TÜ TEADUSKOOL

PAARIS- JA PAARITUD ARVUD PAARSUS

Ettevalmistus matemaatikaolümpiaadiks I
MAA01-**I**

Koostanud Raili Vilt

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, ...
2k, 2k+1

TARTU
2016

PAARIS- JA PAARITUD ARVUD

Täisarvud on kas paaris või paaritud.

Paarisarvud need on täisarvud, mis jaguvad arvuga 2.
Need on arvud: …, –4, –2, **0**, 2, 4, 6, 8, 10, 12, …
Paarisarvu üheliste number on 0, 2, 4, 6 või 8.
Igat sellist arvu saab kirjutada kujul

$2k$, kus k on mingi täisarv. (Näiteks $0 = 2\cdot 0$; $4 = 2\cdot 2$; $6 = 2\cdot 3$ jne)

Paaritud arvud need on täisarvud, mis jagamisel arvuga 2 annavad jäägi 1.
Need on arvud: …., –3, –1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, …
Paaritu arvu üheliste number on 1, 3, 5, 7 või 9.

Igat sellist arvu saab kirjutada kujul

$2k + 1$, kus k on mingi täisarv.
(Näiteks: $1 = 2 \cdot 0 + 1$; $3 = 2 \cdot 1+1$; $5 = 2 \cdot 2+1$ jne).

Paaris- ja paaritute arvude liitmisel kehtivad järgmised reeglid:

a) kahe paarisarvu summa on paarisarv,
b) kahe paaritu arvu summa on paarisarv,
c) paarisarvu ja paaritu arvu summa on paaritu arv.

Näitame, et need reeglid tõesti kehtivad.

Olgu a ja b täisarvud.

a) Olgu meil mistahes paarisarvud $2a$ ja $2b$. Leides nende arvude summa $2a + 2b = 2(a + b)$, näeme, et see on alati paarisarv, sest avaldub kujul $2k$, kus k on täisarv.

b) Olgu meil mistahes paaritud arvud $2a + 1$ ja $2b + 1$. Leides nende arvude summa $2a + 1 + 2b + 1 = 2(a + b + 1)$, näeme, et see on alati paarisarv, sest avaldub kujul $2n$, kus n on täisarv.

c) Olgu meil mingi paarisarv $2a$ ja mingi paaritu arv $2b + 1$. Leides nende arvude summa $2a + 2b + 1 = 2(a + b) + 1$, näeme, et see on alati paaritu arv, sest avaldub kujul $2m + 1$, kus m on täisarv.

Neist reeglitest järeldub, et

a) mistahes arvu paarisarvude summa on paarisarv,
b) paaritu arvu paaritute arvude summa on paaritu ja paarisarvu paaritute arvude summa on paarisarv.

Paaris- ja paaritute arvude korrutamisel kehtivad järgmised reeglid:

a) kahe paarisarvu korrutis on paarisarv,
b) kahe paaritu arvu korrutis on paaritu arv,
c) paaris- ja paarituarvu korrutis on paarisarv.

Näitame, et need reeglid tõesti kehtivad.

a) Olgu meil mistahes paarisarvud $2a$ ja $2b$. Nende korrutis $2a \cdot 2b = 2 \cdot 2ab$ on paarisarv.

b) Olgu meil mistahes paaritud arvud $2a + 1$ ja $2b + 1$.

Nende korrutis $(2a + 1) \cdot (2b + 1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = 2(2ab + a + b) + 1$ on paaritu arv.

c) Olgu meil mingi paarisarv $2a$ ja mingi paaritu arv $2b + 1$. Sel juhul nende korrutis $2a \cdot (2b+1)$ on paarisarv.

Neist reeglitest järeldub, et

a) mistahes arvu paarisarvude korrutis on paarisarv,
b) mistahes arvu paaritute arvude korrutis on paaritu arv.

NB! Mistahes paaris- ja paaritute arvude kirjutamisest.

Kui on vaja kirjutada mistahes paarisarv, siis võime selleks võtta $2k$, kus k on täisarv.

Kui samas ülesandes oleks vaja kirjutada ka mingit paaritut arvu, siis tuleks kirjutada $2m + 1$.

Kui me kirjutaksime siin paarituks arvuks $2k + 1$, siis see ei tähista mitte mistahes paaritut arvu, vaid meie valitud paarisarvust ühe võrra suuremat arvu.

Veel mõned näited:

a) Olgu antud viis paaritut arvu: Sel juhul võime/tuleks need arvud kirjutada: $2k + 1$, $2m + 1$, $2n + 1$, $2a + 1$ ja $2b + 1$.

b) olgu antud kolm arvu: paarisarv, sellest paarisarvust 3 võrra suurem arv ja veel üks paaritu arv.

Sel juhul võime need arvud kirjutada: $2m$, $2m + 3$ ja $2k + 1$.

c) olgu antud neli arvu: kaks järjestikust paaritut arvu, neist suuremale järgnev paarisarv ning veel üks paaritu arv

Sel juhul võime need arvud kirjutada: $2m + 1$, $2m + 3$, $2m + 4$ ja $2n + 1$.

Järgnevate ülesannete lahendustes on kasutatud just paarsust.

Näide 1. Põhjenda, et kui kahe täisarvu summa on paaritu, siis nende kahe arvu korrutis on paarisarv.

Lahendus: Selleks, et kahe täisarvu summa oleks paaritu, peab üks liidetavatest olema paarisarv ja teine paaritu. Paarisarvu ja paaritu arvu korrutis on aga alati paarisarv.

Näide 2. Kas on võimalik 25 krossi lahti vahetada kümneks rahatäheks, kui käibel on vaid rahatähed 1, 3, 5 ja 25 krossi?

Lahendus: ei ole võimalik, sest kümne paaritu arvu summa on alati paarisarv ning seega ei saa olla nende summa 25 krossi, mis on paaritu.

Näide 3. Sõnas *KISSELL* vastavad erinevatele tähtedele erinevad numbrid ja ühesugustele tähtedele ühesugused numbrid. Teada on, et $S + E + L + L$ ja $S \cdot E$ on paarisarvud ning $I \cdot L$ ja $K + I$ on paaritud arvud. Leia vähim ja suurim seitsmekohaline arv, mis saab neil tingimustel vastata sõnale *KISSELL*.

Lahendus: Vaatleme summat $S + E + L + L$. Sõltumata sellest, kas L on paaris või paaritu on summa $L + L$ paaris. Seega $S + E$ peab olema paarisarv, mis tähendab, et S ja E on mõlemad kas paarisarvud või mõlemad on paaritud. Et $S \cdot E$ on paarisarv, siis vähemalt üks peab neist paaris olema ning eelneva põhjal on järelikult S ja E mõlemad paarisarvud.
Et $I \cdot L$ on paaritu, siis mõlemad tegurid peavad olema paaritud.
Et $K + I$ on paaritu, siis K ja I on erineva paarsusega, s.t üks on paaris ja teine paaritu. Kuna I oli eelneva põhjal paaritu, siis K on paaris.
Eelnevat arvestades saame:
* tähele K vastava arvu vähim väärtus saab olla 2 (arv ei alga numbriga 0) ja suurim 8,
* tähele I vastab paaritu arv, seega I vähim väärtus saab olla 1 ja suurim 9.
Järgnevatele tähtedele väärtuste leidmisel, arvestame juba eelnevaid väärtusi:
* tähele S peab vastama paarisarv. Vähim väärtus saab olla 0 ja suurim 6,
* tähele E peab vastama paarisarv. Vähim väärtus saab olla 4 ja suurim 4,
* tähele L peab vastama paaritu arv. Vähim väärtus saab olla 3 ja suurim 7.
Vastus: Vähim ja suurim seitsmekohaline arv on vastavalt 2100433 ja 896647.

Näide 4. Simmo: “Mul oli karbis kommi- ning šokolaadipabereid kokku 439. Kui ma võtsin välja teatud arvu kommipabereid ja samapalju šokolaadipabereid, siis jäi karpi kommipabereid kolm korda rohkem kui šokolaadipabereid.”
Timmo: “See ei saanud nii olla!” Kas Timmol oli õigus? Põhjenda.

Lahendus: Timmol oli õigus. Paberite koguarv on paaritu. Kui välja võtta sama arv kumbagi liiki pabereid, siis karpi jääb paaritu arv pabereid, sest paaritust arvust lahutades paarisarvu saame paaritu arvu. Et kommipabereid jäi kolm korda rohkem, siis karpi jäänud paberite kogu arv on võrdne šokolaadipaberite arvu

neljakordsega, st peab olema paarisarv. See on aga võimatu, sest sinna jäi paaritu arv pabereid.

Näide 5. (Känguru 2010, kadett)
Kui palju on selliseid kolmekohalisi arve, mille keskmine number on kahe ülejäänud numbri aritmeetiline keskmine?

A: 9 B: 12 C: 16 D: 25 E: 45

Lahendus: Olgu meil kolmekohaline arv $\overline{abc}$. Naturaalarvude *a* ja *c* aritmeetiline keskmine $\frac{a+c}{2}$ on täisarv vaid sel juhul, kui $a+c$ on paarisarv. Seega *a* ja *c* peavad olema sama paarsusega. Kolmekohalisi arve, kus *a* ja *c* mõlemad on paaris, on 20 ja selliseid arve, kus mõlemad on paaritud, on 25. Järelikult kolmekohalisi arve, mille keskmine number on kahe ülejäänud numbri aritmeetiline keskmine, on 45.

Näide 6. (Känguru 2010, juunior)
Ühe kuu kolm teisipäeva olid paarisarvulise kuupäevaga. Mis nädalapäev oli selle kuu 21. päeval?

A: kolmapäev B: neljapäev C: reede D: laupäev E: pühapäev

Lahendus: Et ühes nädalas on 7 päeva, mis on paaritu arv, siis sama paarsusega kuupäev on samal nädalapäeval kahe nädala möödudes. Seega need paarisarvulised kuupäevad pidid olema *x*, $x+14$ ja $x+28$. Et ühes kuus ei saa olla rohkem kui 31 päeva, siis *x* saab olla 2. Seega teisipäevad olid 2. 16. ja 30. päev. Järelikult 21. päev oli pühapäev.

Näide 7. Meil on teatud hulk arbuuse. Kas on võimalik need jaotada 4 korvi nii, et kui korvid paigutada ringjoonele, siis ringjoonel mistahes kahes kõrvuti asetsevates korvides on arbuuside arv täpselt ühe võrra erinev?
Aga kui meil oleks a) 3 korvi, b) 98 korvi, c) 99 korvi ?

Lahendus: Kui korve on 4 või 98 on see võimalik. Näiteks asetades esimesse korvi ühe arbuusi, teise kaks, kolmandasse ühe ja neljandasse jälle kaks. Kui korvid järjest nummerdada, siis korvidesse, mille number on paaritu, paneme ühe arbuusi ning korvidesse, mille number on paarisarv, paneme kaks arbuusi.
Kaks arvu, mis erinevad ühe võrra on erineva paarsusega. Mis tähendab, et kõigis korvides, millede järjekorranumber on paaritu, on arbuuside arv sama paarsusega. Seega, kui korvide koguarv on paaritu, satuvad kõrvuti kaks korvi, millede järjekorranumbrid on mõlemad paaritud ning neis on sama paarsusega arv arbuuse. Järelikult, kui korve on 3 või 99, siis ei saa arbuuse nõutud viisil korvidesse paigutada.

Näide 8. (95/96õa. olümpiaadi piirkonnavoor, 9.kl)
Kaks arbuusimüüjat tülitsesid müügikoha pärast. Kaval-Ants pakkus neile oma abi tüli lahendamiseks. Ta paigutas ringikujuliselt maha teatud arvu korve ja ütles: ”Müügikoha saab endale see, kes oskab paigutada arbuuse korvidesse nii, et igas

kahes kõrvutiasetsevas korvis oleks täpselt ühe võrra erinev arv arbuuse. Kes ülesandega toime ei tule, loovutab 10 arbuusi mulle.” Missuguse korvide arvu valis Kaval-Ants, kui ta oli kindel, et lahkub turult 20 arbuusiga?

Lahendus: Vastus: Mistahes (ühest suurem) paaritu arv.
Olgu korvide arv n ning nendesse paigutatavate arbuuside arvud (näit. päripäeva lugedes) $a_1, a_2, \ldots a_n$, siis ühelt poolt saame
$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + (a_1 - a_n) = 0$, teisalt aga on iga liidetava väärtus vaadeldavas summas 1 või (–1), s.t summa paarsus langeb kokku liidetavate arvu n paarsusega. Niisiis ei ole paaritu arvu n korral võimalik arbuuse nõutaval viisil korvidesse paigutada – teiselt poolt saame mistahes paarisarvu n korral nõutava paigutuse, pannes korvidesse näiteks vaheldumisi 0 ja 1 arbuusi.

Hindamiseeskiri: Põhjenduse eest, et sobib mistahes ühest suurem paaritu arv korve anti 6p. Põhjenduse eest, et paarisarv korve ei taga vajalikku tulemust 1p. (Seega maksimum 7p anti ainult juhul kui oli mõlemat pidi põhjendatud ja välja toodud seos paarsusega.) Kui vastuseks oli antud mingi konkreetne paaritu arv ja põhjendatud selle sobivust, anti vaid 4p.

Näide 9. (97/98 õa. olümpiaadi piirkonnavoor, 7.kl)
Lahtistest lehtedest koosneva noodikogu leheküljed on nummerdatud alates esimesest lehest arvudega 1, 2, 3, 4, ... Juku liitis ajaviiteks kokku viieteist juhuslikult võetud lehe kõik 30 leheküljenumbrit ja sai tulemuseks 1998. Seejärel liitis Juku noodikogu kümne esimese lehe leheküljenumbrid ja sai tulemuseks 210.
a) Kas Juku arvutas esimesel korral õigesti?
b) Kas Juku arvutas teisel korral õigesti?

Lahendus: a) Ülesande tingimustele vastava nummerdamise korral on ühe lehe leheküljenumbrite summa alati paaritu arv (kahe järjestikuse naturaalarvu summa). Et paaritu arvu paaritute arvude summa on paaritu, siis mistahes viieteistkümne lehe leheküljenumbrite summa on alati paaritu arv ega saa olla võrdne arvuga 1998.
b) Noodikogu esimese kümne lehe leheküljenumbrite summa $S = 1 + 2 + \ldots + 20$ leidmiseks kirjutame nõutava summa kaks korda üksteise alla.
$S = 1 + 2 + \ldots + 19 + 20$
$S = 20 + 19 + \ldots + 2 + 1.$
Paneme tähele, et paremal pool võrdusmärke üksteise alla kirjutatud arvude summad on võrdsed. Liites need kaks võrdust, saame
$2S = (1 + 20) + (2 + 19) + \ldots + (19 + 2) + (20 + 1) = 20 \cdot 21,$
seega otsitav summa on $S = (20 \cdot 21) : 2 = 210$, mis langeb kokku Juku leitud summaga.

Hindamiseeskiri: * Tähelepaneku eest, et ühe lehe kahe leheküljenumbri summa on alati paaritu arv (koos põhjendusega) (2p)
* Eelnevast järelduse tegemise eest, et Juku eksis esimesel korral (koos põhjendusega) (2p)
* Juku teisel korral saadud tulemuse kontrolli eest (mistahes viisil, kui lahendusest on näha, et leitakse arvude 1, 2, . . . , 20 summa (3p)

* Kui ülaltoodud juhiste mingis punktis mainitud väide on põhjendamata, siis anda selle eest vastavalt 1 punkt.
* Ainult mõlema küsimuse õigete vastuste eest (ilma selgitusteta) anda 2 punkti. Kui üks vastus on õige ja teine vale ning selgitused puuduvad, anda 0 punkti.

Näide 10. Laual on 16 joogiklaasi. Neist 15 on õigetpidi, aga üks on põhjaga ülespoole. Korraga lubatakse ümber pöörata täpselt 4 klaasi. Kas korrates seda operatsiooni teatud arv kordi on võimalik saavutada olukord, kus kõik klaasid on õigetpidi? Põhjenda.

Lahendus: Vaatleme, kuidas muutub õigetpidi olevate klaaside hulk pärast igat lubatud operatsiooni. Arvatavasti sõltub see sellest, kui palju ümberpööratavatest klaasidest on õigetpidi ja kui palju põhjaga ülespoole.
Täpsemalt:

- kui kõik neli ümberpööratavat klaasi on õigetpidi, siis õigesti asetsevate klaaside arv väheneb 4 võrra.
- kui neljast pööratavast klaasist 3 on õigetpidi, siis õigesti asetsevate klaaside arv väheneb 2 võrra.
- kui kaks, siis ei muutu
- kui üks, siis suureneb 2 võrra
- kui kõik neli on põhjaga ülespoole, siis õigesti olevate hulk suureneb 4 võrra.

Igal vaadeldud juhul jääb õigesti olevate arv kas samaks või muutub paarisarvu võrra. Kuna algul oli selliseid klaase 15, siis pärast igat operatsiooni on õigetpidi olevate klaaside arv paaritu. Seega saavutada olukorda, kus kõik klaasid on õigetpidi ei ole võimalik.

Näide 11. (04/05 õa. olümpiaadi piirkonnavoor, 8.kl)
Basseinis on 8 vee väljalaskeklappi. Süsteemi abil on võimalik valida täpselt 4 klappi ja muuta nende asend vastupidiseks (avatud klapp sulgub, suletud klapp avaneb). Kas selle süsteemi korduval rakendamisel on võimalik avada kõik klapid, kui esialgu on avatud: a) üks klapp; b) kaks klappi?
Jaatava vastuse korral näita, kuidas tuleks tegutseda, eitavat vastust põhjenda.

Lahendus: Vastus: a) ei; b) jah.
a) Avatud klappide arv saab igal sammul muutuda ainult paarisarvu võrra, sest kui mingil sammul valitud neljast klapist on alguses a avatud, siis pärast on avatud klappide arv $(4 - a)$. Seega nende arv muutub $4 - a - a = 4 - 2a$ võrra. Kui alguses on avatud üks klapp, siis jääb avatud klappide arv pärast iga sammu paarituks ega saa seetõttu võrduda 8-ga.
b) Valime ühe avatud ja mingid kolm suletud klappi ning muudame nende nelja klapi asendi vastupidiseks. Pärast seda on basseinis neli klappi avatud ja neli suletud. Teise sammuga avame neli suletud klappi.

Hindamiseeskiri: * Tähelepaneku eest, et avatud klappide arv muutub igal sammul paarisarvu võrra (2 p)
* Järelduse eest, et a)-osas ei ole klappide avamine võimalik (2 p)
b)-osas sobiva klappide avamise strateegia kirjeldamise eest (3 p)

* Ainult täieliku õige vastuse (a) „ei“, b) „ jah“) eest ilma põhjenduseta anda 1 punkt. Ainult ühe osa õige vastuse eest anda 0 punkti.

Näide 12. (2.okt. 2004 Lahtine võistlus, noorem rühm)
Piraat Silveril on 8 ühesugust täringut, mis on märgistatud järgmisel viisil: iga täringu kahele vastastahule on kummalegi kirjutaud üks silm, veel kahele vastastahule kummalegi kaks silma ja ülejäänud kahele vastastahule kummalegi kolm silma. Kas Silver saab nendest täringutest kokku panna kuubi mõõtmetega $2 \times 2 \times 2$, mille tahkude silmade arvud oleksid kuus järjestikust täisarvu?

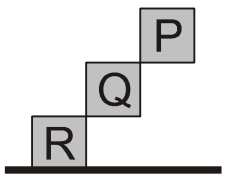
Lahendus: Vastus: ei
Paneme tähele, et täringu mistahes tipu kolmel naabertahul on vastavalt 1, 2 ja 3 silma. Et $2 \times 2 \times 2$ kuubi välispinnale jäävad iga täringu tahkudest parajasti selle mingi tipu kolm naabertahku, siis $2 \times 2 \times 2$ kuubi välispinnal on kokku $8 \cdot (1 + 2 + 3)$ silma, s.t paarisarv. Mistahes kuue järjestikuse täisarvu summa on aga paaritu, sest nende arvude seas alati kolm on paaris ja kolm on paaritud.

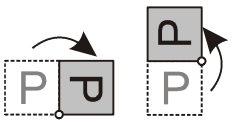
Näide 13. (Känguru 2011, kadett)
Kolm prussakat Mik, Tik ja Sik jooksid võidu. Mingil hetkel oli Mik esimene, Tik teine ja Sik kolmas. Pärast seda muutus Miku ja Tiku omavaheline järjestus rajal 9 korda, Tiku ja Siku oma 10 korda ning Miku ja Siku oma 11 korda. Millises järjestuses, alates võitjast, nad lõpetasid selle jooksu?

A: Mik, Tik, Sik B: Tik, Sik, Mik
C: Sik, Mik, Tik D: Sik, Tik, Mik E: Tik, Mik, Sik

Lahendus: Kahe prussaka üks omavaheline kohtade vahetus muudab nende järjestuse rajal vastupidiseks. Kui need kaks prussakat teist korda vahetavad omavahel kohti, on nende järjestus rajal sama, mis enne kohtade vahetamisi. Seega kui kahe prussaka omavaheliste kohtade vahetuste arv on paaritu, siis võrreldes järjestusega enne kohtade vahetamisi, on nende omavaheline järjestus on muutunud, kui aga paaris, siis ei ole. Mingil hetkel olid prussakad alates parimast Mik, Tik ja Sik. Vaatame nüüd paaride kaupa prussakate omavahelist järjestust. Et teatud hetkest alates muutus Miku ja Tiku omavaheline järjestus 9 korda, siis pidi lõpuks Tik olema eespool kui Mik. Et Tiku ja Siku omavaheline järjestus muutus 10 korda, siis kuna enne vahetamisi oli Tik eespool kui Sik, oli Tik ka lõpuks eespool. Et Miku ja Siku omavaheline järjestus muutus 11 korda, siis Sik pidi olema lõpuks Mikust eespool. Oleme saanud, et Tik oli ees nii Mikust kui Sikust ja Sik oli Mikust eespool. Jooksu võitis Tik, teine oli Sik ja kolmas oli Mik.

Näide 14. (Känguru 2011, juunior)
Paul mängib arvutimängu, kus algul on ekraanil ülemisel joonisel olev pilt. Ühe käiguga saab ta ühte ruutu pöörata ümber selle mõne tipu 90° võrra. Alumisel joonisel on näidatud kaks võimalikku pööret. Mängu eesmärgiks on paigutada kõik ruudud üksteise kõrvale nii, et iga ruudu üks külg asuks antud sirgel.



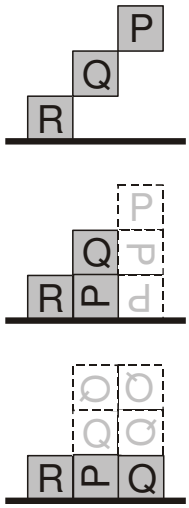


Milline pilt saab olla ekraanil mängu lõpus?

A: B: C: D:

E: kõik vastusevariantides A kuni D antud pildid on võimalikud

Lahendus: Kui ruuduga tehtud pöörete arv on paarisarv, siis täht sellel on kas sama pidi nagu alguses või pööratud 180° võrra ning ütleme sellisel juhul, et täht on vertikaalselt. Kui ruuduga tehtud pöörete arv on paaritu, siis tähte on pööratud 90° võrra ja ütleme, et täht paikneb horisontaalselt. Vaatleme vastusevariantides antud võimalusi. Selleks, et R täht oleks nii nagu vastusevariandis A näidatud on vaja teha algasendist paarisarv pöördeid. Selleks, et ruut tähega P asetseks vastavalt ruudu tähega R kõrval on vaja teha paaritu arv pöördeid ja selle tulemusena saab ruudu tähega P panna vastavalt ruudu tähega R kõrvale. Ruudu tähega Q saamiseks ruudu tähega P kõrvale on vaja teha sel juhul alati paarisarv pöördeid. Sel juhul aga ei saa täht Q paikneda horisontaalselt ning vastusevariandis A antud pildi saamine ei ole võimalik. Selleks, et R täht paikneks vastusevariandis B näidatud asendis on vaja teha paarisarv pöördeid. Selleks, et tema kõrvale saada ruut tähega P, on vaja teha paaritu arv pöördeid ja tõesti sel juhul P paikneb horisontaalselt. Et P kõrvale saada Q on vaja teha paarisarv pöördeid ja tõesti Q paikneb sel juhul vertikaalselt. Joonisel on näidatud üks võimalustest sellise pildi saamiseks. Vastusevariandis C antud pilti ei ole võimalik saada, sest ruuduga R on vaja teha paaritu arv pöördeid, aga ruuduga tähega P on vaja teha paarisarv pöördeid ja sel juhul ei saa see olla horisontaalselt. Vastusevariandis D antud pilti ei ole võimalik saada, sest ruudu tähega P paigutamiseks R kõrvale on vaja teha paaritu arv pöördeid ja P on sel juhul horisontaalselt. Ekraanil saab olla vaid vastusevariandis B antud pilt.



Näide 15. (Känguru 2012, juunior) On antud 5 lampi. Neist igaühel saab olla ainult kaks olekut - sisse lülitatud või välja lülitatud. Ühe käiguna tuleb valida kaks lampi ja mõlema lambi olek muuta vastupidiseks (st sisse lülitatud lamp välja lülitada ja vastupidi). Alguses on kõik lambid välja lülitatud. Millises vastusevariandis antud väide on igal juhul õige, kui teha 10 käiku?

A: Kõik lambid on sisse lülitatud
B: Kõik lambid on välja lülitatud
C: Leidub lamp, mis on sisse lülitatud
D: Leidub lamp, mis on välja lülitatud
E: Vastusevariantides A- D antud väited on kõik igal juhul õiged

Lahendus: Kui valitud lambid on mõlemad välja lülitatud, siis pärast käiku on välja lülitatud lampe kahe võrra vähem. Kui valitud lambid on mõlemad sisse lülitatud, siis pärast käiku on välja lülitatud lampe kahe võrra rohkem. Kui valitud lampidest üks on sisse lülitatud ja teine välja lülitatud, siis pärast käiku välja lülitatud lampide

arv ei muutu. Seega välja lülitatud lampide arv muutub kas 0 või 2 võrra. Kuna algul on kõik 5 lampi välja lülitatud, siis pärast mistahes käiku peab välja lülitatud lampide arv olema ikka paaritu, st kas 1, 3 või 5. Seega igal juhul peab leiduma lamp, mis on välja lülitatud.

Näide 16. (Känguru 2012, kadett) Raamatus on 18 erinevat jutustust, mille pikkused mingis järjekorras on 1, 2, 3, . . . , 18 täis lehekülge. Esimene jutustus hakkab leheküljelt 1 ja viimane lõppeb leheküljel 171. Leia suurim arv jutustusi, mille algus selles raamatus saab olla paarituarvulisel leheküljel.

A: 9 B: 10 C: 12 D: 13 E: 14

Lahendus: (E) Kui jutustuse pikkus on paarisarv lehekülgi, siis selle jutustuse alguse ja sellele järgneva jutustuse alguse leheküljenumbrid on sama paarsusega. Kui jutustuse pikkus on paaritu arv lehekülgi, siis selle jutustuse alguse ja sellele järgneva jutustuse alguse leheküljenumbrid on erineva paarsusega. Seega kõige rohkem jutustusi saab alata paarituarvuliselt leheküljelt, kui järjest paigutada kõigepealt jutustused, mille pikkused on paarisarv lehekülgi ja seejärel paarituarvulise pikkusega jutustused. Paarituarvuliselt leheküljelt hakkavad seega 9 paarisarvulise pikkusega jutustust. Paarituarvuliste pikkustega jutustusi on ka kokku 9 ning paarituarvuliselt leheküljelt hakkavad neist järjekorras esimene, kolmas, viies, seitsmes ja üheksas. Suurim arv jutustusi, mille algus on paarituarvulisel leheküljel, on $9 + 5 = 14$.

Näide 17. (Känguru 2016, juunior) Taskuarvuti ekraanil on arv 12. Ühe korraga on lubatud ekraanil olevat arvu korrutada arvuga 2 või arvuga 3 või juhul, kui tulemuseks tuleb täisarv, jagada arvuga 2 või arvuga 3. Nii toimitakse 60 korda järjest. Millises vastusevariandis antud arvu ei ole nii võimalik saada?

A: 12 B: 18 C: 36 D: 72 E: 108

Lahendus: (C) Et $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, siis ühe käiguga saame arvu, milles on tegurit 2 kas ühe võrra rohkem või vähem, või siis tegurit 3 on ühe võrra vähem või rohkem. Kuna alguses on kolm tegurit, mis on paaritu arv, siis igal juhul pärast esimest käiku on tegurite arv paaris. Järgmise käiguga jälle tegurite 2 ja 3 arv, kas suureneb ühe võrra või väheneb ühe võrra. Seega paarituarvulise käigu tulemusena saame tegureid 2 ja 3 kokku paarisarvu ja paarisarvulise käigu järel paaritu arvu. Kuna nii toimiti 60 korda järjest, siis tulemuseks saadakse arv, millel peab tegureid 2 ja 3 kokku olema paaritu arv. Et $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ ja $108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, siis nii ei ole võimalik saada arvu 36.

Näide 18. (13.dets 2015, Lahtine võistlus, noorem rühm) Kilpla külas elab 50 elanikku. Mõned neist on omavahel tuttavad. Tuttavatele räägib kilplane alati tõtt, võõrale aga alati valetab. Iga kilplane ütleb täpselt üks kord igale teisele, kas tal

on külaelanike hulgas paaris või paaritu arv tuttavaid (iseennast tuttavaks ei loeta). Kas on võimalik, et väide „mul on külaelanike hulgas paarisarv tuttavaid“ kõlab kokku täpselt 2015 korda?

Lahendus: Vastus: ei
Et Kilplas on 50 elanikku, on igal kilplasel külaelanike seas tuttavaid ja võõraid kokku paaritu arv. See tähendab, et kui tuttavaid on paarisarv, siis võõraid on paaritu arv ja vastupidi. Kilplane, kel on paarisarv tuttavaid, väidab paarisarv kordi, et tal on paarisarv tuttavaid. Kilplane, kel on paaritu arv tuttavaid, räägib sama väidet võõrastele, keda on tal samuti paarisarv. Kuna iga kilplane väidab endal paarisarvu tuttavaid olevat paarisarv kordi, kõlab see väide ka kokku paarisarv kordi. Seega pole võimalik, et see väide kõlab 2015 korda.

Hindamisjuhend: Lahenduse allpool märgitud osade eest antavad punktid summeeriti.
* Näidatud, et kui kilplasel on paarisarv tuttavaid, siis võõraid on paaritu arv ja vastupidi: 1p
* Pandud tähele, et kilplane, kel on paarisarv tuttavaid, väidab paarisarv kordi, et tal on paarisarv tuttavaid: 3p
* Näidatud, et kilplane, kel on paaritu arv tuttavaid, väidab paarisarv kordi, et tal on paarisarv tuttavaid: 3p

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks (Kontrolltöö MAA01-I)

Ülesanne 1. (5p) See ülesanne koosneb alaülesannetest, mis ei ole omavahel seotud.

a) On kümme järjestikust naturaalarvu. Need kümme arvu liidetakse ja saadud summast lahutatakse kõige suurema ja kõige väiksema arvu vahe. Kas tulemuseks on paaris– või paaritu arv?

b) Kas arv $S = m^4 + 5m^3 + m^2 + 2m + 5$ on paaris- või paaritu arv, kui m on naturaalarv?

c) Ritta on kirjutatud $m = 2 \cdot k$ positiivset täisarvu. Teada on, et nende arvude korrutis on paarisarv. Mitu neist ritta kirjutatud arvudest võivad olla paaritud?

Ülesanne 2. (5p) Kas leiduvad sellised naturaalarvud a ja b nii, et $(a + 1)(b - 1)(a - b) = 2014201520162017$? Põhjenda.

Ülesanne 3. (5p) Sõnas *LÄÄNEMERI* vastavad erinevatele tähtedele erinevad numbrid ja ühesugustele tähtedele ühesugused numbrid.
Teada on, et $L + Ä \cdot Ä$ ja $M + E \cdot M$ on paaritud arvud ning $I \cdot L + I \cdot Ä$, $Ä + N + L \cdot Ä$, $R + Ä - L - N$ ja $I + R$ on paarisarvud.

a) Kas avaldise $L \cdot Ä + Ä \cdot N + E \cdot M + E \cdot R + I$ väärtus saab jaguda arvuga 2? Põhjenda.

b) Leia vähim üheksakohaline arv, mis saab neil tingimustel vastata sõnale *LÄÄNEMERI*.

Ülesanne 4. (5p) Tahvlile on kirjutatud järjest kõik naturaalarvud 1, 2, 3, . . . , 1001, 1002. Ühe käiguga tuleb tahvlil olevatest arvudest kaks kustutada ja kirjutada tahvlile nende arvude vahe. Kas on võimalik, et pärast teatud arvu käikude sooritamist on tahvlile jäänud vaid arv 0? Põhjenda.

Ülesanne 5. (5p) Konstruktor koosneb magnetkuulidest ja juhtmetest, mille kummaski otsas on samuti magnet. Kas on võimalik moodustada kujund 11-st kuulist nii, et igaüks neist oleks ühendatud juhtmete abil täpselt 3 ülejäänud kuuliga? Põhjenda.