Koduseid ülesandeid IMO 2017
Eesti võistkonna kandidaatidele vol 6
algebra ja geomeetria – lahendused

29. juuni 2017

1. Tõesta, et võrrandi

$$x^3 + px + q = 0$$

iga lahend x rahuldab võrrandit $4qx \leq p^2$.

Lahendus 1. Olgu x_0 võrrandi $x^3 + px + q = 0$ lahend. Siis $x^3 + px + q = (x - x_0)(x^2 + ax + b)$ mingite reaalarvude a ja b korral ning järelikult

$$x^3 + px + q = (x - x_0)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a - x_0)x^2 + (b - ax_0)x - bx_0.$$

Seega $a = x_0$, $p = b - ax_0 = b - x_0^2$, $-q = bx_0$, mis annab

$$p^2 - 4qx = b^2 - 2bx_0^2 + x_0^4 + 4bx_0^2 = b^2 + 2bx_0^2 + x_0^4 = (b + x_0^2)^2 \geq 0$$

nagu soovitud.

Lahendus 2. Olgu x_0 võrrandi $x^3+px+q = 0$ lahend. Kuna x_0 on ruutvõrrandi $x_0x^2+px+q = 0$ lahend, siis diskriminant peab olema mittenegatiivne, st $p^2 - 4qx_0 \geq 0$, nagu soovitud. (Võib ka vaadelda võrrandit $x^2 + px + qx_0 = 0$ ja tema nullkohta $x = x_0$.)

2. Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selline funktsioon, et

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

kõigi reaalarvude x korral. Leia $f(0)$.

Lahendus. Olgu $a = f(0)$ ja $b = f(1)$. Siis valides $x = 0$ saame $f(a) = 1$ ja valides $x = 1$ saame $f(b) = 1^2 - 1 + 1 = 1$. Seega $f(f(a)) = f(1) = b$ ja $f(f(0)) = f(1) = b$. Seega algne võrrand $x = a$ korral annab $b = a^2 - a + 1$ ning algne võrrand $x = b$ korral annab $b = b^2 - b + 1$ ehk $(b-1)^2 = 0$, mis annab $b = 1$. Järelikult $a^2 - a + 1 = 1$ ehk $a(a-1) = 0$ ehk $a = 0$ või $a = 1$. Kui $a = 0$, siis $f(0) = 0$ ja järelikult $f(f(0)) = 0$, kuid me juba teame (võttes $x = 0$), et $f(f(0)) = 1$. Seega $a = 1$ ehk $f(0) = 1$.

3. Leia kõik funktsioonid $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis kõigi reaalarvude x ja y korral rahuldavad võrdust

$$f(x + y) = f(x - y) + f(f(1 - xy)).$$

Lahendus. Võttes $y = 0$ saame $f(x) = f(x) + f(f(1))$, mis annab, et $f(f(1)) = 0$. Võttes algses võrrandis $x = 0$ saame $f(y) = f(-y) + f(f(1)) = f(-y)$, st otsitav funktsioon peab olema paarisfunktsioon.

Valides $x = 1$ algses võrrandis, saame $f(1 + y) = f(1 - y) + f(f(1 - y))$, mis arvestades, et funktsioon f on paarisfunktsioon annab $f(-1 - y) = f(1 - y) + f(f(1 - y))$ ehk tähistades $z = 1 - y$ saame võrduse

$$f(f(z)) = f(z - 2) - f(z), \tag{1}$$

mis peab kehtima iga reaalarvu z korral (sest, kui y katab kõik reaalarvud, siis ka $1 - y$ katab kõik reaalarvud).

Valides võrrandis (1) z asemel $-z$ saame $f(f(-z)) = f(-z-2) - f(-z)$, mis võrrandit (1) ja funktsiooni f paarsust arvestades annab, et

$$f(z-2) = f(z+2) \tag{2}$$

kehtib iga reaalarvu z korral.

Võttes algses võrrandis $y = 2$ saame $f(x+2) = f(x-2) + f(f(1-2x))$, mis võrrandi (2) põhjal annab $f(f(1-2x)) = 0$ iga reaalarvu x korral. Tähistades $z = 1-2x$ saame, et

$$f(f(z)) = 0$$

iga reaalarvu z korral. Seega algne võrrand lihtsustub kujule $f(x+y) = f(x-y)$. Võttes siin $x = y = \dfrac{z}{2}$ saame, et $f(z) = f(0)$ iga reaalarvu z korral. Järelikult on tegemist konstantse funktsiooniga. Kuna $f(f(1)) = 0$, siis see konstant peab olema 0, st $f(x) = 0$ iga x korral.

4. Olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et leiduvad positiivsed reaalarvud $a_0, a_1, \ldots, a_n$, nii et sõltumata märkide valikust on polünoomil

$$\pm a_n x^n \pm a_{n-1}x^{n-1} \pm \ldots \pm a_1 x \pm a_0$$

n erinevat reaalarvulist juurt.

Lahendus. Tõestame väite induktsiooniga polünoomi p astme n järgi. Kui $n = 1$ korral on väide ilmne (võib näiteks võtta $a_1 = a_0 = 1$). Oletame, et väide on tõene $n = k$ korral ja püüame leida selliste omadustega kordajad $a_{n+1}, a_n \ldots, a_1, a_0$. Seega induktiooni eedluse põhjal on meil olemas kordajad $a_n, \ldots, a_1, a_0$, nii et sõltumata märkide valikust on polünoomil

$$\pm a_n x^n \pm a_{n-1}x^{n-1} \pm \ldots \pm a_1 x \pm a_0$$

n erinevat reaalarvulist juurt. Vaatleme polünoome

$$\overline{p}(x) \pm a_n x^{n+1} \pm a_{n-1}x^n \pm \ldots \pm a_1 x^2 \pm a_0 x.$$

Induktsiooni eelduse põhjal teame, et iga selline polünoom omab $n+1$ erinevat reaalarvulist juurt (täpsemalt induktsiooni eedlus annab n juurt ja lisandub ka juur 0, mis on teistest erinev, sest $a_0 \neq 0$). See ühtlasi tähendab, et ükski nendest nullkohtadest pole vaadeldava polünoomi lokaalne ekstreemum (sest pole kahekordseid juuri). Neid polünoome on 2^{n+1} ja igaühel on täpselt n lokaalset ekstreemumi, eega kokku on $n2^{n+1}$ ekstreemumi. Olgu m nendest $n2^{n+1}$ ekstreemumitest sellise väärtus, mille absoluutväärtus on minimaalne ja olgu ϵ mingi arv vahemikus $0 < \epsilon < |m|$ (ehk väiksem mistahes lokaalse ekstreemumi absoluutväärtusest). Näitame, et polünoom

$$p(x) = \pm a_n x^{n+1} \pm a_{n-1}x^n \pm \ldots \pm a_1 x^2 \pm a_0 x \pm \epsilon$$

rahuldab ülesande tingimusi. Pildi peal mõeldes on väide üsna selge, sest iga vaadeldav polünoom on polünoom $\overline{p}(x) = \pm a_n x^{n+1} \pm a_{n-1}x^n \pm \ldots \pm a_1 x^2 \pm a_0 x$, mis nihutatud y telje positiivses või negatiivses suunas ϵ võrra. Sealjuures jäävad paika ka tema lokaalsed ekstreemumid. Olgu need lokaalsed ekstreemumid $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$ ja tähistame $s_0 = -\infty$ ning $s_{n+1} = \infty$. Siis iga $i = 0, 1, \ldots, n$ korral on $\overline{p}(s_i)$ ja $\overline{p}(s_{i+1})$ erimärgilised. Vastavalt arvu ϵ valikule on ka $p(s_i)$ ja $p(s_{i+1})$ erimärgilised. Seega igas vahemikus (s_i, s_{i+1}) leidub polünoomil $p(x)$ vähemalt üks juur. Kuna, aga selliseid vahemikke on $n+1$, siis leidub vähemalt $n+1$ juurt, kuid polünoomi p aste ongi $n+1$, seega tal rohkem neid olla ei saa ja induktsiooni samm on lõpuni viidud.

5. Olgu x, y, z arvust 1 erinevad reaalarvud, mille korral $xyz = 1$. Tõesta, et

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

Lahendus. Tähistame $a = \dfrac{x}{x-1}$, $b = \dfrac{y}{y-1}$ ja $c = \dfrac{z}{z-1}$. Siis $x = \dfrac{a}{a-1}$, $y = \dfrac{b}{b-1}$ ja $z = \dfrac{c}{c-1}$. seega on vaja tõestada, et $a^2+b^2+c^2 \geq 1$. Tingimuse $xyz = 1$ saab kirjutada kujul

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc$$

ehk

$$a+b+c-1 = ab+bc+ca$$

ehk

$$2(a+b+c-1) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$$

ehk

$$a^2+b^2+c^2-2 = (a+b+c)^2 - 2(a+b+c)$$

ehk

$$a^2+b^2+c^2-1 = (a+b+c-1)^2.$$

Kuid viimane võrdus annab, et

$$a^2+b^2+c^2-1 = (a+b+c-1)^2 \geq 0,$$

nagu soovitud.

6. Olgu $a, b, c \in [-1, 1]$ reaalarvud, mille korral

$$1 + 2abc \geq a^2+b^2+c^2.$$

Tõesta, et

$$1 + 2(abc)^n \geq a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}$$

iga positiivse täisarvu n korral.

Lahendus. Vaja on tõestada võrratus

$$1 - b^{2n} - c^{2n} + b^{2n}c^{2n} \geq a^{2n} - 2a^nb^nc^n + b^{2n}c^{2n}$$

ehk tegurdades

$$(a^n - b^nc^n)^2 \leq (1-b^n)(1-c^n).$$

Eelduse kohaselt

$$(a-bc)^2 \leq (1-b^2)(1-c^2). \tag{3}$$

Nüüd arvestades, et $|a| \leq 1$ ja kasutades Cauchy võrratust saame, et

$$\begin{aligned}\left(a^{n-1} + a^{n-2}bc + \ldots + b^{n-1}c^{n-1}\right)^2 &\leq \left(|a|^{n-1} + \ldots |bc|^{n-1}\right)^2 \\ &\leq \left(1 + |bc| + \ldots + |bc|^{n-1}\right)^2 \\ &\leq \left(1 + |b|^2 + \ldots + |b|^{2(n-1)}\right)\left(1 + |c|^2 + \ldots + |c|^{2(n-1)}\right).\end{aligned}$$

Korrutades selle võrratuse läbi võrratusega (3) saame, et

$$\begin{aligned}&(a-bc)^2\left(a^{n-1} + a^{n-2}bc + \ldots + b^{n-1}c^{n-1}\right)^2 \geq \\ &(1-b^2)\left(1 + |b|^2 + \ldots + |b|^{2(n-1)}\right)(1-c^2)\left(1 + |c|^2 + \ldots + |c|^{2(n-1)}\right).\end{aligned}$$

Kasutades valemit

$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}\right)$$

saamegi viimase võrratuse kirjutada kujul

$$(a^n - b^n c^n)^2 \leq (1 - b^n)(1 - c^n),$$

nagu soovitud.

7. Olgu kolmnurga ABC mediaanidest konstrueeritud kolmnurk $A_1B_1C_1$ ja kolmnurga $A_1B_1C_1$ mediaanidest kolmnurk $A_2B_2C_2$. Tõesta, et kolmnurgad ABC ja $A_2B_2C_2$ on sarnased sarnasusteguriga $\frac{3}{4}$.

Lahendus. Me teame, et kolmnurga $A_1B_1C_1$ küljed avalduvad kujul $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right)$ ja $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}\right)$. Üldisust kitsendamata olgu

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right), \quad \overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right), \quad \overrightarrow{C_1A_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}\right).$$

Kuid samuti eelneva ülesande põhjal avalduvad kolmnruga $A_2B_2C_2$ küljed kujul $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{C_1A_1}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1C_1} - \overrightarrow{A_1B_1}\right)$ ja $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1A_1} - \overrightarrow{B_1C_1}\right)$. Üldisust kitsendamata olgu

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{C_1A_1}\right), \quad \overrightarrow{B_2C_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1C_1} - \overrightarrow{A_1B_1}\right), \quad \overrightarrow{C_2A_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1A_1} - \overrightarrow{B_1C_1}\right).$$

Seega

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{C_1A_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}\right)\right) = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AC}.$$
$$\overrightarrow{B_2C_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1C_1} - \overrightarrow{A_1B_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right)\right) = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{BA}.$$
$$\overrightarrow{C_2A_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1A_1} - \overrightarrow{B_1C_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right)\right) = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{CB},$$

kust näeme, et sarnasustegur on tõepoolest $\frac{3}{4}$.

8. Olgu ringjoonel keskpunktiga O ning raadiusega R antud punktid $A_1, \ldots, A_{2017}$, nii et $\overrightarrow{OA_1} + \cdots + \overrightarrow{OA_{2017}} = \overrightarrow{0}$. Tõesta, et iga punkti X korral

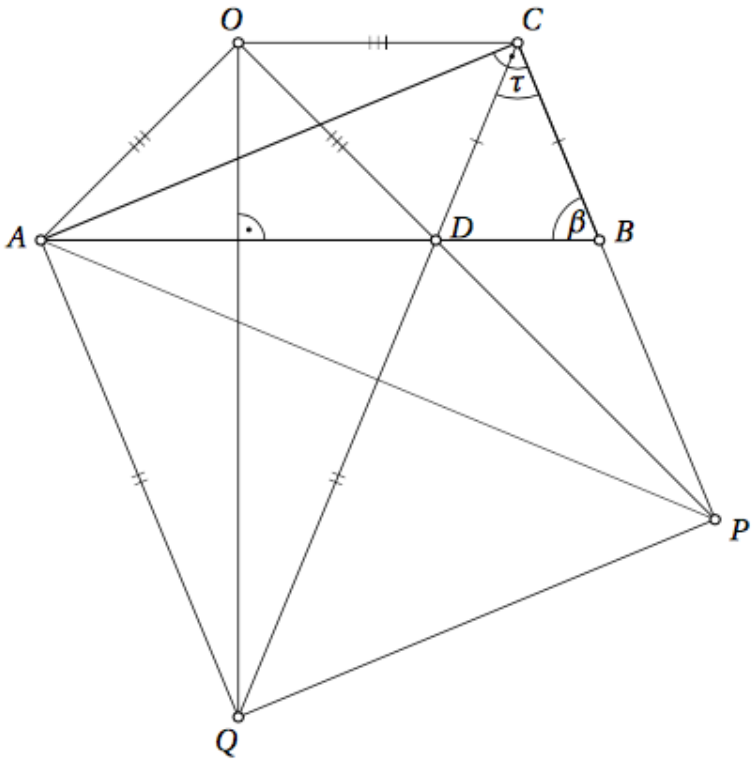
$$XA_1 + \cdots + XA_{2017} \geq 2017 \cdot R.$$

Lahendus. Tähistame $\boldsymbol{a_i} = \overrightarrow{OA_i}$ ja $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$. Siis $\mathbf{a_i} = R$ ja $\overrightarrow{XA_i} = \mathbf{a_i} - \mathbf{x}$. Seega saame, et

$$\sum_{i=1}^{2016} |\overrightarrow{XA_i}| = \sum_{i=1}^{2016} |\mathbf{a_i} - \mathbf{x}| = \sum_{i=1}^{2016} \frac{|\mathbf{a_i} - \mathbf{x}| \cdot |\mathbf{a_i}|}{R} \geq \sum_{i=1}^{2016} \frac{(\mathbf{a_i} - \mathbf{x}, \mathbf{a_i})}{R}$$
$$= \sum_{i=1}^{2016} \frac{(\mathbf{a_i}, \mathbf{a_i})}{R} - \sum_{i=1}^{2016} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{a_i})}{R} = \sum_{i=1}^{2016} \frac{(\mathbf{a_i}, \mathbf{a_i})}{R} - \frac{\left(\mathbf{x}, \sum_{i=1}^{2016} \mathbf{a_i}\right)}{R} = 2016 \cdot R,$$

sest $\sum_{i=1}^{2016} \mathbf{a_i} = \overrightarrow{0}$.

9. Täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusi AB punkt D erineb punktist B ning rahuldab tingimust $|CB| = |CD|$. Olgu O kolmnurga ACD ümberringjoone keskpunkt. Kiired OD ja CB



Joonis 1

lõikuvad punktis P, punktist O küljele AB tõmmatud ristsirge ja kiir CD lõikuvad punktis Q. Punktid A, C, P, Q asuvad ühel ringjoonel. Kas võib kindlalt väita, et $ACPQ$ on ruut?

Lahendus. Vastus: jah.

Kuna OQ on lõigu AD keskristsirge, siis $\angle QAD = \angle ADQ = \angle BDC = \angle CBD$ (vt joonist 1). Seega põiknurkadest AQ ja BC on paralleelsed, mistõttu $\angle QAC = 180° - \angle ACB = 90°$. Kõõlnelinurga vastasnurkade summa on $180°$, seega ka $\angle CPQ = \angle PQA = 90°$ ehk $ACPQ$ on ristkülik.

Kolmnurga ACD ümberringjoone kõõlule CD toetuva kesk- ja piirdenurga vahelisest seosest saame $\angle DOC = 2\angle DAC$. Seega

$$\begin{aligned}\angle DOC &= 2\angle BAC = 2(90° - \angle CBA) = 180° - 2\angle CBA \\ &= \angle 180° - \angle CBD - \angle BDC = \angle DCB,\end{aligned}$$

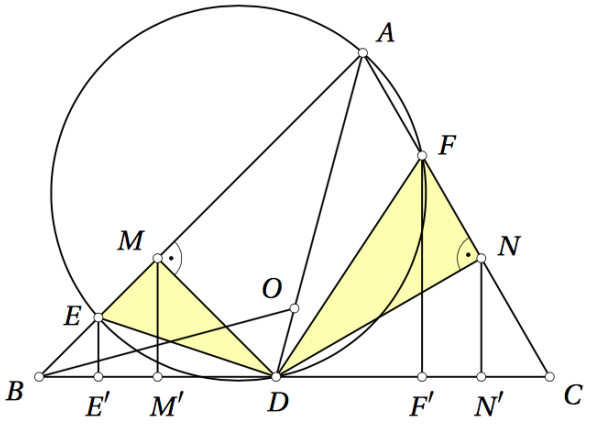
mistõttu võrdhaarsed kolmnurgad BDC ja DCO on sarnased. Järelikult $\angle BDC = \angle DCO$ ehk OC ja AB on paralleelsed, kust $\angle QOC = 90° = \angle QAC$. Seega O asub punktide A, C, P, Q samal ringjoonel. Siit

$$\angle ACQ = \angle AOQ = \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOP\frac{1}{2} = \angle ACP.$$

Seega ristküliku $ACPQ$ diagonaal poolitab ristküliku nurga, mistõttu nelinurk $ACPQ$ on ruut.

10. Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt on O. Sirge AO lõikab külge BC punktis D. Kolmnurga külgedel AB ja AC valitakse vastavalt punktid E ja F nii, et punktid A, E, D, F asuvad ühel ringjoonel. Olgu E' ja F' vastavalt punktidest E ja F küljele BC tõmmatud ristlõikude aluspunktid. Tõesta, et lõigu $E'F'$ pikkus ei sõltu punktide E ja F asendist.

Lahendus. Olgu M ja N punktist D vastavalt külgedele AB ja AC tõmmatud ristlõikude aluspunktid (vt joonist 2) ning M' ja N' vastavalt punktidest M ja N küljele BC tõmmatud



Joonis 2

ristlõikude aluspunktid. Piisab tõestada, et $|E'F'| = |M'N'|$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et punkt E asub lõigul BM ehk $\angle AED < 90°$. Et punktid A, E, D, F asuvad ühel ringjoonel, siis $\angle DFC = \angle AED < 90°$, seega F asub lõigul AN. Järelikult piisab tõestada, et $|E'M'| = |F'N'|$. Siin on $|E'M'| = |EM| \cos \angle B$ ja $|F'N'| = |FN| \cos \angle C$. Seega tuleb näidata, et $|EM| \cos \angle B = |FN| \cos \angle C$ ehk

$$\frac{|EM|}{|FN|} = \frac{\cos \angle C}{\cos \angle B}.$$

Tõestame viimase võrduse. Et $\angle MED = \angle NFD$, siis on täisnurksed kolmnurgad EMD ja NFD sarnased, mistõttu

$$\frac{|EM|}{|FN|} = \frac{|MD|}{|ND|}.$$

Täisnurksest kolmnurgast AMD saame $|MD| = |AD| \sin \angle DAB$, täisnurksest kolmnurgast AND aga $|ND| = |AD| \sin \angle DAC$. Seega

$$\frac{|EM|}{|FN|} = \frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle DAC}.$$

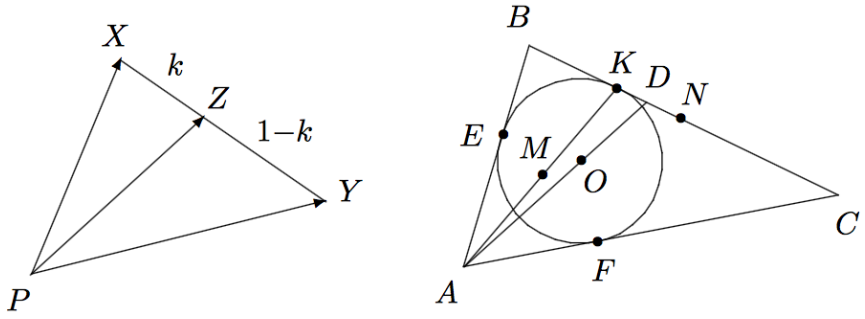
Et O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, siis $\angle AOB = 2\angle C$. Võrdhaarsest kolmnurgast OAB saame nüüd $\angle DAB = 90° - \angle C$ ehk $\sin \angle DAB = \cos \angle C$. Analoogiliselt $\sin \angle DAC = \cos \angle B$. Asetades need tulemused viimasesse jagatisse, jõuamegi vajaliku võrduseni.

11. Kolmnurga ABC siseringjoon keskpunktiga O puutub kolmnurga külge BC punktis K. Olgu N ja M vastavalt lõikude BC ja AK keskpunktid. Tõesta, et punktid M, O ja N paiknevad ühel sirgel.

Lahendus. Olgu Z suvaline punkt lõigul XY, kusjuures $|XZ| = k \cdot |XY|$ ja $|YZ| = (1-k) \cdot |XY|$. Siis mistahes punkti P korral kehtib võrdus $\overrightarrow{PZ} = (1-k) \cdot \overrightarrow{PX} + k \cdot \overrightarrow{PY}$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PZ} &= \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{PX} + k \cdot \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PX} + k \cdot (\overrightarrow{PY} - \overrightarrow{PX}) \\ &= (1-k) \cdot \overrightarrow{PX} + k \cdot \overrightarrow{PY} \end{aligned}$$

(vt vasakpoolset joonist 3). Avaldame seda seost kasutades vektorid $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AM}$ ja $\overrightarrow{AO}$ vektorite $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ kaudu. Olgu $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ ja $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Et $|BN| = |CN| = \dfrac{1}{2}|BC|$, siis $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Joonis 3

Olgu E ja F vastavalt kolmnurga ABC siseringjoone puutepunktid külgedega AB ja AC (vt parempoolset joonist 3), siis

$$\begin{aligned}|BK| = |BE| = c - |AE| = c - |AF| = c - b + |CF| \\ = c - b + |CK| = c - b + a - |BK|,\end{aligned}$$

kust $|BK| = \dfrac{a-b+c}{2} = p - b$. Analoogiliselt saame $|CK| = p - c$. Seega $\overrightarrow{AK} = \dfrac{p-c}{a} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{p-b}{a} \cdot \overrightarrow{AC}$ ning $\overrightarrow{AM} = \dfrac{p-c}{2a} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{p-b}{2a} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Olgu D tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikepunkt küljega BC, siis kehtib võrdus $\dfrac{|BD|}{c} = \dfrac{|CD|}{b}$. Seega $\overrightarrow{AD} = \dfrac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC}$ ning $\overrightarrow{AO} = bx \cdot \overrightarrow{AB} + cx \cdot \overrightarrow{AC}$, kus x on mingi reaalarvuline kordaja. Analoogiliselt $\overrightarrow{CO} = ay \cdot \overrightarrow{CA} + by \cdot \overrightarrow{CB}$ mingi reaalarvu y korral ning arvestades seoseid $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ saame

$$bx \cdot \overrightarrow{AB} + cx \cdot \overrightarrow{AC} = by \cdot \overrightarrow{AB} + (1 - ay - by) \cdot \overrightarrow{AC},$$

ehk $(bx-by)\cdot\overrightarrow{AB}+(ay+by+cx-1)\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$. Et vektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ ei ole kollineaarsed ning $b \neq 0$, siis $y = x$ ja $(a+b+c)x = 1$, kust $x = 2p$. Niisiis saame lõpptulemusena $\overrightarrow{AO} = \dfrac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Nüüd piisab kontrollida, et vektorid $\overrightarrow{MO}$ ja $\overrightarrow{ON}$ on kollineaarsed. Tõepoolest,

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AM} = \left(\frac{b}{2p} - \frac{p-c}{2a}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{2p} - \frac{p-b}{2a}\right) \cdot \overrightarrow{AC}$$

ning

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AO} = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2p}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2p}\right) \cdot \overrightarrow{AC}$$

Kordajaid teisendades saame

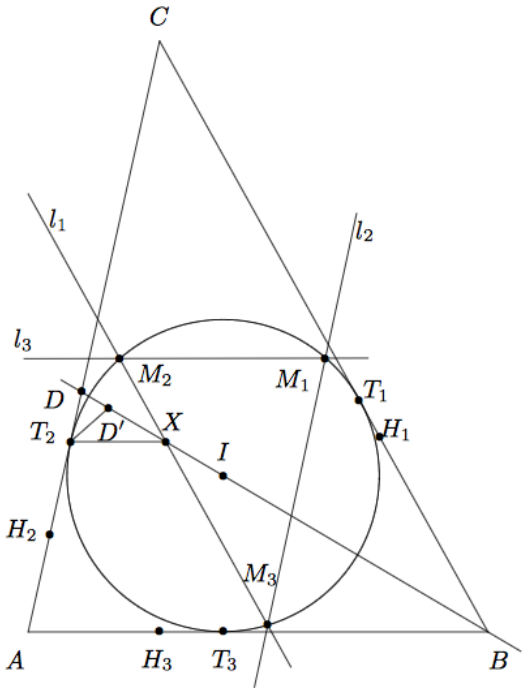
$$\begin{aligned}\frac{b}{2p} - \frac{p-c}{2a} &= \frac{ab - p(p-c)}{2ap} = \frac{4ab + (c + (a+b))(c - (a+b))}{8ap} \\ &= \frac{c^2 - (a+b)^2 + 4ab}{8ap} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{8ap} \\ &= \frac{(c+a-b)(c+b-a)}{8ap} = \frac{(p-b)(p-a)}{2ap}\end{aligned}$$

ja analoogiliselt $\dfrac{c}{2p} - \dfrac{p-b}{2a} = \dfrac{(p-c)(p-a)}{2ap}$ ning $\dfrac{1}{2} - \dfrac{b}{2p} = \dfrac{p-b}{2p}$ ja $\dfrac{1}{2} - \dfrac{c}{2p} = \dfrac{p-c}{2p}$. Seega $\overrightarrow{MO} = \dfrac{p-a}{p} \cdot \overrightarrow{ON}$.

12. Olgu AH_1, BH_2 ja CH_3 kolmnurga ABC kõrgused. Kolmnurga ABC siseringjoon puutub külgi BC, CA, AB vastavalt punktides T_1, T_2 ja T_3. Olgu l_1, l_2, l_3 sirged, mis saadakse sirgete H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 peegeldamisel vastavalt sirgete T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 suhtes. Tõesta, et sirged l_1, l_2, l_3 moodustavad kolmnurga, mille tipud paiknevad kolmnurga ABC siseringjoonel.

Lahendus. Olgu I kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt (vt joonist 4). Lõikugu sirge, mis on paralleelne sirgega AB ja läbib punkti T_2, sirgega BI punktis X. Näitame, et punkt X on punkti H_2 peegeldus sirge T_2T_3 suhtes.

Lõikugu sirge AC sirgega BI punktis D. Nüüd $BH_2 \perp H_2D$ ja $IT_2 \perp T_2D$, millest järeldub, et



Joonis 4

kolmnurgad BH_2D ja IT_2D on sarnased. See tähendab, et $\dfrac{|H_2T_2|}{|T_2D|} = \dfrac{|BI|}{|ID|}$. Ent IC on kolmnurga BCD nurgapoolitaja, seega $\dfrac{|BI|}{|ID|} = \dfrac{|BC|}{|DC|}$.

Olgu punkt D' võetud sirgel BI, nii et $|T_2D| = |T_2D'|$ (punkt D' erineb punktist D, välja arvatud juhul, kui sirge T_2D on risti sirgega BI). Siis $\angle T_2D'X = \angle CDB$. Samuti, kuna sirge T_2X on paralleelne sirgega BA, peab olema $\angle T_2XD' = \angle CBD$. Siit järeldub, et kolmnurgad T_2XD' ja CBD on sarnased, mis tähendab, et $\dfrac{|BC|}{|DC|} = \dfrac{|XT_2|}{|D'T_2|} = \dfrac{|XT_2|}{|DT_2|}$, sest $|D'T_2| = |DT_2|$.

Oleme seega näidanud, et $\dfrac{|H_2T_2|}{|T_2D|} = \dfrac{|XT_2|}{|XT_2|}$, millest järeldub võrdus $|H_2T_2| = |XT_2|$. Sirge T_2X on paralleelne sirgega BA, millest saame, et $\angle BAC = \angle AT_2X = \angle T_2XH_2 + \angle T_2H_2X = 2\angle T_2XH_2$ ja seega kolmnurk T_2H_2X on võrdhaarne. Seetõttu $\angle T_2XH_2 = \dfrac{\angle BAC}{2} = \angle BAI$. Sirged T_2X ja BA on paralleelsed, seega on paralleelsed ka sirged H_2X ja IA. Aga sirge IA on risti sirgega T_2T_3, millest järeldub, et ka sirge H_2X on risti sirgega T_2T_3 ning punkt X on punkti H_2 peegeldus sirge T_2T_3 suhtes.

Nüüd $\angle H_3H_2A = \angle ABC$, sest $\dfrac{\pi}{2} - \angle H_3H_2B = \dfrac{\pi}{2} - \angle H_3CB$ (BCH_2H_3 on kõõlnelinurk, kusjuures BC on tema ümberringjoone diameeter), $\pi - \angle H_3CB = \angle ABC$. Seega sirge H_2H_3 peegeldus sirge

T_2T_3 suhtes on sirge, mis läbib punkti X ja moodustab sirgega T_2X nurga ABC, ehk teisisõnu, tegemist on sirgega BC paralleelse ja punkti X läbiva sirgega.

Olgu nüüd punktid M_1, M_2, M_3 vastavalt punktide T_1, T_2, T_3 peegeldused sirgete AI, BI, CI suhtes. Siis peab olema

$$\angle M_2XT_2 = 2\angle IXT_2 = 2\angle ABI = ABC,$$

kuna sirge AB on paralleelne sirgega T_2X. Ent $\angle ABC$ on sirgete T_2X ja BC vaheline nurk. Siit järeldub, et sirge M_2X on paralleelne sirgega BC, ehk teisisõnu, M_2 asetseb sirge H_2H_3 peegeldusel sirge T_2T_3 suhtes.

Analoogiliselt saame, et M_3 asetseb sellelsamal peegeldusel. Samuti leiame, et sirge M_1M_3 on sirge H_1H_3 peegelduseks sirge T_1T_3 suhtes ja sirge M_1M_2 on sirge H_1H_2 peegelduseks sirge T_1T_2 suhtes. Niisiis on neist kolmest peegeldusest moodustunud kolmnurk täpselt $M_1M_2M_3$.