Kodune treeningvõistlus IMO 2017 kandidaatidele (ehk kodune komplekt vol 8) lahendused

30. juunil 2017

1. Olgu $x_1, \ldots, x_n$ ja $y_1, \ldots, y_n$ reaalarvud. Olgu $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ maatriks, mille elemendid on

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } x_i + y_j \ge 0; \\ 0, & \text{kui } x_i + y_j < 0. \end{cases}$$

Olgu B $n \times n$ maatriks, mille elemendid on nullid ja ühed, nii, et maatriksi iga rea ja iga veeru summad on võrdsed vastavatele summadele maatriksis A. Tõesta, et $A = B$.

Lahendus. Olgu $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ ja defineerime $S = \sum_{1 \le i,j \le n} (x_i + y_i)(a_{ij} - b_{ij})$. Siis

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \right) + \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} - \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \right) = 0.$$

Kui $x_i + y_j \ge 0$, siis $a_{ij} = 1$ ning seega $a_{ij} - b_{ij} \ge 0$. Kui aga $x_i + y_i < 0$, siis $a_{ij} = 0$ ning seega $a_{ij} - b_{ij} \le 0$. Järelikult $(x_i + y_i)(a_{ij} - b_{ij}) \ge 0$ iga i ja j korral, mis eelneva ($S = 0$) põhjal tähendab, et $(x_i + y_i)(a_{ij} - b_{ij}) = 0$ peab kehtima iga i ja j korral. Kui $a_{ij} = 0$, siis A definitsiooni kohaselt $x_i + y_i < 0$ ning seega $a_{ij} - b_{ij} = 0$, mis annab $b_{ij} = 0$. Järelikult $a_{ij} \ge b_{ij}$ iga i ja j korral. Samas, kuna maatriksi A iga rea summa on võrdne maatriksi B vastava rea summaga, siis $a_{ij} = b_{ij}$ ehk $A = B$.

2. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, mille tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge BC punktis L ja ümberringjoont punktis N. Olgu vastavalt sirgetel AB ja AC valitud punktid K ja M, nii et AB ja LK on risti ning AC ja LM on risti. Tõesta, et nelinurga $AKNM$ pindala on sama suur kui kolmnurga ABC pindala.

Lahendus. Paneme tähele, et kolmnurgad AKL and AML on kongruentsed (ühine külg ja samad nurgad). Seega KM ja AN on risti ning järelikult $S_{AKNM} = \frac{|KM| \cdot |AN|}{2}$. Kuna $AKLM$ on kõõlnelinurk (tal on kaks vastastikku asuvat täisnurka), siis $\angle AKM = \angle ALM$ ja seega $\frac{KM}{\sin \angle BAC} = \frac{AM}{\sin \angle AKM} = \frac{|AM|}{\sin \angle ALM} = |AL|$. Nüüd, kuna kolmnurgad ABL ja ANC on sarnased, siis $|AB| \cdot |AC| = |AN| \cdot |AL|$. Hence $S_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \sin \angle BAC = \frac{1}{2}|AN| \cdot |AL| \sin \angle BAC = \frac{1}{2}|AN| \cdot |KM| = S_{AKNM}$.

3. Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reaalarvud, mille korral

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Tõesta, et iga täisarvu $k \geq 2$ korral leiduvad täisarvud $a_1, a_2, \ldots, a_n$, mille korral $|a_i| < k$ ja mis pole kõik võrdsed nulliga ning kehtib võrratus

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

Lahendus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $x_i \geq 0$ iga $i = 1, \ldots, n$ korral (vastasel korral võiksime lahendada ülesande kõigepealt arvude $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$ jaoks ja siis muuta vastavate a_i-de märke). Cauchy võrratuse põhjal $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, mis annab $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{n}$.

Vaatleme summa $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$, $b_i = 0, 1, \ldots, k-1$, kõiki võimalikke väärtusi. Neid väärtusi on kokku k^n tükki ja kõik need väärtused asuvad lõigus $[0, (k-1)\sqrt{n}]$. Jagades lõigu $[0, (k-1)\sqrt{n}]$ $(k^n - 1)$-ks võrdseks osalõiguks, siis saame, et Dirichlet' printsiibi põhjal leidub kaks erinevat summat, mis asuvad samas alamlõigus ja seega nende vahe absoluutväärtus on ülimalt $\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$. Vastavate kordajate vahed võtame väärtusteks a_i.