TÜ TEADUSKOOL

JAGUVUS

Ettevalmistus matemaatikaolümpiaadiks I

Koostanud Raili Vilt

Täisarvud on ...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
Täisarvude hulka tähistatakse tähega Z.
Kirjutis $k \in Z$ tähendab, et k on mistahes täisarv.

Hoolimata sellest, et täisarvud on ainult üks osake kõikidest arvudest on täisarvudel palju huvitavaid omadusi. Matemaatika haru, mis uurib täisarvude omadusi nimetatakse **arvuteooriaks.**

Arvuteooria teemad: jagumine, jaguvustunnused, alg- ja kordarvud, arvude suurim ühistegur ja vähimühiskordne, jäägiga jagamine, arvu kümnendesitus ja arvu kümnendesituse viimased numbrid.

Käesolevas õppematerjalis vaatleme neist vaid kahte esimest – jaguvust ja jaguvustunnuseid.
Jaguvuse omadused ja tähtsamad jaguvusetunnused peaks teile juba tuttavad olema, aga siin on lisaks toodud, kuidas need omadused leitud on ja miks kehtivad.

ARVU KÜMNENDESITUS

On selge, et täisarvu saab kirjutada liidetavate summana vägagi erinevalt.
Näiteks:
$245 = 231 + 14 = 100 + 90 + 5 \cdot 11 = 5 + 30 + 10 + 2 \cdot 100 = 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$
Neist viimane on arvu 245 esitus järkarvude kordsete summana ehk arvu kümnendesitus.

Olgu meil antud viiekohaline arv k, mille esimene number on a, teine b, kolmas c, neljas d ja viies e. Sellist arvu saab kirjutada kujul $\overline{abcde}$.
Arvu k kümnendesitus $k = a \cdot 10000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e =$
$= a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e.$

(Olgu meil antud arv a, mille viimane number on a_0, eelviimane a_1, . . . , teine number on a_{n-1} ning esimene number on a_n.
Siis $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$.)

Igal arvul on vaid üks kümnendesitus.

JAGUVUS

Näide 1. Leia täisarvu c, d, m ja n nii et

1) $6 = 2 \cdot m$ 2) $-48 = 2 \cdot n$ 3) $35 = 3 \cdot c$ 4) $26 = 5 \cdot d$

Lahendus: m = 3, n = – 24, arve c ja d ei ole võimalik leida.

Selgus, et alati ei ole võimalik leida sellist täisarvu k, et täisarvude a ja b korral kehtiks võrdus $a = b \cdot k$.

*** Täisarv c jagub täisarvuga a, kui leidub täisarv k, nii et $c = a \cdot k$**

Jaguvuse tähistamiseks on kasutusele võetud järgnevad tähistused

1) $c \vdots a$ loe: arv c jagub arvuga a

2) $a \mid c$ loe: arv a on arvu c jagaja

Kui arv c ei jagu arvuga a, kirjutame $c \not\vdots a$ või siis, et arv a ei ole arvu c jagaja $a \nmid c$.

Näiteks: Arv $10 = 2 \cdot 5$. Seega $10 \vdots 2$ ehk $2 \mid 10$ ning $10 \vdots 5$ ehk $5 \mid 10$. Arv 10 aga ei jagu arvuga 3. Kirjutame $10 \not\vdots 3$ ehk $3 \nmid 10$.

***** Kirjutis $b \mid a$ ei tähenda mingit tehet arvude a ja b vahel, vaid see on väide, mis käib nende arvude kohta.

Kui a : b = c, kus a, b ja c on täisarvud, siis kõik järgmised tõesed väited on samaväärsed

1) a jagub arvuga b
2) a on b kordne
3) b on a jagaja
4) b on a tegur

Kui $a = b \cdot c$, st. arv b jagab arvu a ($b \mid a$)
siis kehtivad ka järgmised võrdused ja järeldused
$-a = b \cdot (-c)$, millest saame, et arv b jagab arvu a vastandarvu ($b \mid (-a)$)
$-a = (-b) \cdot c$, millest saame, et arvu b vastandarv jagab arvu a vastandarvu ($-b \mid (-a)$)
$a = (-b) \cdot (-c)$, millest saame, et arvu b vastandarv jagab arvu a ($-b \mid a$) .

Kõik need neli tulemust saame kokku võtta, et kui $b \mid a$, siis $(\pm b) \mid (\pm a)$.

See võimaldab jaguvusteoorias piirduda mittenegatiivsete täisarvudega.
Seega kui ülesandeks on leida arvu a tegurid, piirdutakse reeglina positiivsete teguritega, sest teades positiivseid tegureid, teame ka negatiivseid. (Juhul kui on vaja vaadelda ka negatiivseid, tehakse tavaliselt vastav märge ülesande teksti.)

***** Edaspidi (selles õppematerjalis) kui räägime arvudest, teguritest, jagajatest mõtleme selle all mittenegatiivseid täisarve.

JAGUVUSE OMADUSED

Näide 2. Põhjenda, et mistahes arv jagub iseendaga, ehk $a \mid a$.
Lahendus: Jaguvuse definitsiooni kohaselt on põhjenduseks vaja leida selline täisarv c, et $a = c \cdot a$. Võrdus kehtib kui $c = 1$. Sobiv täisarv on leitud ja seega tõesti iga täisarvu a korral kehtib $a \mid a$.

Näide 3. Põhjenda jaguvuse definitsiooni kasutades, et iga täisarvu a korral on tõesed järgmised väited

a) mistahes arv jagub arvuga 1, või siis arv 1 jagab mistahes arvu, ehk $1 \mid a$, ehk $a \vdots 1$

b) null jagub mistahes arvuga, või siis mistahes arv jagab arvu null, ehk $a \mid 0$, ehk $0 \vdots 1$

Lahendus: a) Jaguvuse definitsiooni kohaselt tuleb leida selline täisarv c , et $1 \cdot c = a$. Kui $c = a$, võrdus kehtib ja seega tõesti iga täisarvu a korral kehtib $1 \mid a$.

b) Definitsioonist lähtuvalt tuleb leida selline täisarv c, et $a \cdot c = 0$. Võrdus kehtib kui $c=0$. Sobiv täisarv on leitud ja seega tõesti iga täisarvu a korral $a \mid 0$, sest $a \cdot 0 = 0$.

Näide 4. On kaks kotti õuntega. Kummaski kotis olevaid õunu saab võrdselt jagada 3 lapse vahel st. mõlemas kotis olevate õunte arv on 3-kordne. Kui kõik õunad kahest kotist panna ühte suurde kotti, kas siis saab kõik õunad võrdselt jagada 3 lapse vahel?
Lahendus: Olgu esimeses kotis a õuna, teises b õuna, siis arv 3 jagab nii arvu a kui ka b, ehk $3 \mid a$ ja $3 \mid b$. Küsitud on, kas 3 jagab arvu a+b. Kui esmalt võtta suurest kotist õunad, mis algul olid esimeses, siis neid on võimalik eelduse kohaselt laste vahel jagada. Suurde kotti jäävad nüüd ainult need õunad, mis olid algul teises kotis. Teame, et ka neid on võimalik jagada kolme lapse vahel. Seega 3 jagab arvu a+b, ehk $3 \mid (a+b)$.

Näites 4 selgus, et kehtib omadus: kui arv 3 jagab nii arvu a kui ka arvu b, siis arv 3 jagab ka nende arvude summat a+b. Ehk teisti öelduna, kui kaks arvu a ja b jaguvad mõlemad arvuga 3, siis ka nende summa jagub arvuga 3.
Omaduse saame kirja panna:
kui $3 \mid a$ ja $3 \mid b$, siis $3 \mid (a+b)$ või siis kui $a \vdots 3$ ja $b \vdots 3$, siis $(a+b) \vdots 3$.

Kas alati kehtib, et kui üks arv jagab mõlemat liidetavat, siis jagab see arv ka nende kahe arvu summat, ehk kas kehtib, et kui $d \mid a$ ja $d \mid b$, siis $d \mid (a+b)$?
Sama asi teisti sõnastatuna: kui kaks arvu jaguvad mõlemad sama arvuga, siis kas ka nende summa jagub selle arvuga, ehk kas kehtib kui $a \vdots d$ ja $b \vdots d$, siis $(a+b) \vdots d$.

Jaguvuse definitsioonist tulenevalt peab leiduma selline täisarv k, et $(a+b) = d \cdot k$.
Teame, et $d \mid a$ ja $d \mid b$ ning seega $a = m \cdot d$ ning $b = n \cdot d$, kus $m \in Z$ ja $n \in Z$.
Vaatame nüüd millega võrdub a+b.

$a+b = md + nd = (m+n)d$,

$a+b = (m+n)d$

Kahe täisarvu summa on täisarv, seega $(m+n) \in Z$. Tähistades $m + n = k$, oleme saanud definitsioonis nõutava esituse $(a + b) = k \cdot d$.
Järelikult kehtib alati, et kui $d \mid a$ ja $d \mid b$, siis $d \mid (a+b)$.

Küsimus. On jällegi kaks kotti õuntega, kusjuures esimeses kotis olevaid õunu ei saa jagada d lapse vahel, teises kotis olevaid aga saab. Kui kõik õunad kahest kotist panna ühte suurde kotti, kas siis on võimalik suures kotis olevaid õunu d lapse vahel võrdselt jagada?

Näide 5. Olgu ühes kotis a õuna ja teises b õuna, kusjuures $d \nmid a$ ja $d \nmid b$. Kas siis on õige, et $d \nmid (a+b)$?
(Kummaski kotis olevate õunte arv ei jagu arvuga d, aga kas mõlemas kottis olevate õunte koguarv jagub arvuga d?)

Lahendus: On lihtne leida näiteid arvudega, mille korral see ei kehti.
Näiteks ühes kottis on 7 ja teises 5 õuna. Kummaski kotis olevate õunte arv ei jagu 3-ga.
Kahes kotis on kokku 5 + 7= 12 õuna ja see jagub arvuga 3.
Siit tekib uus küsimus, et kas kehtib siis, et kui $d \nmid a$ ja $d \nmid b$, siis $d \mid (a+b)$?.
Jällegi on lihtne leida näidet arvudega, mille korral see ei kehti.
Näiteks 3 ei jaga arve 7 ja 4 ning arv 3 ei jaga ka nende summat 11.

Järelikult kui etteantud arv d, ei jaga kumbagi liidetavat a ja b, siis ei saa otsustada, kas arv d jagab arvude a ja b summat.

Eelnevatega analoogilised omadused kehtivad ka siis kui arve, mille jaguvuse kohta teame, on rohkem kui kaks.
Kui iga liidetav jagub etteantud arvuga, siis ka nende summa jagub selle etteantud arvuga.
Kui täpselt üks liidetavatest ei jagu etteantud arvuga, siis ka summa ei jagu etteantud arvuga.
Kui liidetavaid, mis ei jagu etteantud arvuga, on rohkem kui üks, ei saa ilma täiendava uurimiseta otsustada, kas summa jagub etteantud arvuga või ei. Täiendavalt uuritakse jääke, mis tekivad liidetavate jagamisel etteantud arvuga.

JAGUVUSE OMADUSED

1) $a \mid a$

Mistahes arv jagub iseendaga.

2) $1 \mid a$

Mistahes arv jagub arvuga 1.

3) $a \mid 0$

Null jagub mistahes arvuga.

4) kui $a \mid b$ ja $a \mid c$, siis $a \mid (b + c)$ ja $a \mid (b - c)$

Kui kaks arvu jaguvad mõlemad etteantud arvuga, siis ka nende summa ja vahe jaguvad selle etteantud arvuga.

5) kui $d \mid (a+b)$ ja $d \mid a$, siis $d \mid b$

Kui summa ja üks liidetavatest jaguvad etteantud arvuga, siis ka teine liidetav jagub selle etteantud arvuga

6) kui $d \mid a$ ja $d \nmid b$, siis $d \nmid (a+b)$ ja $d \nmid (a–b)$

Kui üks liidetav jagub etteantud arvuga ja teine ei jagu, siis nende kahe arvu summa ja vahe ei jagu selle etteantud arvuga.

7) kui $a \mid b$, siis $a \mid kb$, kus $k \in Z$

Kui arv jagub etteantud arvuga, siis ka kõik arvu kordsed jaguvad selle etteantud arvuga.

8) kui $a \mid b$ ja $b \mid c$, siis $a \mid c$

Kui arv b jagub arvuga a ja arv c jagub arvuga b, siis arv c jagub arvuga a.

9) kui $a \mid c$ ja $b \mid d$, siis $ab \mid cd$

Kui arv c jagub arvuga a ja arv d jagub arvuga b, siis korrutis dc jagub korrutisega ab.

10) kui a, b on naturaalarvud ja kehtib $a \mid b$ ja $b \mid a$, siis $a = b$

Kui üks arv jagub teisega ja teine arv jagub esimesega, siis need arvud peavad olema võrdsed.

11) kui $b \mid a$ ja $b=c \cdot d$, siis $c \mid a$ ja $d \mid a$.

Kui arv jagub etteantud arvuga, siis see arv jagub ka etteantud arvu kõigi teguritega.

12) kui $a \mid c$ ja $b \mid c$, $a \cdot b \leq c$ ning arvude a ja b ühistest teguritest suurim on 1, siis $ab \mid c$

Kui arv jagub kahe etteantud ühistegurita arvuga, siis arv jagub ka etteantud arvude korrutisega.

13) kui $d \mid a$ ja $b \mid d$, siis $\frac{d}{b} \mid \frac{a}{b}$.

Kui arv a jagub arvuga d ja arv d jagub arvuga b, siis jagatis a : b jagub jagatisega d : b.

14) Kui meil on antud n järjestikust arvu, siis täpselt üks neist jagub alati arvuga n.
Näiteks kahest järjestikusest arvust üks jagub alati arvuga 2, kolmest järjestikusest arvust üks jagub arvuga 3 jne.
Kahest järjestikkusest paarisarvust jagub üks neist alati arvuga 4.

15) Kui võrduse üks pool jagub arvuga n, siis peab arvuga n jaguma ka võrduse teine pool.

JAGUVUSTUNNUSED

Mitmesuguste ülesannete lahendamisel on sageli vaja otsustada, kas mingi arv või avaldis jagub antud arvuga või mitte. Arvude korral saab muidugi alati teostada jagamise ja vaadata, kas jagatis on täisarv. Tihti saab aga lahendamist hõlbustada kasutades arvude omadusi, mida tuntakse arvude jaguvustunnuste nime all.
Enamus neist tunnustest peaks juba tuttavad olema, aga vaatame ka kuidas need tunnused tuletatud on.

Kas 1734 jagub arvuga 17 ?
1734 : 17 = 102. Kuna jagatis on täisarv, siis järelikult $17 \mid 1734$.
Proovime nüüd vastuseni jõuda ilma jagatist leidmata, kasutades eelnevalt leitud jaguvuse omadusi.
Teame, et kui $17 \mid a$ ja $17 \mid b$, siis $17 \mid (a+b)$ ja et alati $17 \mid 17k$, kus $k \in Z$.
$1734 = 1700 + 34$. Kuna $17 \mid 1700$ ja $17 \mid 34$, siis järelikult $17 \mid 1734$.
Kas arvu 1734 on võimalik esitada summana, nii et üks liidetav jaguks arvuga 17 teine ei?
Kas arvu 1734 on võimalik esitada summana, nii et kumbki liidetavatest ei jaguks arvuga 17?

Kas 1718 jagub arvuga 17 ?
Kuna $1718 = 1700 + 18$ ja $17 \mid 1700$, aga $17 \nmid 18$, siis järelikult $17 \nmid 1718$.
Kas arvu 1718 on võimalik esitada summana, nii et mõlemad liidetavad jaguks arvuga 17 ?
Kas arvu 1718 on võimalik esitada summana, nii et kumbki liidetavatest ei jaguks arvuga 17 ?

Siinkohal meeldetuletuseks jaguvuse omadused, mida järgnevalt kasutame.
Kui $n = a + b$ ja $d \mid a$, $d \mid b$, siis $d \mid n$.
(Kui kõik liidetavad jaguvad arvuga d, siis ka summa jagub arvuga n)
Kui $n = a + b$ ja $d \nmid a$, $d \mid b$, siis $d \nmid n$.
(Kui täpselt üks liidetavatest ei jagu arvuga d, siis ka summa ei jagu arvuga d)
Kui $n = a + b$ ja $d \nmid a$ ja $d \nmid b$, siis ei saa väita, et $d \nmid n$ või $d \mid n$.
(Kui ükski liidetav ei jagu arvuga d, siis ei saa öelda, kas summa jagub arvuga d või mitte)
Kui $a \mid b$, siis $a \mid kb$, kus $k \in Z$, millest järeldub, et kui $a \mid b$, siis $a \mid b^m$, kus $m \in N$.
(Kui arv a jagab arvu b, siis arv a jagab ka arvu b kordseid ja arvu b astmeid.)

Määramaks kas antud täisarv n jagub arvuga d või mitte on kasulik arv n kirjutada summana, mille liidetavate jaguvusest saab järeldada, kas summa jagub või ei. Arvu 4199 korral ei ole aga nii lihtne määrata, millisteks liidetavateks tuleks summa jaotada, et kontrollida jaguvust 17-ga.
Jaguvustunnuste rakendamine peab võimaldama ükskõik millise või siis võimalikult paljude arvude korral otsustada, kas see jagub etteantud arvuga või ei. Kuna iga täisarvu on võimalik esitada erinevate liidetavate summana, siis arvu jaguvustunnuste otsimisel lähtutakse üldjuhul arvu kümnendesitusest.
($\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$.)

Vaatleme jaguvust arvuga 2.
Olgu meil vaja kindlaks teha, kas arv 358 jagub arvuga 2. Arvu 358 esitame kujul $3\cdot100 + 5\cdot10 + 8$.
Kuna $2 \mid 10$, siis 2 jagab ka arve 10^2, 10^3, 10^4, . . . ja nende kordseid.
Seega $2 \mid (3\cdot10^2)$ ja $2 \mid (5\cdot10)$. Teame ka, et $2 \mid 8$. Järelikult $2 \mid 358$.
Olgu meil antud neljakohaline arv $n = a\cdot1000 + b\cdot100 + c\cdot10 + d$ ja meil on vaja kindlaks teha, kas $2 \mid n$. Eelneva arutelu põhjal teame, $2 \mid (a\cdot1000 + b\cdot100 + c\cdot10)$. Seega kui $2 \mid d$, siis $2 \mid n$. Väide $2 \mid d$ on tõene, kui d, mis on arvu n üheliste number, on kas 2, 4, 6, 8 või 0.
(Arve, mille üheliste number on kas 2, 4, 6, 8 või 0 nimetatakse paarisarvudeks.)

*** Arv jagub 2-ga parajasti siis, kui ta on paarisarv.**

Et arvud 5 ja 10 jagavad ka arve 10^m, kus $m \geq 1$, siis on ka nende korral oluline just etteantud arvu üheliste number. Et arv jaguks 5-ga peab arvu üheliste number jaguma arvuga 5, st. üheliste number peab olema kas 0 või 5. Et arv jaguks 10-ga peab üheliste number jaguma arvuga 10, st. üheliste number saab olla ainult 0.

*** Arv jagub 5-ga parajasti siis, kui arvu viimane number on 5 või 0.**
*** Arv jagub 10-ga parajasti siis, kui arvu viimane number on 0.**

Et arvul 10 on ainult kolm arvust 1 erinevat tegurit (2, 5, ja 10), siis rohkem jaguvustunnuseid, kus piisab üheliste numbri jaguvuse vaatamisest ei ole.

Vaatleme suuruselt järgmist arvu 10 astet, s.o.10^2.
Et $10^2 = 100 = 4\cdot25$, siis arvud 10^m $(m\geq2)$ jaguvad kõik arvudega 4 ja 25. Seega vaadeldes neljakohalist arvu $n = a\cdot1000 + b\cdot100 + c\cdot10 + d$, teame, et $4 \mid (a\cdot1000 + b\cdot100)$. Seega kui $4 \mid (c\cdot10+d)$, siis $4 \mid n$. Arv c on arvu n kümneliste ja d üheliste arv, summa
$c\cdot10 + d$ on arvu n kahest viimasest numbrist moodustuv arv.

*** Arv jagub 4-ga parajasti siis, kui arvu kahest viimasest numbrist moodustuv arv jagub arvuga 4.**

Analoogiliselt saame, et kui arvu kahest viimasest numbrist moodustuv arv jagub arvuga 25, siis ka antud arv jagub arvuga 25.
Arvu 100 ühest erinevad tegurid on 2, 4, 5, 10, 25 ja 100. On selge, et arv jagub arvuga 100 parajasti siis, kui tema kaks viimast numbrit on nullid. Et arvudega 2, 5 ja 10 jaguvuseks on meil juba lihtsamad tunnused olemas, siis tunnuseid, kus piisab arvu kahest viimasest numbrist moodustuva arvu jaguvuse vaatamisest, rohkem ei ole.

Näide 6. Kas arv 45676 jagub arvuga 4 ?
Lahendus: Kasutades jaguvustunnust, peame vaatluse alla võtma arvu, mis moodustub arvu kahest viimasest numbrist s.o. 76.
Teame, et $4 \mid 76$, sest $76 = 4\cdot19$. Seega arv 45676 jagub arvuga 4.

Arvu $10^3 = 1000$ tegurid on 1, 2, 4, 5, 8, 10, 25, 125, 20, 40, 80 ja 1000
Vaatame neist teguritest vähimat, mille jaoks meil veel jaguvustunnust ei ole, st. arvu 8.
On selge, et $8 \mid 10^m$, kui $m\geq3$.

Seega viiekohalise arvu n = a·10000 + b·1000 + c·100 + d·10 + e korral teame, et $8 \mid (a \cdot 10000 + b \cdot 1000)$ ja arvu n jaguvus arvuga 8 sõltub summa (c·100+d·10+e) jaguvusest ehk arv jagub arvuga 8 parajasti siis, kui arvu kolmest viimasest numbrist moodustuv arv jagub arvuga 8.

*** Arv jagub 8-ga parajasti siis, kui arvu kolmest viimasest numbrist moodustuv arv jagub arvuga 8.**

Samasugused jaguvustunnused saaksime sõnastada ka arvude 125, 20, 40, 80, 1000 jaoks ja on ka selge, et arve, millega jaguvuse määramiseks piisaks kolmest viimasest numbrist moodustuvast arvust, rohkem ei ole.

Siinkohal tekib küsimus, kuidas kolmekohalise arvu jaguvust arvuga 8 kindlaks teha, sest ega kolmekohalise arvu jagumine arvuga 8 ei ole ka koheselt näha ja tihti tuleb ikkagi teostada jagamine.
Kolmekohaline arv jagub arvuga 8 parajasti siis, kui arvu sajaliste ja kümneliste arvust moodustuv kahekohaline arv, millele on liidetud pool arvu üheliste arvust jagub arvuga 8.
Näide: Kas 8 jagab arvu 592 ? Lahendus: 59+1 = 60. Kuna $4 \mid 60$, siis $8 \mid 592$.

Selgus, et tunnused, mis tekivad arvu 10 astmete uurimisel ja kus tuleb vaadelda juba kolmekohalisi arve ei ole meile just suureks abiks. Lõpetame siinkohal arvude jaoks, mis jagavad arve $10^m (m \geq 4)$, tunnuste otsimise ning hakkame otsima jaguvustunnust arvule 3.

On selge, et arvu 10 astmeid, mis jaguksid arvuga 3 ei ole - küll aga jaguvad kolmega kõik arvu 10 astmetest ühe võrra väiksemad arvud.
10 = 9+1
100 = 99+1
1000 = 999+1
10 000 = 9999+1
Jaguvustunnuse tuletamist vaatleme kõigepealt arvu 5721 korral.
5721 =5·1000 + 7·100 + 2·10 + 1
5721 = 5 ·1000 + 7 ·100 + 2 ·10 + 1 = 5 ·1000 + 7 ·100 + 2 ·10 + 1 =
= 5·(999 + 1) + 7 · (99 + 1) + 2 · (9 + 1) + 1 = 5 · 999 + 5 + 7 · 99 + 7 + 2 · 9 + 2 + 1.
Jaotame nüüd liidetavad kahte rühma, nii et üks neist sisaldaks liidetavaid, mis tekkisid kümne astmest ühe võrra väiksema arvuga korrutamisel ja teine kõiki ülejäänud liidetavaid.
Saame (5·999 + 7·99 + 2·9) + (5 + 7 + 2 +1).
Esimeses sulus olev summa jagub kindlasti arvuga 3. Järelikult otsustamaks, kas 5721 jagub kolmega või ei tuleb meil uurida summat teises sulus: 5+7+2+1 =15, kuna $3 \mid 15$ siis järelikult $3 \mid 5721$.
Vaadeldes summat 5 + 7 + 2 + 1 märkame, et see koosneb esialgse arvu 5721 numbritest.

Sellist arutluskäiku nagu kasutasime arvu 5721 korral saab kasutada suvalise täisarvu n korral.
Olgu meil vaja kindlaks teha, kas viiekohaline arv n = a·10000+ b·1000 + c·100 + d·10 +e jagub arvuga 3.
Kuna a ·10000 = a (9999 + 1)= a ·9999 + a
b ·1000 = b (999 + 1) = b ·999 + b
c ·100 = c (99 +1) = c ·99 + c
d ·10 = d (9 + 1) = d ·9 + d, siis

$n = a \cdot 10000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e = (a \cdot 9999 + b \cdot 999 + c \cdot 99 + d \cdot 9) + (a + b + c + d + e)$

Et $3 \mid 9$, $3 \mid 99$, $3 \mid 999$, $3 \mid 9999$, siis järelikult $3 \mid (a \cdot 9999 + b \cdot 999 + c \cdot 99 + d \cdot 9)$. Seega - kui $3 \mid (a + b + c + d + e)$, siis ka $3 \mid (a \cdot 9999 + b \cdot 999 + c \cdot 99 + d \cdot 9) + (a + b + c + d + e)$ ehk $3 \mid n$.

*** Arv jagub 3-ga siis ja ainult siis, kui arvu numbrite summa ehk ristsumma jagub 3-ga.**

*** Arv jagub 9-ga siis ja ainult siis, kui arvu numbrite summa jagub 9-ga.**

Jaguvuse omaduste juures nägime, et kui $a \mid c$ ja $b \mid c$ ning arvude a ja b suurim ühine jagaja on 1, siis $ab \mid c$.

Arv $6 = 2 \cdot 3$. Tegurite 2 ja 3 ainus ühine jagaja on arv 1. Jaguvuse omadust arvestades saame, et kui arv jagub nii arvuga 2 kui ka arvuga 3, jagub see ka arvuga 6.

*** Arv jagub arvuga 6, kui arv jagub nii arvuga 2 kui ka arvuga 3.**

Analoogselt saame sõnastada jaguvustunnused ka arvude 12, 14 ja 15 jaoks.

Arv jagub arvuga 12, kui see arv jagub nii arvuga 3 kui ka 4.
Arv jagub arvuga 14, kui see arv jagub nii arvuga 2 kui ka 7.
Arv jagub arvuga 15, kui see arv jagub nii arvuga 3 kui ka 5.

Naturaalarvude 2 kuni 15 jaoks, v.a. arvud **7, 11 ja 13**, on meil nüüd olemas jaguvustunnused.

Leiame nende kolme arvu jaoks ühise jaguvustunnuse.

Vaatleme korrutist $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$.

Täisarvu N võime kirjutada kujul

$N = 1000q + r$, kus arvuga r on tähistatud arvu N kolmest viimasest numbrist moodustuv arv ja tähega q on tähistatud arvu N kõigist ülejäänud numbritest moodustuv arv.

$N = 1000q + r = 1000q + q + r - q = 1001q + (r - q)$. Kuna liidetav $1001q$ jagub alati arvudega 7, 11 ja 13, siis arvu N jaguvuseks on vajalik, et ka sulgudes olev suurus $(r - q)$ jaguks kas siis arvuga 7, 11 või 13.

* **Arv jagub 7-ga, 11-ga või 13-ga, parajasti siis kui arvu kolmest viimasest numbrist moodustuva arvu ja ülejäänud numbritest moodustuva arvu vahe jagub vastavalt kas 7-ga, 11-ga või 13-ga.**

Näide 7. Kas arv 251321 jagub arvudega 7 ja 11 ?

Leiame vahe, mis tekib kui arvu kolmest viimasest numbrist moodustuvast arvust (321) lahutada ülejäänud numbritest moodustunud arv (251), st. leiame $321 - 251 = 70$.

Kuna $7 \mid 70$, siis $7 \mid 251321$

Kuna $11 \nmid 70$, siis $11 \nmid 251321$.

NÄITEÜLESANDED

Näide 8. Kas arv 23456789101112 jagub arvuga 12?
Lahendus: Arv jagub 12-ga kui ta jagub nii arvuga 3 kui ka 4. Arvu 23456789101112 kahest viimasest numbrist moodustuv arv jagub 4-ga. On vaja kontrollida jaguvust arvuga 3. Leiame ristsumma 2+3+4+5+6+7+8+9+1+0+1+1+1+2=50. Et 50 ei jagu arvuga 3, siis see arv ei saa jaguda arvuga 12.

Näide 9. Nagu naisterahvale kombeks ei tahtnud preili Tiitus oma vanust öelda ja andis noormehele ülesande. “Minu vanuseks on paarisarv, mis ei jagu arvuga 4 ja on kahe järjestikuse paaritu arvu summa.” Noormees proovis arve, mis enam-vähem pidid sobima preili vanuseks aga ta ei leidnud ühtegi sobivat. Miks ?

Lahendus: Olgu preili Tiituse vanuseks x aastat. Et tema vanus peab olema kahe järjestikuse paaritu arvu summa, siis $x = (2a+1)+(2a+3)$, kus $a \in Z$. Saame, et $x = 4a + 4$. Jaguvuse omaduste põhjal $4 \mid x$. Ülesande tingimuste kohaselt aga $4 \nmid x$. Oleme saanud vastuolu. Seega ei leidu kahte järjestikust paaritut arvu, mille summa ei jaguks arvuga 4.

Näide 10. (ol. piirkonnavoor, 8.kl,1998) Kahekohalise arvu ja sellest numbrite vahetamisel saadava arvu summa jagub kümnega. Loetle kõik sellised kahekohalised arvud.

Lahendus: Olgu kahekohaline arv $\overline{ab} = 10a + b$. Siis sellest numbrite vahetamisel saadav arv on $\overline{ba} = 10b + a$. Nende arvude summa on $(10a + b) + (10b + a)$, mis on esitatav korrutisena $11(a + b)$. Saadud arv jagub kümnega siis ja ainult siis, kui $a + b$ jagub arvuga 10. Et $2 = 1 + 1 \le a + b \le 9 + 9 = 18$, siis on see võimalik ainult siis kui $a + b = 10$. Seega vastuseks on kõik sellised kahekohalised arvud, mille numbrite summa on 10.
Need on 19, 91, 28, 82, 37, 73, 46, 64, 55.

Näide 11. (ol. piirkonnavoor, 8. kl, 1997) Positiivse täisarvu a kõik numbrid on erinevad. Arvu a numbritest saab moodustada kuus erinevat kahekohalist arvu, mille kümneliste number erineb üheliste numbrist. Saadud kuue arvu summa on kaks korda suurem esialgsest arvust a. Leia arv a.

Lahendus: Et arvu numbritest saab moodustada kuus erinevat kahekohalist arvu, mille kümneliste number erineb üheliste numbrist, siis peab see arv olema kolmekohaline ja kõik numbrid peavad olema nullist erinevad. Kahekohalisest arvust saab moodustada vaid kaks sellist arvu ja neljakohalisest saaks moodustada 24 sellist arvu.) Kui kolmekohalise arvu numbritest üks oleks 0, siis saaks tema numbritest moodustada vaid neli kahekohalist arvu ja kui neljakohalise arvu numbritest üks oleks 0, saaks moodustada 12 kahekohalist arvu.
Seega $a = \overline{xyz} = 100x + 10y + z$ ja need kuus kahekohalist arvu on: $10x + y$, $10x+ z$, $10y + x$, $10y + z$, $10z + x$ ja $10z + y$. Nende summa on $22(x + y + z)$. Järelikult tuleb lahendada võrrand $2(100x + 10y + z) = 22(x + y + z)$, kus x, y ja z on ühekohalised. Jagades mõlemaid pooli arvuga 2 ja koodades sarnased liikmed, saame $89x = 10z + y$. Arv $10z$ y ei saa olla suurem kui 99, seega peab $x = 1$. Seega $8 \cdot 10 + 9 = z \cdot 10 + y$. Et z ja y on numbrid ja igal arvul on vaid üks kümnendesitus, siis $z = 8$ ja $y = 9$.
Otsitav arv on 198.

Näide 12. (ol. piirkonnavoor, 7. kl, 1999) Ühe kuu kalendrilehest lõigati välja 2×2 kuupäevast koosnev ruut. Nende nelja kuupäeva summa jagus arvuga 16. Milline kuupäev võis olla selle ruudu paremas alumises nurgas?

Lahendus: Oletame, et väljalõigatud ruudu paremas alumises nurgas oli kuupäev x. Vasakus alumises nurgas pidi olema eelmise päeva kuupäev, seega x – 1. Paremas ülemises nurgas pidi olema kuupäevast x täpselt nädal aega varasem kuupäev, seega x – 7 ning vasakus ülemises nurgas x – 8.
Nende nelja kuupäeva summa on x + (x – 1) + (x – 7) + (x – 8) = = 4x – 16 = 4(x – 4).
Meil on vaja leida arvu x väärtused, mille korral $\frac{4(x-4)}{16} = \frac{x-4}{4}$ on täisarv. Et arv 4 jagub 4-ga, siis arv (x – 4) jagub 4-ga parajasti siis, kui x jagub arvuga 4. Seejuures x peab olema suurem kui 8, sest kuupäev ei saa olla negatiivne, ning väiksem kui 32. Seega sobivad kõik 4-ga jaguvad arvud, mis asuvad 8 ja 32 vahel.
Alumises paremas nurgas võis olla kuupäev 12, 16, 20, 24 ja 28.
Märkus: See kirjeldus kehtib muidugi sel juhul kui nädalad paiknevad kalendris horisontaalselt. Kui nädalad on kalendris vertikaalselt saame, et alumise rea vasakus nurgas on x – 7 ning ülemise rea paremas nurgas on x – 1 ja vasakus nurgas x – 8. See aga ei muuda ülesande lahendust.

Hindamiseeskiri: (max 7p)
Kuupäevade summa avaldamise eest ühe kuupäeva kaudu: 2 p.
Ülemise ja alumise tõkke leidmise eest valitud kuupäeva või kuupäevade summa jaoks: 2 p.
Sobivate kuupäevade leidmise eest: 3 p.
Lahenduse eest kõikide võimalike kuupäevade (1 kuni 31) läbivaatamise teel anda 7 punkti, kui iga kuupäeva sobivust või mittesobivust on seejuures korralikult põhjendatud.
Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti (kui vastuses on toodud ainult kolm või neli sobivat kuupäeva, siis 1 punkt).

Näide 13. (ol. piirkonnavoor, 8. kl, 2002) Arvu 15 saab esitada nii kolme kui ka viie järjestikuse naturaalarvu summana: 15 = 4 + 5 + 6 ja 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5. Leia kõik sellised arvust 100 väiksemad naturaalarvud, mida saab esitada nii kolme kui ka viie järjestikuse naturaalarvu summana. Põhjenda, miks neid ei ole rohkem.

Lahendus: Kolme järjestikuse naturaalarvu summa on (a – 1) + a + (a + 1) = 3a, kus a on keskmine neist arvudest. Seega naturaalarv avaldub kolme järjestikuse naturaalarvu summana siis ja ainult siis, kui ta jagub arvuga 3 (välja arvatud arv 0, kui see lugeda naturaalarvuks, või arv 3, kui 0 naturaalarvuks mitte lugeda, sest selle korral pole vähim liidetavatest naturaalarv).
Viie järjestikuse naturaalarvu summa on (b – 2) + (b – 1) + b + (b + 1) + (b + 2) = 5b, kus b on keskmine neist arvudest. Seega naturaalarv avaldub viie järjestikuse naturaalarvu summana siis ja ainult siis, kui ta jagub arvuga 5 (välja arvatud jällegi arv 0 või 5 olenevalt sellest, kas on 0 lugeda naturaalarvuks või mitte).
Järelikult avalduvad nii kolme kui ka viie järjestikuse naturaalarvu summana need ja ainult need naturaalarvud, mis jaguvad nii 3-ga kui ka 5-ga, välja arvatud 0. Et arvud 3 ja 5 on ühisteguriteta, siis jaguvad nii 3-ga kui ka 5-ga parajasti need arvud, mis jaguvad 15-ga. Seega otsitavad arvud on 15, 30, 45, 60, 75 ja 90.

Näide 14. (ol.piirkonnavoor, 9.kl, 2006) Leia kõik kolmekohalised arvud, mille viimane number on 1 ja mis jaguvad iga oma numbriga.

Lahendus: *Vastus:* ainuke selline arv on 111.

Olgu $\overline{ab1}$ nõutavate omadustega arv. Et arv on paaritu, siis ta saab jaguda vaid paaritute arvudega, st *a* ja *b* ei saa olla paarisarvud. Samuti ei jagu vaadeldav arv 5-ga, seega ei saa *a* ega *b* olla 5. Järelikult võivad arvu numbritena kõne alla tulla ainult 1, 3, 7 ja 9.
• Kui $a = b = 1$, siis saame arvu 111, mis rahuldab tingimusi.
• Kui mõni numbritest on 3, siis selleks, et arvu ristsumma $a + b + 1$ jaguks 3-ga, peab teine puuduv number olema 2, 5 või 8. Nendest aga ükski ei sobi.
• Kui mõni numbritest on 9, siis selleks, et arvu ristsumma $a + b + 1$ jaguks 9-ga, peab teine puuduv number olema 8, mis on samuti võimatu.
• Jääb vaadelda juhte, kus arv sisaldab ainult numbreid 1 ja 7. Et ükski arvudest 171, 711, 771 ei jagu 7-ga, siis rohkem sobivaid variante ei ole.
Märkus. Numbrite 3 ja 9 vaatlemise saab ka kokku võtta. Kui mõni numbritest jagub 3-ga, siis selleks, et arv jaguks selle numbriga, peab arv jaguma 3-ga, st tema ristsumma peab jaguma 3-ga. Selleks peab teine puuduv olema 2, 5 või 8, millest ükski ei sobi.

Näited jaguvuse ülesannetest võistluselt KÄNGURU (vastusevariantidest täpselt üks on õige)

1) Milline järgnevatest arvudest jagub arvuga 7, mistahes numbrite P ja Q korral ?

A: QQPPQQ B: QPQPQP C: PQPPQQ D: QPPQQP E: PPPQQQ

Lahendus: (B) Arv jagub arvuga 7 parajasti siis, kui vahe, mis saadakse arvu tuhandeliste arvust antud arvu kolmest viimasest numbrist moodustuva arva lahutamisel, jagub arvuga 7, sest iga kuuekohalise arvu võime esitada kujul $\overline{abcdeg} = 1001 \cdot \overline{abc} \,(\overline{abc} - \overline{def})$, kus 1001 jagub arvuga 7.
Vastusevariantide A, C , D ja E arvude korral sõltub jaguvus arvuga 7 numbrite Q ja P väärtustest, sest vahed on vastavalt A) QQP – PQQ = (Q – P)100 + (P – Q) = 99(Q – P);
C) PQP – PQQ = P – Q; D) QPP – QQP = (P – Q)10;
E) PPP – QQQ = (P – Q)111. Arv B) QPQPQP jagub alati arvuga 7, sest
QPQ – PQP = (Q – P)100 + (P – Q)10 + (Q – P) = 91(Q – P) ja $91 = 7 \cdot 13$.

2) Viiekohalisest arvust lahutatakse arv, mis koosneb samadest numbritest kuid vastupidises järjekorras. Saadud vahe jagub alati arvuga

A: 7 B: 2 C: 5 D: 9 E: 13

Lahendus: (D) Olgu antud viiekohaline arv 10000a + 1000b + 100c +10d + e, siis arv, mis koosneb samadest numbritest kuid vastupidises järjekorras on 10000e + 1000d + 100c +10b + a. Nende vahe on (10000a + 1000b + 100c +10d + e) – (10000e + 1000d + 100c +10b + a) = 9999a + 999b – 999d – 9999e.
Vastusevariantide arvudest jagab vahet alati arv 9.

3) Kui palju kahekohalisi arve jagub nii arvuga 2 kui ka arvuga 7?

A: 8 B: 7 C: 6 D: 5 E: 4

Lahendus: (B) Et arv jaguks nii arvuga 2 kui ka arvuga 7, peab see olema paarisarv ja arvu 7 kordne. Selliseid kahekohalisi arve on kokku 7, need on 14, 28, 42, 56, 70, 84 ja 98.

4) Avaldises $x^5 + bx + c$ on b ja c täisarvud ning avaldise väärtus on 0, kui x = 3. Arv c ei saa olla

A: 10 B: 12 C: 15 D: 36 E: 9

Lahendus: (A) Et avaldise $x^5 + bx + c$ väärtus on 0 kui $x = 3$, siis võrdusest $c = -3^5 - b \cdot 3$ saame, et c väärtus peab jaguma kolmega, sest parem pool jagub arvuga 3. Järelikult arv c ei saa olla 10.

5) Seitsmekohaline arv 6pqpqpq on arvu 18 kordne. Kui sellest arvust kustutada esimene ja viimane number, siis alles jäänud viiekohaline arv on arvu 6 kordne. Number p on

A: 2 B: 4 C: 6 D: 8 E: 0

Lahendus: (B) Ülesande teksti põhjal saame, et $p \neq 0$ ja $q \neq 0$. Et 6pqpqpq on arvu 18 kordne, siis arv peab jaguma arvudega 2 ja 9 ning järelikult on q paarisnumber. Peale esimese ja viimase numbri kustutamist jääb järgi arv 10101p + 1010q. Et see on arvu 6 kordne, siis peab see arv jaguma arvudega 2 ja 3. Et esimene liidetav jagub arvuga 3 peab ka teine liidetav jaguma arvuga 3. Seega q on 6 või 0 ning järelikult arv 6p6p6p6 või 6p0p0p0 peab jaguma arvuga 9. Mõlemal juhul saame, et selle arvu ristsumma jagub arvuga 9 siis kui p = 4.

6) Mitme kohaline on vähim positiivne täisarv, mis jagub arvuga 225 ning mille kirjutamiseks on vaja vaid numbreid 0 ja 1?

A:10 B: 11 C: 12 D: 13 E: 14

Lahendus: (B) Et arv jaguks arvuga 225, peab see arv jaguma arvudega 9 ja 25, sest $225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. Et numbritest 1 ja 0 moodustatav arv jaguks arvuga 9, peab selles olema arvu 9 kordne arv number ühtesid ning et arv jaguks arvuga 25 peavad arvu vähemalt kaks viimast numbrit olema nullid. Seega vähim võimalik arv on 11-kohaline.

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks

Ülesanne 1. (2p) Otsusta järgnevate väidete korral, kas see on tõene või väär, juhul kui x, y, $z \in Z$. Põhjenda. (st, et kui väide on tõene, siis tõestada ja kui väär, siis tuua näide arvudega, mille korral see ei kehti.)

a) kui $3 \mid x$ ja $3 \mid y$, siis $9 \mid xy$
b) kui $3 \mid (x+y)$, siis $3 \mid x$ ja $3 \mid y$
c) kui $9 \nmid x$, siis $3 \nmid x$.

Ülesanne 2. (2p) Põhjenda, et kõik neli järgnevat väidet on väärad.

a) Kui $d \nmid a$, siis $d \nmid (ka+d)$, kus $k \in Z$.
b) Kui $d \nmid a$, $d \nmid b$, siis $d \nmid (b \cdot a)$
c) Kui $d \nmid (a+b)$, siis $d \nmid (a - b)$.
d) Kui $d \mid a^k$, siis $d \mid a$

Ülesanne 3. (5p) Tõesta, et kahe järjestikuse paaritu täisarvu ruutude vahe jagub arvuga 8?

Ülesanne 4. (5p) Väide: kui suvalisest arvust lahutada tema numbrite summa, jagub saadud vahe arvuga 9. Tõesta, et see väide kehtib kõigi kuuekohaliste arvude korral.

Ülesanne 5. (5p) Kas leiduvad erinevad numbrid U ja H, nii et kolmekohaline arv UHU jagub arvuga 13 aga kolmekohaline arv HUH ei jagu arvuga 13?
Kui jah, too näide, kui ei, siis põhjenda miks.

Ülesanne 6. (5p) Kolmekohalises arvus kustutati sajaliste number ja saadi kahekohaline arv, mis on seitse korda väiksem esialgsest arvust. Leia kõik sellised kolmekohalised arvud.

Ülesanne 7. (5p) Põhjenda, et neljakohaline arv jagub arvuga 6 siis, kui summa, mis saadakse arvu üheliste arvule liites ülejäänud numbrite neljakordse summa,
jagub arvuga 6.

Ülesanne 8. (5p) Põhjenda, et kui mingi kolmekohaline arv jagub arvuga 7, siis seitsmega jagub ka arv, mis on esialgsest arvust saadud numbrite järjekorra muutmisel vastupidiseks ning millest on lahutatud esialgse arvu üheliste ja sajaliste vahe.