TÜ TEADUSKOOL

VÄRVIMISED

Ettevalmistus matemaatikaolümpiaadiks II

Koostanud Raili Vilt

VÄRVIMISED

Kõige tuntum värvimistega seotud probleem matemaatikas on nelja värvi probleem.
Probleem: kas suvalist poliitilist kaarti (tasapinnal või keral) saab värvida nelja või väiksema arvu värviga nii, et mistahes kaks ühise piiritükiga riiki oleksid erinevat värvi.
Probleemi selline püstitus pärineb aastast 1852 kui F. Guthrie märkas, et neljast värvist piisab, kui värvida Inglismaa erinevaid administratiivpiirkondi. Ta arutas seda tähelepanekut oma vennaga, et kas tõesti piisab neljast värvist mistahes kaarti korral. Viimane omakorda võttis ühendust matemaatik DeMorganiga ning esimest korda jõudis see probleem avalikkuse ette aastal 1878. Sellest ajast peale tegelesid antud probleemiga paljud matemaatikud ja tuhandeid niisama huvilised. Peaaegu saja aasta jooksul ei suudetud tõestada, kas see on alati nii või mitte. (Konstrueeriti näiteid kaartidest, mille korral neljast värvist ei piisaks ning teised jälle otsisid nende korral võimalust, kus teisiti värvides piisaks siiski vaid neljast värvist. Suudeti tõestada, et mistahes kaarti, kus ei ole rohkem kui 41 riiki, saab värvida nelja värvi abil. 19. sajandi lõpus tõestati, et mistahes kaarti on võimlaik värvida 5 värviga.) Alles aastal 1979 tõestasid ameerika matemaatikud K. Appel ja W. Haken, et tõesti mistahes kaarti saab värvida nelja värviga nii, et mistahes kaks ühise piiritükiga riiki oleksid erinevat värvi.

Märkus: Praktikas aga tulevad kitsendused ja selline värvimine ei pruugi alati võimalik olla, kui lähtuda, et ühele riigile vastavad kõik tasandi osa oleks sama värvi. Selline olukord võib tekkida siis, kui riigi territoorium koosneb kahest või enamast mitte ühist punkti omavast osast.

Siin saad proovida sellist nelja värviga värvimist Eesti maakondade kaardil.

Järgnevates näiteülesannetes on öeldud, et tasand on teatud värve kasutades värvitud ja neil juhtudel tuleb siis tõestada erinevaid väiteid.

Näide 1. Tasandi kõik punktid on värvitud kasutades kahte värvi - musta ja valget nii, et tasandil leidub mõlemat värvi punkte. Tõesta, et alati leidub kaks sama värvi punkti, millede vaheline kaugus on 1 ühik.

Lahendus: Vaatleme võrdkülgset kolmnurka küljepikkusega 1 ühik. Selle kolmnurga tippudest vähemalt kaks on värvitud sama värviga. Seega tõesti leidub alati kaks sama värvi punkti, millede vaheline kaugus on 1 ühik.

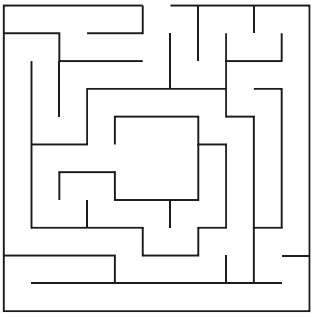
Näide 2. Tasandi kõik punktid on värvitud kasutades kahte värvi - sinist ja punast nii, et tasandil leidub mõlemat värvi punkte. Tõesta, et alati leidub kaks eri värvi punkti, millede vaheline kaugus on 1 ühik.

Lahendus: Valime kaks suvalist eri värvi punki A ja B. Olgu punkt A punane ja punkt B sinine.
Kui AB = 1, siis punktid A ja B ongi otsitavad.
Kui AB < 1, siis leidub punkt C, mis on mõlemast valitud punktist kaugusel 1 ning sõltuvalt punkti C värvist on otsitavateks punktideks kas A ja C või C ja B.
Kui AB > 1, siis lõigul AB märgime punktid M_1, M_2, M_3, . . . , M_n nii, et lõigud AM_1, M_1M_2, M_2M_3, jne oleks pikkusega 1 ühik. Kui punktide M_1, M_2, M_3, . . . , M_n, seas leidub vähemalt üks sinine punkt, siis sobivad punktid leiduvad. Näiteks M_1, M_2, on punased ja M_3 sinine, siis otsitavad punktid on M_2 ja M_3. Kui punktid M_1, M_2, M_3, . . . , M_n on kõik punased, siis valime neist esimese M_k nii, et $BM_k \leq 1$. Ja siit järgneb juba eelnevaga analoogne arutelu.

Näide 3. Tasandi kõik punktid on värvitud kasutades kahte värvi - musta ja valget nii, et tasandil leidub mõlemat värvi punkte. Tõesta, et sel tasandil leidub võrdhaarne kolmnurk, mille kõik tipud on ühte värvi.

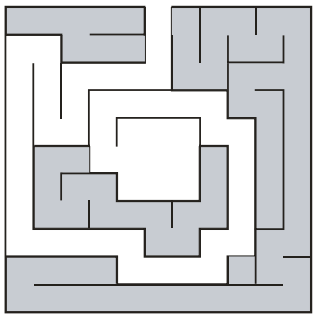
Lahendus: Vaatleme sel tasandil korrapärast viisnurka. Tema viiest tipust vähemalt kolm on värvitud ühte ja sama värvi. Need tipud ongi otsitava võrdhaarse kolmnurga tippudeks.

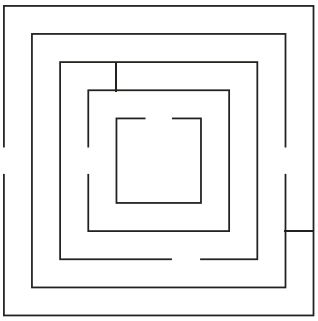
Järgnevates ülesannetes ei ole öeldud, et tegu on “värvimistega”, küll aga on lihtsam lahendada ja põhjendada kui “värvimine” appi võtta.



Olgu meil antud labürint ja püüame leida teed selle läbimiseks. Selle leidmiseks võtame kasutusele värvid nii, et tupikuteks olevad labürindi osad värvime tumedaks.

Värvimata ossa jääb ka tee, mis viib ühest punktist teise.





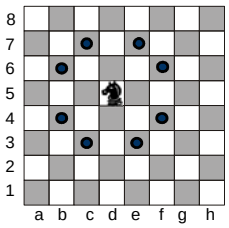
Kasutades sama meetodit, leidke kui palju on erinevaid teid kõrvaloleva labürindi läbimiseks ja milline on neist kõige lühem.
(Kaks teed loeme erinevateks, kui nad erinevad vähemalt ühe läbitud lõigu võrra.)

Neis näidetes aitas värvimine meil näha lahendust ja teisel juhul lihtsustas see selgitamist, miks meil rohkem võimalusi ei saa olla.

Valdavalt on värvimiste abil lahendatavates ülesannetes küsitud, kas teatud olukord on võimalik või ei.

Kui selline läbimine/jaotamine on võimalik, siis tuleb näidata kuidas seda on võimalik teha ning kui ei ole, siis tuleb põhjendada, miks ei ole võimalik.

Näide 4. Kas on võimalik malelaua kogu ruudustik 8×8 läbida ratsuga nii, et ratsu läbiks kõiki malelaua ruute täpselt ühe korra ja lõpuks käiks jälle sellele ruudule, millelt alustas?
(Ratsu võib liikuda ühele neist väljadest, mis on kõige lähemal sellele väljale, millel ta asub, ei asu aga samal real, liinil või diagonaalil. Joonisel on täppidega tähistatud need ruudud, kuhu saab käia ruudult d5.)

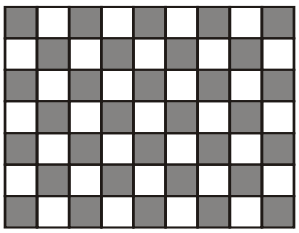


Lahendus: On võimalik. Selliseks läbimiseks on erinevaid võimalusi ja olgu siinkohal toodud üks neist.

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	**64**	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

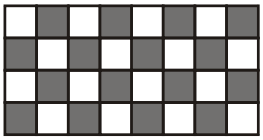
Märkus: Sellise tee otsimisel on kasulik Varnsdorfi reegel: iga käiguga tuleb ratsu asetada võimalikest ruutudest sellisele, millelt on võimalik käia vähimale võimalikule arvule ruutudele. Kui selliseid ruute on rohkem kui üks, siis võib neist valida ükskõik millise.

Näide 5. Kas on võimalik ruudustik 7×9 läbida ratsuga nii, et ratsu läbiks kõiki malelaua ruute täpselt ühe korra ja lõpuks käiks jälle sellele ruudule, millelt alustas?



Lahendus: Selline läbimine ei ole võimalik.
Selle tõestamiseks võtame appi värvimise.
Värvime ruudustiku 7×9 malelaua korras mustaks ja valgeks nii, et alumine vasakpoolne nurga ruut on must.
Sellel juhul on ruudustiku kõik nurgaruudud musta värvi ja kokku on 32 musta ja 31 valget ruutu. Kuna meie ruudustikus on neid aga erinev arv, siis järelikult selline läbimine ei ole võimalik.

Näide 6. Kas on võimalik ruudustik 4×8 läbida ratsuga nii, et ratsu läbiks kõiki malelaua ruute täpselt ühe korra ja lõpuks käiks jälle sellele ruudule, millelt alustas?



Kui me selle ruudustiku värvime samamoodi malelaua korras kahe värviga, siis selgub, et musti ja valgeid on võrdselt – mõlemaid on 16. Seega, kui näites 5 näitasime, et kuna neid oli erinev arv, ei olnud selline läbimine võimalik, siis nüüd, kus neid on võrdselt peaks selline läbimine võimalik olema. Kui vastaksime, et see on võimalik, siis lahenduseks peaksime esitama ühe sellise skeemi.

Pärast mõningaid katsetusi peame tõdema, et siiski ei õnnestu sellist teed leida. Kas oleme halvasti otsinud või vaatamata sellele, et mõlemat värvi ruute on võrdne arv, ei ole siiski selline läbimine võimalik?

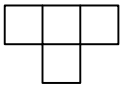
P	S	P	S	P	S	P	S
R	K	R	K	R	K	R	K
K	R	K	R	K	R	K	R
S	P	S	P	S	P	S	P

Lahendus: Värvime ruudustiku 4×8 joonisel näidatud viisil nelja erineva värviga (S – sinine, P – punane, K – kollane, R – roheline).
Märkame, et sinist värvi väljale saab nupp sattuda vaid kollaselt ruudult ja vastupidi, siniselt ruudult saab ratsu käia vaid kollasele ruudule. Seega ratsu teekonnal peab kollasele ruudule järgnema sinine ja sinisele jälle kollane.
Kollaselt väljalt saab ratsu liikuda ka rohelisele ruudule. Kui ratsu liigub kollaselt rohelisele, siis selleks, et minna sinisele ruudule tuleb tal jälle minna kõigepealt kollasele ruudule. Siit selgub, et kollaste ruutude arv peab teekonnal olema suurem kui siniste oma. Tegelikult on meil aga siniseid ja kollaseid ruute võrdselt. Saadud vastuolu näitab, et ratsukäigul ei ole võimalik läbida ruudustikku mõõtmetega 4×8.

Näide 7. Malelauast mõõtmetega 8×8 lõigati välja ülemine vasakpoolne ja alumine parempoolne ruut. Kas järgijäänud mängulauda on võimalik katta doominokividega ehk ristkülikutega 2×1 nii, et iga doominokivi kataks täpselt kahte mänguruutu?

Lahendus: Värvime doominokivi kahest mänguruudust ühe valgeks, teise mustaks. Kui malelauast järgi jäänud lauda oleks võimalik katta doominokividega, siis mängulaual peaks musti ja valgeid ruute olema võrdne arv. Tegelikult on mängulauale jäänud ühte värvi ruute 30 teisi aga 32. Järelikult ei ole mängulauda doominokividega võimalik katta.

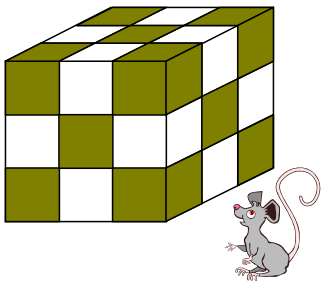
Näide 8. Tõesta, et 10×10 ruudustikku ei saa tükeldada ainult joonisel olevateks tükkideks.



Lahendus: Värvime 10×10 ruudustiku ruudud vaheldumisi mustaks ja valgeks nagu on malelaual. Paneme tähele, et üks tükk katab malelaual alati 3 ühte värvi ja ühe teist värvi ruudu. Kogu ruudustiku katmiseks on vaja $100 : 4 = 25$ tükki, mis katavad kokku paaritu arvu musti ja paaritu arvu valgeid ruute. Samal ajal on aga 10×10 malelaual kumbagi värvi ruute paarisarv. Järelikult ei ole võimlaik tükeldada 10×10 ruudustikku ainult ülesandes antud tükkideks.

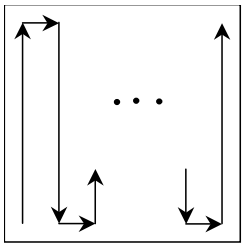
Näide 9. Hiir hakkab sööma juustust kuubikut, mille serva pikkus on 3 ja mis on jaotatud 27-ks ühikkuubiks. Kui hiir on ära söönud mingi ühikkuubi hakkab ta sööma järgmist ühikkuupi, millel oli eelnevaga ühine tahk. Kas hiir saab ära süüa kõik ühikkuubid peale keskmise?

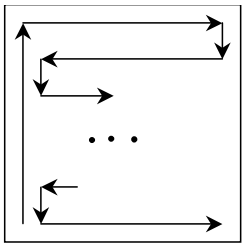
Lahendus: Värvime juustu ühikkuubid nii nagu on joonisel näidatud - siis musti ühikkuupe on 14, valgeid aga 13 ning keskmine kuupidest on valge. Kui hiir sõi ära 26 ühikkuupi, siis neist 13 olid mustad ja 13 olid valged. Et aga keskmine kuubik on valge, aga valged kuubid sõi juba hiir kõik ära, siis 26 söödud kuubi seas peab kindlasti olema ka keskmine. Järelikult selline söömine ei ole võimalik.



Näide 10. (ol. lõppvoor,9.klass õa. 95/96) Kolm last otsustasid teha endile lauamängu, nummerdades $m \times n$ ruudust koosneva mängulaua ruudud arvudega 1 kuni mn nii, et ruudud numbritega 1 ja mn oleksid mängulaua nurkades ning igal kahel järjestikuste numbritega ruudul oleks ühine külg. Mängu algusruudu (numbriga 1) asukohas suutsid lapsed kokku leppida, lõppruutu (numbriga mn), aga tahtis igaüks neist paigutada mängulaua erinevasse nurgaruutu. Milliste arvude m ja n korral on võimalik iga lapse tahtmist mööda toimida?

Lahendus: Vastus: On võimalik parajasti siis, kui n ja m on mõlemad paaritud arvud.
Värvime mängulaua ruudud malekorras mustaks ja valgeks. On selge, et siis peavad üht värvi ruutudel asuma paaritud ja teist värvi ruutudel paarisarvud. Kui ruute on võimalik nummerdada vastavalt iga lapse soovile, siis peavad mängulaua kolm (ning järelikult ka kõik neli) nurgaruutu olema ühte ja sama värvi, st. m ja n peavad mõlemad olema paaritud arvud. Paaritute arvude m ja n korral on võimalik nummerdada ruudud iga lapse soovi kohaselt näiteks nii, nagu on joonisel näidatud.

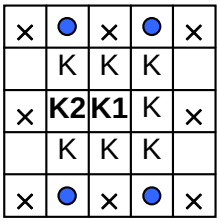




Näide 11. 8×8 ruudust koosneva malelaua vasakus alumises nurgas paiknevad 3×3 ruuduna üheksa “hüppavat kuningat”, mille ainus võimalik käik on hüpe üle mõne teise kuninga vabale ruudule (seega näiteks ruutudel a1 ja c3 asuvad kuningad ei saa algul liikuda, kuningas ruudult b3 aga saab hüpata ruudule d3 või d1). Kas need kuningad võivad mingi arvu kirjeldatud hüpete järel paikneda 3×3 ruuduna

a) malelaua vasakus ülemises nurgas;

b) malelaua paremas ülemises nurgas?



(Selgituseks hüppavate kuningate juurde: kuningas K1, saab hüpata ristiga märgitud ruutudele, kuningas K2 saab hüpata vaid ringiga tähistatud ruutudele.)

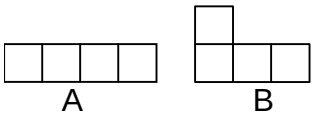
Lahendus 1:a) värvime malelaua ruudud tavalisel viisil. Kuna iga kuningas saab liikuda ainult üht värvi ruutudel, jääb mustadel ruutudel asuvate kuningate arv sõltumata käikudest pidevalt samaks. Seega pole võimalik kuningaid reeglite kohaselt vasakult alumisest nurgast vasakusse ülemisse nurka ümber paigutada, kuna vasakus alumises nurgas asub 5 kuningat mustadel ruutudel, vasakul ülemises nurgas aga ainult 4.

b) Värvime malelaua liinid (vertikaalselt) üle ühe mustaks ja ülejäänud valgeks. Ka nüüd saab iga kuningas liikuda ainult üht värvi ruutudel, kuid vasakus alumises nurgas paiknevad mustadel ruutudel 6 kuningat, paremas ülemises nurgas paikneksid mustadel ruutudel aga ainult 3 kuningat.

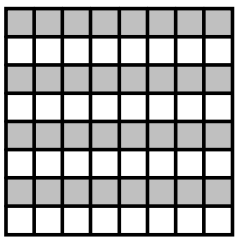
Lahendus 2: Värvime malelaua horisontaalread üle ühe mustaks ja ülejäänud valgeks. Jällegi saab kuningas liikuda ainult üht värvi ruutudel, kuid vasakus alumises nurgas paiknevad mustadel ruutudel 6 kuningat, kummaski ülemises nurgas paikneksid mustadel ruutudel aga ainult 3 kuningat.

Lahendus 3: Jaotame malelaua 2×2 ruutudeks ja paneme tähele, et iga kuningas, mis algul asub mingi sellise ruudu vasakus nurgas, saab ka edaspidi paikneda ainult mõne sellise 2×2 ruudu vasakus alumises nurgas. Algseisus malelaua alumises vasakus nurgas on selliseid kuningaid 4, malelaua vasakus ülemises nurgas oleks neid aga ainult 2 ja paremas ülemises nurgas ainult 1.

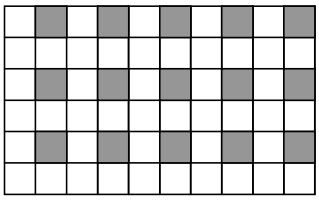
Näide 12. Tõesta, et 8×8 ruudustikku ei saa tükeldada 15-ks joonisel näidatud tükiks A ja üheks tükiks B.



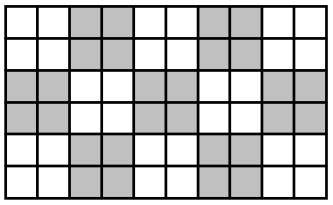
Lahendus: Värvime 8×8 ruudustiku read vaheldumisi mustaks ja valgeks nii nagu joonisel. Saadud “triibulises” ruudustikus on nii musti kui ka valgeid ruute paarisarv, kumbagi 32. Paneme tähele, et tükk B katab selles ruudustikus alati 3 ühe värvi ja ühe teist värvi ruudu, tükk A aga alati paarisarvu kumbagi värvi ruute. Seega kataksid 15 tükki A ja üks tükk B kokku paaritu arvu musti ja paaritu arvu valgeid ruute, samal ajal kui kogu ruudustikus on nii musti kui ka valgeid ruute paarisarv. Järelikult ei ole võimalik tükeldada 8×8 ruudustikku 15 tükiks A ja üheks tükiks B.



Näide 13. Kas ruudustikku 6×10 saab tükeldada ainult ristkülikuteks mõõtmetega 1×4.



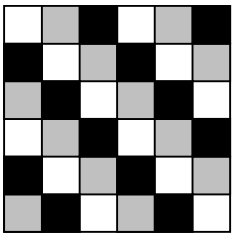
Lahendus 1: Värvime ruudustikus 6×10 mustaks ainult need ruudud, mis on paarisarvulise rea ja paarisarvulise veeru ristumiskohas.
On selge, et igas ristkülikus mõõtmetega 1×4 on paarisarv musti ruute (kas 0 või 2). Seega peaks ruudustikus olema paarisarv musti ruute. Ruudustikus on aga musti ruute 15, mis on paaritu arv ja järelikult selline jaotamine ei ole võimalik.



Lahendus 2: Jaotame 6×10 ruudustiku 2×2 ruutudeks ning värvime need kahe värviga malelaua taoliselt.(vt. joonist) Sellise värvimise korral on küll nii musti kui ka valgeid ruudustiku ruudukesi paarisarv, kuid ühtesid on nelja võrra rohkem kui teisi. Iga ristkülik mõõtmetega 1×4 aga katab sellise värvimise korral alati musti ja valgeid ruute võrdsel arvul, kumbagi 2. Seega ei ole 6×10 ruudustikku võimalik tükeldada ainult ristkülikuteks mõõtmetega 1×4.

Näide 14. Kas 11-st ristkülikust mõõtmetega 1×3 ja ühest joonisel näidatud kolmest ühikruudust koosnevast nurgikust on võimalik moodustada ruut mõõtmetega 6×6?

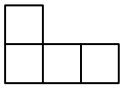
Lahendus 1: Oletame, et on võimalik moodustada. Värvime moodustunud ruudu mööda diagonaale kolme värviga. (vt. joonist) On selge, et sõltumata nurgiku asukohast on tema kaks ruutu sama värvi ning iga ristkülik 1×3 koosneb kolme erivärvi ruudust. Ruudus on kõiki kolme värve võrdselt. Seega ei ole võimalik neist moodustada ruutu 6×6.



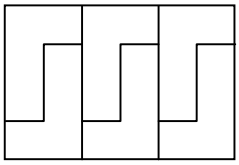
Lahendus 2: Oletame, et selle ruudu moodustamine on võimalik ning kirjutame selle ühikruutudesse ridadena arvud 1, 2 ja 3 nii nagu joonisel näidatud. On selge, et ruudustikus olevate arvude summa jagub arvuga 3 ning et ka mistahes ristkülikusse mõõtmetega 1×3 jäävate arvude summa jagub arvuga. On selge, et kuidas nurgik ka ei asetseks, temasse jäävate arvude summa ei saa jaguda arvuga 3. Seega tekib vastuolu, sest kui üks liidetav ja summa jaguvad arvuga k, siis peab ka teine liidetav jaguma arvuga k.

3	3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1
3	3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1

Näide 15. (lahtine võistlus, noorem rühm, 16.jaan 2000) Milliste n väärtuste korral saab $6 \times n$ ruudust koosneva ristküliku jaotada joonisel näidatud kujuga tükkideks?



Lahendus: Jaotame ristküliku kuueks $1 \times n$ ruudust koosnevaks ribaks ning värvime need vaheldumisi mustaks ja valgeks. On lihtne veenduda, et kuidas me üht tükki ruudustikku ka ei paigutaks, sisaldab ta kas kolm musta ja ühe valge ruudu või kolm valget ja ühe musta ruudu. Olgu mingi n korral ruudustik nõutud kujuga tükkideks jaotatud. Kuna musti ja valgeid ruute on ruudustikus ühepalju, siis esineb ka kumbagi liiki tükke ühepalju. Seega kokku on tükke paarisarv ning et iga tükk koosneb neljast ruudust, siis tükkidega kaetud ruutude arv 6n jagub 8-ga. Siit saame, et arv 3n jagub 4-ga, mistõttu n jagub 4-ga.



Iga neljaga jaguva arvu $n = 4k$ korral saame $6 \times 4k$ ruudustiku nõutud kujuga tükkideks jaotada järgmiselt: jaotame kõigepealt ruudustiku k osaks, millest igaühe suurus on 6×4 ruutu, need osad aga tükeldame nii, nagu näidatud joonisel.

Hindamisjuhend: (max 7p) Lahenduse alltoodud osade eest antud punktid summeeriti.
Tõestus, et $n \neq 4k$ korral pole tükeldus võimalik: 5p
Sealhulgas:
*selgitus, miks n peab olema paarisarv: 1p
tõestus, et n = 4k korral on tükeldus võimalik:2p
sealhulgas:
näide ainult n = 4 jaoks 1p.
Kommentaar: Üllatavalt suur osa lahendajatest eeldas kohe, et sobiva tükelduse saamiseks tuleb ristkülik kindlasti kõigepealt jaotada 4×2 ristkülikuteks. See ei ole õige ja sellised lahendused enamasti üle 2 punkti ei saanud. Paljud väitsid ka lihtsalt ilma põhjenduseta, et tükke peab kindlasti olema paarisarv - ka sellised lahendused said maksimaalselt 3 punkti.

ÜLESANDED

Ülesanne 1. (5p) Korrapärase seitsenurga tipud on värvitud kahte värvi - valgeks ja mustaks. Tõesta, et nende seas leidub kindlasti kolm sama värvi tippu, mis on tippudeks võrdhaarsele kolmnurgale. Kas analoogne väide kehtib ka korrapärase kaheksanurga korral?

Ülesanne 2. (5p) Ruudustikust mõõtmetega 100×100 lõigati välja üks ühikruut. Kas alles jäänud ühikruutudest koosnevat välja on võimalik katta võrdhaarsete täisnurksete kolmnurkadega, mille hüpotenuusi pikkus on kaks ühikut ning kolmnurgad asetseks nii, et hüpotenuus ühtiks ruudustiku joontega ning kaatetid ühikruutude diagonaalidega?

Ülesanne 3. (5p) Kas ruudustikku 8×8 on võimalik katta 32 ristkülikuga mõõtmetega 1×2, nii, et neist 17 oleks asetatud horisontaalselt ja 15 vertikaalselt?

Ülesanne 4. (5p) Ruudustiku 5×5 igal ruudul istub üks konn. Teatud ühel ja samal hetkel hüppab iga konn naaberruudule, mis omas esialgsega ühist serva. Tõestage, et peale hüppamist jääb ruudustikku vähemalt üks tühi ruut.

Ülesanne 5. Tõestage, et arve 40, 41, 42, . . . , 98, 99 ei ole võimalik jagada neljastesse rühmadesse nii, et igas rühmas kas siis kümneliste või üheliste numbrid oleksid ühesugused ja vastavalt siis kas üheliste või kümneliste numbrid oleksid järjestikused. Näiteks moodustaksid ühe rühma arvud 54, 55, 56, 57 või siis arvud 44, 54, 64, 74.
Leidke ülesandele tõlgendus, et selle lahendust saaks põhjendada “värvimiste” abil.