Koduseid ülesandeid IMO 2017
Eesti võistkonna kandidaatidele vol 5
kombinatoorika ja arvuteooria – lahendused

19. juuni 2017

1. Tõesta, et leidub ülimalt $\frac{2^n}{n+1}$ pikkusega n kahendsüsteemi jada (st koosnevad nullidest ja ühtedest), kus kõik paarid erinevad vähemalt kolmes kohas (nt $n = 5$ korral 01000 ja 11101 erinevad täpselt kolmes kohas).

Lahendus. Olgu meil antud k kahendsüsteemi jada v_i $(i = 1, \ldots, k)$, mis kõik erinevad vähemalt kolmes kohas. Kirjutame need jadad ühte ritta ning iga selles reas oleva kahendsüsteemi arvu alla kirjutame kõik kahendsüsteemi jada, mis erinevad temast täpselt ühes kohas. Nii tekib kokku $k(n+1)$ erinevat kahendjada. Seega $k(n+1) \leq 2^n$, millest saame $k \leq \frac{2^n}{n+1}$, nagu soovitud.

2. Iga positiivse täisarvu n jaoks tähistagu $p(n)$ võimaluste arvu, mitmel viisil saab arvu n esitada positiivsete täisarvude summana. Näiteks $p(4) = 5$, kuna

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Defineerime ka $p(0) = 1$. Tõesta, et $p(n) - p(n-1)$ on võimaluste arv esitada n ühest suuremate positiivsete täisarvude summana.

Lahendus. Kui $n = 1$, siis väide on tõene, sest $p(1) = p(0) = 1$ ja arvu 1 iga esitus (st ainuke esitus) positiivsete täisarude summana sisaldab arvu 1. Seega eeldame, et $n \geq 2$. Olgu $P_n = \{(a_1, \ldots, a_k) \colon k \in \mathbb{N}, a_1 \geq \ldots \geq a_k, a_1 + \ldots + a_k = n\}$ hulk, mis vastab arvu n kõikvõimalikele esitustele positiivste täisarvude summana. Olgu Q_n hulga P_n alamhulk, mis vastab summadele, kus on olemas ka arv 1 ehk $Q_n = \{(a_1, \ldots, a_k) \in P_n \colon a_k = 1\}$. Seega vaja on näidata, et $|P_n \backslash Q_n| = p(n) - p(n-1)$. Kuna $Q_n \subset P_n$, siis $|P_n \setminus Q_n| = |P_n| - |Q_n|$ Samas, kuna $|P_n| = p(n)$, siis piisab näidata, et $|Q_n| = p(n-1)$ ehk $|Q_n| = |P_{n-1}|$. Selleks aga näitame, et hulkade Q_n ja P_{n-1} elemendid saab seada üksühesesse vastavusse. Selleks defineerime funktsiooni $\phi \colon P_{n-1} \to Q_n$ järgmise seosega

$$\phi(a_1, \ldots, a_k) = (a_1, \ldots, a_k, 1).$$

Paneme tähele, et see funktsioon on korrektselt defineeritud, sest kui $(a_1, \ldots, a_k) \in P_{n-1}$, siis $a_1 + \ldots + a_k = n - 1$ ja järelikult $a_1 + \ldots + a_k + 1 = n$. Samuti järjend $(a_1, dots, a_k, 1)$ sisaldab arvu 1 ja seega ja seega $\phi(a_1, \ldots, a_k) \in Q_n$. See funktsioon defineerib üksühese vastavuse hulkade P_{n-1} ja Q_n vahel, sest erinevatele jadadele $(a_1, \ldots, a_k)$ ja $(b_1, \ldots, b'_k)$ vastavad erinevad jadad $(a_1, \ldots, a_k, 1)$ ja $(b_1, \ldots, b'_k, 1)$. Samuti kui võtta suvaline jada $(a_1, \ldots, a_p)$ hulgast Q_n, siis sellele vastab üheselt määratud hulga P_{n-1} element $(a_1, \ldots, a_{p-1})$.

3. Olgu S hulk, mis koosneb kümnest kahekohalisest arvust. Tõesta, et hulgas S leidub kaks lõikumatut alamhulka, mille elementide summa on sama.

Lahendus. Olgu $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$. Siis igale mittetühjale alamhulgale $I \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ saame vastavusse seada summa $\sum_{i \in I} a_i$. Sellised summasid on kokku $2^{10} - 1 = 1023$. Mistahes sellise summa minimaalne väärtus on $10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60$ ja maksimaalne väärtus $99 + 98 + 97 + 96 + 95 = 985$. Seega Dirichlet' printsiibi kohaselt peab leiduma kaks erinevat alamhulka $I, J \subset \{1, 2, \ldots, 10\}$, nii et

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_j.$$

Kui hulkades I ja J on samu elemente, siis me võime need elemendid eemaldada ja vastavad summad jäävad pärast seda võrdseks.

4. Olgu tasandil antud selline lõplik punktide hulk S, mille korral mistahes kahe selle hulga punkti korral leidub kolmas hulga S element, mis asub nende kahe punktiga samal sirgel. Tõesta, et kõik hulga S punktid asuvad samal sirgel.

Lahendus. Oletame vastuväiteliselt, et kõik punktid ei asu ühel sirgel. Vaatleme kõikvõimalikke paare (A, BC), $A, B, C \in S$, kus BC on punktide B ja C poolt moodustatud sirge. Vaatleme ainult selliseid paare, kus punkt A ei asu sirgel BC. Kuna hulk S on lõplik, siis selliseid paare on ka lõplik arv. Vaatleme sellist paari, mille korral punkti A kaugus sirgeni BC on minimaalne. Ülesande tingimisuste kohaselt leidub kolmas punkt D, mis asub sirgel BC. Nüüd tõmbame punktist A sirgele BC ristsirge AE. Siis vähemalt kaks punkti hulgast $\{B, C, D\}$ asuvad punktist E ühel pool. Olgu need üldisust kitsendamata B ja D. Siis kolmnurk ABD on nürinurkne (või täisnurkne) ning olgu suurim nurk punktis B (võib ka olla punktis D, aga vahet pole). Kuid siis paari (B, AD), korral on punkti B kaugus sirgest AD väiksem, kui punkti A kaugus sirgest BC, mis on vastuolus (A, BC) valikuga.

5. Majas, kus on 120 korterit elab 119 inimest. Ütleme, et korter on *ülerahvastatud*, kui seal elab vähemalt 15 inimest. Iga päev, kui leidub ülerahvastatud kortereid, toimub ühes sellises korteris inimeste vahel tüli pärast mida kõik selle korteri elanikud suunduvad elama selle maja erinevatesse korteritesse. Kas nii toimides peab alati lõpliku arvu päevade järel saabuma olukord, kui ühtegi ülerahvastatud perekonda (ja seega ka tüli!) enam ei ole.

Lahendus. Olgu elanikud $s_1, \ldots, s_{119}$. Tähistame korterid $p_1, \ldots, p_{120}$ ja olgu a_i korteris p_i olevate elanike arv. Kui $a_i < 15$, iga $i = 1, \ldots, 120$ korral, siis meil ülerahvastatud kortereid poleks ja protsess oleks peatunud. Seega eeldame, et vähemalt ühe indeksi $i = 1, \ldots, 120$ korra $a_i \geq 15$. Üldisust kitsendamata olgu $a_1 \geq 15$. Vaatleme suurust

$$V = \frac{a_1(a_1 - 1)}{2} + \ldots + \frac{a_{120}(a_{120} - 1)}{2},$$

mis on täpselt kõikvõimalike elanike paaride (s_i, s_j) arv, kus on s_i ja s_j samast korterist. Vaatame, kuidas muutub suurus V, kui korteris p_1 toimub tüli ja kõik elanikud mujale kolivad. Koligu need elanikud korteritesse $p_{i_1}, \ldots, p_{i_{a_1}}$, siis suurus V muutub

$$a_{i_1} + \ldots + a_{i_{a_1}} - \frac{a_1(a_1 - 1)}{2}.$$

Näitame, et see muutus on alati negatiivne ehk V alati väheneb ehk

$$a_{i_1} + \ldots + a_{i_{a_1}} - \frac{a_1(a_1 - 1)}{2} < 0.$$

Tõepoolest

$$a_{i_1} + \ldots + a_{i_{a_1}} \leq 119 - a_1 \leq 119 - 15 = 104$$

ja

$$\frac{a_1(a_1 - 1)}{2} \geq \frac{15 \cdot 14}{2} = 105,$$

mis kokku annab

$$a_{i_1} + \ldots + a_{i_{a_1}} - \frac{a_1(a_1 - 1)}{2} \leq -1.$$

Seega igal päeval väheneb suurus V vähemalt ühe võrra. Seega protsess peab lõpliku arvu sammude järel peatuma (st mingist hetkest alates enam ülerahvastatud kortereid ei ole), sest $V \geq 0$

ei saa lõputul kahaneda.

6. Olgu S lõplik tasandi punktide hulk, millest üksi kolmik ei asu ühel sirgel. Iga kumera hulknurga P, mille tipud on hulga S punktid, jaoks olgu $a(P)$ tema tippude arv ja $b(P)$ hulga S nende punktide arv, mis asuvad kumerast hulknurgast P väljaspool. Tõesta, et iga reaalarvu x korral

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1,$$

kus summa on võetud üle kõigi kumerate hulknurkade, mille tipud on hulgast S. Siin lõik, punkt ja tühihulk loetakse vastavalt kumeraks hulknurgaks 2, 1 ja 0 tipuga.

Lahendus 1. Iga kumera hulknurga P korral, mille tipud on hulgast S olgu $c(P)$ hulga S nende elementide arv, mis asub hulknurga P sees. Siis $a(P) + b(P) + c(P) = n$ iga sellise hulknurga korral. Tähistades $y = 1 - x$ saame kirjutada

$$\begin{aligned}\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} &= \sum_P x^{a(P)}y^{b(P)} = \sum_P x^{a(P)}y^{b(P)}(x+y)^{c(P)} \\ &= \sum_P \sum_P^{c(P)} \binom{c(P)}{i} x^{a(p)+i}y^{b(P)++c(P)-i}.\end{aligned}$$

Vaatleme seda, kui homogeenset polünoomi astmega n, millel on kaks sõltumatut muutujat x, y. See on summa liikmetest $x^r y^{n-r}$ $(0 \le r \le n)$, millel on mittenegatiivsed täisarvulised kordajad.

Fikseeritud r korral liikme $x^r y^{n-r}$ kordaja näitab mitmel viisil saab valida kumera hulknurga P ja siis valida mõned S punktid P sees, nii et P tippude arv ja P sees valitud punktide arv annab kokku r.

Kuid see on samahea, kui valida lihtsalt hulga S r-elemendiline alamhulk. See vastavus on bijektiivne, sest hulga S iga alamhulga T saab jagada täpselt ühel moel kaheks lõikumatuks alamhulgaks, millest üks mooduatb kumera hulknurga ja teine tema sisepunktid. Seega $x^r y^{n-r}$ kordaja on $\binom{n}{r}$ ning seega

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = \sum_P x^{a(P)}y^{b(P)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r} = (x+y)^n = 1,$$

nagu soovitud.

Lahendus 2. Kasutame induktsiooni n järgi. Kui $n = 0$, siis pole midagi tõestada, sest väide kehtib triviaalselt. Olgu nüüd, et $n > 0$ ja oletame, et väide kehtib, kui hulgas S on vähem punkte, kui n. Olgu C hulga S kumeras kattes olevad punktid ja $m = |C|$. Olgu $X \in C$ suvaline mittetühi hulk. Iga kumera hulknurga P korral, mille tipud on hulgast $S \setminus X$. Meil on $b(P) - |X|$ punkti hulgas $S \setminus X$, mis asuvad hulknurgast P väljaspool. Seega induktsiooni eelduse kohaselt, kui tähistada $y = 1 - x$, saame

$$\sum_{P \subset S \setminus X} x^{a(P)}y^{b(P)-|X|} = 1,$$

kus $P \subset S \setminus X$ tähendab, et hulknurga P tipud kuuluvad hulka $S \setminus X$. Seega

$$\sum_{P \subset S \setminus X} x^{a(P)}y^{b(P)} = y^{|X|}.$$

Kõik kumerad hulknurgad tulevad sellsites summades (kui varieerida hulka X) esile vähemalt korra välja arvatud C ise. C is panustab summasse x^m. Saame kasutada eliminineerimismeetodit,

et arvutada summa üle teiste kumerate hulknurkade:

$$\sum_{P\neq C} x^{a(P)}y^{b(P)} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{|X|=k}\sum_{P\subset S\setminus X} x^{a(P)}y^{b(P)} = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\sum_{|X|=k} y^k$$
$$= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}y^k = -((1-y)^m-1) = 1-x^m$$

ning seega

$$\sum_{P} x^{a(P)}y^{b(P)} = x^m + (1-x^m) = 1.$$

7. Kui palju on positiivseid täisarve $x < 10^{2017}$, mille korral $x^2 - x$ jagub arvuga 10^{2017}?

Lahendus. Kuna $x^2 - x = x(x-1)$ ja arvud x, $x-1$ on paarikaupa ühistegurita., siis üks nendest arvudest peab jaguma arvuga 2^{2017} ja üks (mis võib olla ka sama arv) arvuga 5^{2017}. Seega arv x peab rahuldama ühte neljast seosest

$$x \equiv 0 \text{ või } 1 \pmod{2^{2017}}$$
$$x \equiv 0 \text{ või } 1 \pmod{5^{2017}}.$$

Hiina jäägiteoreemi põhjal leidub kõigil neljal süsteemil ühene lahend arvude $0, 1, \ldots, 10^{2017}-1$. Kõik need lahendid on erinevad, kuna igale lahendil vastavad erinevad jäägid. Üks lahenditest on arv 0, mis meile ei sobi, aga ülejäänud kolm rahuldavad kõiki tingimusi. Seega vastus on 3.

8. Olgu a, b, c ja d positiivsed täisarvud, mille korral $ab = cd$. Tõesta, et $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ei ole algarv.

Lahendus. Võrdusest $ab = cd$ saame, et $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$. Olgu $x, y \geq 1$ ühistegurita täisarvud, nii et $\frac{x}{y} = \frac{a}{c} = \frac{d}{b}$. Seega leiduvad täisarvud u ja v, nii et

$$a = ux,\ c = uy,\ d = cy,\ b = vy.$$

Nüüd saame, et

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = u^2x^2 + v^2y^2 + u^2y^2 + v^2x^2$$
$$= (u^2+v^2)(x^2+y^2).$$

Kuna $u^2 + v^2 > 1$ ja $x^2 + y^2 > 1$, siis $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ei saa olla algarv. Olgu mainitud, et arv kaks pole siin eriline ja iga täisarvu $n \geq 1$ korral

$$a^n + b^n + c^n + d^n = (u^n + v^n)(x^n + y^n)$$

pole algarv, sest $u^n + v^n > 1$ ja $x^n + y^n > 1$.

9. Leia kõik ühest suuremate naturaalarvude paarid (x, y), mille korral arv $2^x + 3^y$ on mingi naturaalarvu ruut.

Lahendus. Vastus: ainus selline paar on $(x, y) = (4, 2)$. Olgu $x \geq 2$, $y \geq 2$, z sellised täisarvud, et $2^x + 3^y = z^2$. Seega z on paaritu arv ja järelikult z^2 annab neljaga jagades jäägi 1. Samas 2^x jagub arvuga 4 (sest $x \geq 2$) ja seega 3^y peab andma neljaga jagades jäägi 1. See kehtib parajasti, siis kui y on paarisarv, mis tähendab, et leidub täisarv y_1, nii et $y = 2y_1$. See annab seose $2^x = z^2 - 3^y = z^2 - 3^{2y_1} = z^2 - (3^{y_1})^2 = (z + 3^{y_1})(z - 3^{y_1})$. Et $y_1 \geq 1$, siis z ja 3^{y_1} on mõlemad paaritud ning seega $z - 3^{y_1} = 2^a$ ja $z + 3^{y_1} = 2^b$, kus $a, b \geq 1$ on täisarvud. Paneme tähele, et arvud

$z-3^{y_1}$, $z+3^{y_1}$ ei saa mõlemad jaguda neljaga (vastasel juhul peaks nende summa $2z$ jaguma neljaga ja z peaks seega olema paarisarv). Seepärast $z-3^{y_1}=2$ ja seega $z+3^{y_1}=2^{x-1}$. Lahutades esimese võrduse teisest saame $3^{y_1}=2^{x-2}-1$, st x peab olema paarisarv (et 2^{x-2} annaks kolmega jagades jäägi 1). Olgu $x=2x_1$, siis $3^{y_1}=2^{2(x_1-1)}-1=(2^{x_1-1}+1)(2^{x_1-1}-1)$, st $2^{x_1-1}+1=3^c$, $2^{x_1-1}-1=3^d$. Et $3^c-3^d=2$, peab olema $d=0$. Seega $2^{x_1-1}-1=1$, kust leiame $x_1=2$, $x=4$ ning $y_1=1$, $y=2$.

10. Olgu teada, et $x, y, \dfrac{x^2+y^2+6}{xy}$ on positiivsed täisarvud. Tõesta, et $\dfrac{x^2+y^2+6}{xy}$ on mingi täisarvu kuup.

Lahendus. Olgu $n=\dfrac{x^2+y^2+6}{xy}$ positiivne täisarv. Seega võrrandil

$$x^2+y^2-nxy+6=0 \tag{1}$$

leidub positiivseid täisarvulisi lahendipaare (x,y). Olgu (x_0,y_0) selle võrrandi selline positiivne täisarvuline lahendi paar, mille korral x_0 väärtus on minimaalne ning y_0 väärtus selle x_0 väärtuse jaoks vähim võimalik (st et kui (x_0,y) on ka selle võrrandi mingi muu lahend, siis $y>y_0$). Sel juhul ilmselt $x_0\le y_0$. Vahetult saab kontrollida, et ka paar (x_0, nx_0-y_0) on võrrandi (1) lahend. Tõepoolest

$$\begin{aligned} x_0^2+(nx_0-y_0)^2-nx_0(nx_0-y_0)+6 &= x_0^2+n^2x_0^2+y_0^2-2nx_0y_0 \\ &\quad -n^2x_0^2+nx_0y_0+6 \\ &= x_0^2+y_0^2-nx_0y_0+6=0. \end{aligned}$$

Samuti $nx_0-y_0>0$, sest vastasel korral

$$x_0^2+(nx_0-y_0)^2-nx_0(nx_0-y_0)+6\ge x_0^2+(nx_0-y_0)^2\ge x_0^2>0.$$

Sarnaselt saab ka veenduda, et (nx_0-y_0, x_0) on võrrandi (1) lahend. Nüüd x_0 ja x_0 valiku tõttu peavad kehtima võrratused $x_0\le nx_0-y_0$ ja $y_0\le nx_0-y_0$. Samas võrduse

$$x_0^2+(nx_0-y_0)^2-nx_0(nx_0-y_0)+6$$

võib kirjutada kujul

$$y_0(nx_0-y_0)=x_0^2+6$$

ja seega

$$x_0^2+6=y_0(nx_0-y_0)\ge y_0^2\ge x_0^2.$$

Kui $y_0\ge x_0+1$, siis $x_0^2+6\ge y_0^2\ge (x_0+1)^2=x_0^2+2x_0+1$, kus saame, et $x_0\ge 2$. Kui $x_0=1$, siis $y_0^2\ge x_0^2+6=7$ ehk $y_0\ge 2$, mis annab $y_0=2$, kuid kontroll näitab, et $(1,2)$ ei ole sobiv lahend. Kui $x_0=2$, siis $y_0^2\ge x_0^2+6=10$ ning $y_0\ge 3$, mis annab $y_0=3$ (sest $y_0\ge x_0+1=3$). Seega kokkuvõttes saame, et $x_0=y_0$ ja võrrandist (1) saame, et $(n-2)x_0^2=6$, mis annab $x_0=y_0=1$ ja $n=8$.

11. Leia kõik sellised täisarvupaarid (x,y), et

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2.$$

Lahendus. Kõigepealt paneme tähele, et kui (x,y) on lahendipaar, siis ka $(x,-y)$ on lahendipaar. Teiseks paneme tähele, et $x\ge -1$, sest kui $x\le -2$, siis

$$1<1+2^x+2^{2x+1}\le 1+2^{-2}+2^{-3}<2$$

ja seega $y^2=1+2^x+2^{2x+1}$ ei saa olla täisarv. Kui $x=-1$, siis $1+2^x+2^{2x+1}=2$, mis ei ole täisarvu ruut. Kui $x=0$, siis $y^2=1+2^x+2^{2x+1}=4$, mis annab lahendipaarid $(0,2)$ ja $(0,-2)$.

Vaatleme nüüd lahendipaare (x, y), kus $x > 0$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $y > 0$ (sest ka $(x, -y)$ on lahend). Võrrand

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

on samaväärne võrrandiga

$$2^x(2^{x+1} + 1) = (y - 1)(y + 1). \tag{2}$$

Kuna vasakpool jagub 2-ga, siis y peab olema paaritu arv. Nüüd $y-1$ ja $y+1$ on kaks järjestikust paarisarvu, seega üks neist jagub arvuga 4 ning järelikult $(y-1)(y+1)$ jagub 8-ga. Kuna $2^{x+1}+1$ on paaritu arv, siis 2^x peab jaguma arvuga 8, mis tähendab, et $x \geq 3$. Samas ainult üks arvudest $y - 1$ või $y + 1$ jagub 4-ga, siis üks nendest arvudest peab jaguma 2^{x-1}-ga ja teine ainult kahega ehk $y = 2^{x-1}m + \epsilon$, kus m on paaritu täisarv ja $\epsilon = \pm 1$. Asendades selle võrrandisse (2) saame, et

$$2^x(2^{x+1} + 1) = (2^{x-1} + \epsilon)^2 - = 2^{2x-2}m^2 + 2^x m\epsilon,$$

mis arvuga 2^x läbi jagades annab võrrandi

$$1 + 2^{x+1} = 2^{x-2}m^2 + m\epsilon$$

ehk liikmete ümberjärjestamisel

$$1 - \epsilon m = 2^{x-2}(m^2 - 8). \tag{3}$$

Kui $\epsilon = 1$, siis viimase võrrandi vasak poole on mittepositiivne. Seega ka parem pool on mitte positiivne, mis tähendab, et $m^2 - 8 \leq 0$, mis tähendab, et $m = 1$ (sest m on paaritu arv). Kuid siis vasak pool on 0 ja parem pool negatiivne, mis tähendab, et sel juhul lahendeid pole. Kui $y = -1$, siis võrrand (3) annab

$$1 + m = 2^{x-2}(m^2 - 8) \geq 2(m^2 - 8),$$

kust saame, et $2m^2 - m - 17 \leq 0$. Seega $m \leq 3$. Samas $m \neq 1$, sest vastasel juhul olkes võrrandi (3) parem pool negatiivne ja vasak pool positiivne. Seega $m = 3$ ja järelikult $x = 4$ ning $y = 23$ (vastavalt y definitsioonile $y = 2^{x-1}m + \epsilon$). Järelikult lahendid on $(0, 2)$, $(4, 23)$, aga ka $(0, -2)$ ja $(4, -23)$.

12. Täisarvude jadas $a_1, a_2, \ldots$ on lõpmata palju positiivseid ja lõpmata palju negatiivseid liikmeid. Iga positiivse täisarvu n korral annavad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ arvuga n jagamisel n erinevat jääki. Tõesta, et iga täisarv esineb selles jadas täpselt üks kord.

Lahendus. Paneme kõigepealt tähele, et selle jada kõik liikmed on erinevad. Tõepoolest, kui leiduksid indeksid $i < j$, nii et $a_i = a_j$, siis valides $n = j$ saaksime, et $a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$ ei annaks arvuga $n = j$ jagades erinevaid jääke (nimelt a_i ja a_j annaksid sama jäägi, sest $a_i = a_j$). Iga $n \geq 1$ korral tähistagu $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ hulka, mis koosneb selle jada n esimesest liikmest. Olgu $\max A_n$ ja $\min A_n$ vastavalt selle hulga maksimaalse ja minimaalse elemendi väärtus. Olgu n fikseeritud. Valime suvalised indeksid i ja j, nii et $i < j \leq n$. Siis, kui $k = |a_i - a_j| \geq n$, saaksime, et a_i ja a_j kuuluvad hulka A_k, aga a_i ja a_j annaksid arvuga k jagades sama jäägi (sest nende vahe jagub arvuga k). Järelikult $|a_i - a_j| < n$. Järelikult ka $\max A_n - \min A_n < n$. Samas kuna $\{a_1, \ldots, a_n\}$ on kõik erinevad, siis $\max A_n - \min A_n \geq n-1$ ning järelikult $\max A_n - \min A_n = n-1$ ja hulga A_n elemendid peavad mingis järjekorras olema kujul $m_n, m_n + 1, \ldots, m_n + n - 1$, kus $m_n = \min A_n$. Ühesõnaga hulga A_n elemendid on järjestikused täisarvud. Kuna aga selles jadas $a_1, a_2, \ldots$ on nii negatiivseid kui ka positiivseid liikmeid lõpmata palju, siis sisaldab see jada iga täisarvu täpselt ühe korra.