatud planaarse graafi jaoks, mis on joonistatud ilma servade lõikumisteta, saame $v - e + f = 1$. Sellega peaks saama vastuse.

    Teine võimalus: Alguses on üks osa. Iga diagonaali kohta tuleb üks osa juurde ja iga kahe diagonaali lõikepunkti kohta tuleb üks osa juurde. Kokku on $1 + \binom{n}{2} - n + \binom{n}{4}$ osa.

    d) Iga täisarvu $0 \leq i \leq n$ korral tähistame T_i on kolmnurkade arv, kus i tema tippudest on hulknurga tippude seas. Joonestades võimalikud juhud, näeme, et:

- leidub 1 : 1 bijektsioon tipukuuikute, mis defineerivad T_0 kolmnurga, ja kolmnurkade vahel,
- leidub 1 : 5 bijektsioon tipuviisikute, mis defineerivad T_1 kolmnurga, ja kolmnurkade vahel,
- leidub 1 : 4 bijektsioon tipunelikute, mis defineerivad T_2 kolmnurga, ja kolmnurkade vahel,
- leidub 1 : 1 bijektsioon tipukolmikute, mis defineerivad T_3 kolmnurga, ja kolmnurkade vahel.

Seega kokku on kolmnurki

$$\binom{n}{6} + 5\binom{n}{5} + 4\binom{n}{4} + \binom{n}{3}.$$

Kommentaarid

Enamus ülesannetest on võetud kogumikust A. Engel „Problem-Solving Strategies", 5. peatükk „Enumerative Combinatorics" lk 85–91.

Lahendati kõik ülesanded välja arvatud ül 9*. Ül 12 d)-osast jõudsime ainult lahenduse idee lühidalt rääkida.

Õpilastest olid kohal IMO võistkond peale õpilase Joonas Jürgen Kisel (Vanalinna Hariduskolleegium, 12. klass):

1. Richard Luhtaru (Hugo Treffneri Gümnaasium, 10. klass),
2. Kaarel Hänni (Tallinna Reaalkool, 12. klass),
3. Hendrik Vija (Miina Härma Gümnaasium, 9. klass),
4. Toomas Tennisberg (Hugo Treffneri Gümnaasium, 10. klass),
5. Nikita Leo (Gustav Adolfi Gümnaasium, 11. klass)

ja lisaks

6. Kati Iher (Hugo Treffneri Gümnaasium, 11. klass),
7. Artur Avameri (Miina Härma Gümnaasium, 9. klass).