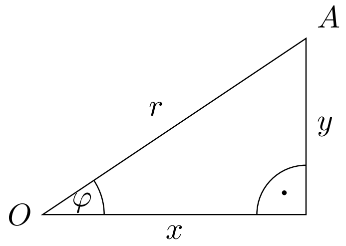
Orbiitide stabiilsusest

Eero Vaher

1 Ühe keha probleem



Olgu koordinaatide alguspunktis O keha massiga M ning punktis A osake massiga m, kusjuures $M \gg m$, nii et punktis O oleva massivse keha võib lugeda paigalseisvaks. Osakese liikumist käsitleme niisiis ühe keha probleemina. Mõjugu osakesele massivse keha poole suunatud jõud ning sõltugu selle jõu tugevus ainult kehadevahelisest kaugusest. Sellist jõudu nimetatake tsentraalseks jõuks. Nii gravitatsioonijõud kui Coulombi jõud on tsentraalsed jõud. Juhul kui osakese kiirusvektor ning lõik OA ei ole samasihilised, määravad need üheselt tasandi. Juhul kui need on samasihilised, leidub lõpmatult palju tasandeid, mis sisaldavad lõiku OA, ning me võime neist valida ühe suvalise. Kuna nii osakese kiirus kui ka sellele mõjuv jõud on meie poolt valitud tasandis, siis jääb osake sellesse tasandisse ning selle asukohta saab kirjeldada kahe koordinaadiga sellel tasandil. Neiks koordinaatideks võivad olla ristkoordinaatid x ja y, aga meie jaoks on otstarbekam kasutada polaarkoordinaate r ja φ. On selge, et $\tan\varphi = y/x$ ning $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ülesanne 1. Veenduda, et vektorid $\hat{\mathbf{r}} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ ning $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$ on teineteisega ristuvad ühikvektorid.

Osakese asukoha võib kirja panna kujul $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$. Osakese kiirus on selle asukoha tuletis aja järgi, seega

$$\dot{\mathbf{r}} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\varphi), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\sin\varphi)\right), \tag{1}$$

$$= (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi), \tag{2}$$

$$= \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{3}$$

Ülesanne 2. Näidata, et osakese kiirendus avaldub kujul

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\varphi}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{4}$$

Kuna osakesele mõjuv jõud on tsentraalne, siis

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} = 0 \tag{5}$$

ning kuna see avaldis peab kehtima iga r korral, siis

$$r^2\dot{\varphi} = \text{const.} \tag{6}$$

Tsentraalse jõu väljas liikuva osakese impulsimoment $L = mr^2\dot{\varphi}$ on niisiis jääv suurus.

Ülesanne 3. Näidata, et osakese kineetiline energia on

$$E_k = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2}. \tag{7}$$

Lisaks on võimalik defineerida osakese potentsiaalne energia E_p, mis on seotud osakesele mõjuva jõuga $\mathbf{F}$ avaldisega

$$\mathbf{F} = -\nabla E_p, \tag{8}$$

mis antud juhul lihtsustub kujule

$$F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}E_p. \tag{9}$$

Pole raske näha, et kui $F = -GMm/r^2$, siis

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + E_0, \tag{10}$$

kus osakese potentsiaalne energia lõpmatuses E_0 on vabalt valitav konstant, millest tuletise väärtus ei sõltu. Tihti valitakse $E_0 = 0$, kuna sellisel juhul on osakese trajektoori kuju lihtsasti määratav selle koguenergia $E = E_k + E_p$ märgist. Nimelt juhul $E < 0$ on osakese trajektoor ellips (piirjuhul $L = 0$ sirglõik), juhul $E = 0$ parabool ning juhul $E > 0$ hüperbool (piirjuhul $L \to \infty$ sirge). Osakese koguenergia võib niisiis kirja panna kujul

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}. \tag{11}$$

Eeldame edaspidises, et $L^2 > 0$. Meie jaoks on otstarbekas defineerida osakese efektiivne kineetiline energia

$$E'_k = \frac{m\dot{r}^2}{2} \tag{12}$$

ning osakese efektiivne potentsiaalne energia

$$E'_p = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}. \tag{13}$$

Tõepoolest, E'_k sõltub osakese radiaalkoordinaadi muutumise kiirusest, kuid mitte radiaalkoordinaadi väärtusest, ning E'_p sõltub osakese radiaalkoordinaadi väärtusest, kuid mitte selle muutumise kiirusest. Samuti kehtib avaldis

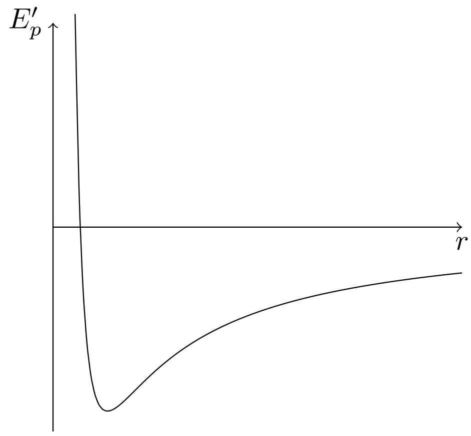
$$E = E'_k + E'_p. \tag{14}$$

Tasub tähele panna, et $\lim_{r\to 0} E'_p = \infty$ ning $\lim_{r\to\infty} E'_p = 0$.

Ülesanne 4. Näidata, et efektiivsel potentsiaalil on radiaalkoordinaadi väärtusel $r = L^2/GMm^2$ miinimum.

Ülesanne 5. Näidata, et kui osakese koguenergia on antud impulsimomendi väärtuse jaoks vähim, siis

$$\dot{\mathbf{r}} = \sqrt{GM/r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{15}$$



Osakese efektiivne potentsiaalne energia sõltub muidugi nii osakese impulsimomendist L kui sellele mõjuvat jõudu kirjeldavast tegurist GMm. Selle kvalitatiivne sõltuvus radiaalkoordinaadist on kujutatud kõrvaloleval joonisel. Kui osakese koguenergia väärtus on vähim selle impulsimomendi L poolt lubatu, siis selle radiaalkoordinaat ei muutu ning osake liigub ühtlase joonkiirusega ringorbiidil. Kui osakesele impulsimomenti muutmata energiat veidi juurde anda, siis leidub kaks erinevat radiaalkoordinaadi väärtust, mille korral on osakese efektiivse potentsiaali väärtus võrdne selle koguenergiaga. Neist väiksemat väärtust nimetatakse osakese periapsiidiks[1], suuremat väärtust nimetatakse apoapsiidiks[2]. Osake ei saa liikuda koordinaatide alguspunktile periapsiidist lähemale ega apoapsiidist kaugemale, kuna sellisel juhul peaks osakese efektiivne kineetiline energia olema negatiivne. Samuti on selge, et osakese radiaalkoordinaat peab omandama aja jooksul kõik väärtused periapsiidi ning apoapsiidi vahel, kuna osakese radiaalkiirus ning seega ka efektiivne kineetiline energia saab olla null vaid neis punktides, kus efektiivne potentsiaalne energia ning koguenergia on võrdsed, ning osakese radiaalkiirendus saab olla null vaid efektiivse potentsiaalse energia statsionaarsetes punktides.

Kui osakesele antakse selle impulsimomenti muutmata energiat juurde nii palju, et selle koguenergia kasvab mittenegatiivseks, siis leidub vaid üks radiaalkoordinaadi väärtus, mille korral osakese koguenergia ning efektiivne potentsiaalne energia on võrdsed. See tähendab, et osake hakkab lõpmatult kaugele liikuma kas kohe (kui $\dot{r} > 0$) või pärast periapsiidi ühekordset läbimist (kui $\dot{r} < 0$).

[1]Kui osake tiirleb ümber Maa (Päikese), siis öeldakse periapsiidi asemel perigee (periheel).
[2]Kui osake tiirleb ümber Maa (Päikese), siis öeldakse apoapsiidi asemel apogee (afeel).

2 Gaussi teoreem

Erinevate vektorväljade kirjeldamiseks kasutatakse tihti jõujooni. Jõujooned on mõttelised jooned, mis algavad või lõpevad alati laengutel, mille suund mingis punktis kirjeldab vastava välja suunda ning mille tihedus kirjeldab välja tugevust. Vaatleme näitena punktlaengu tekitatud välja. Olgu laeng kahe raadiustega r_1 ning r_2 mõttelise kontsentrilise sfääri ühises keskpunktis. Punktlaengu tekitatud jõujooned on sellelt lähtuvad või sellele suunatud kiired, seega kõik jõujooned, mis läbivad ühte sfääri, läbivad ka teist. Välja tugevuste suhe sfääridel, mida kirjeldab jõujoonte tihedus, on järelikult pöördvõrdeline sfääride pindalaga ehk pöördvõrdeline sfääride raadiuste ruutudega. See sõltuvus on tuttav nii Newtoni gravitatsiooniseadusest kui ka Coulombi jõu avaldisest.

Välja ning seda tekitavate laengute seose matemaatiliselt rangem sõnastus on füüsikas tuntud Gaussi teoreemina, mis (integraalkujul) ütleb, et mistahes suletud pinda läbiv välja voog on võrdeline selle pinna sisse jääva laengu väärtusega. Vaatleme näiteks punktmassi tekitatud gravitatsioonivälja $\mathbf{g}$. Sümmeetriakaalutlustel on väli igas punktis suunatud punktmassi poole ning selle tugevus on funktsioon punktmassi kaugusest. Olgu punktmass M mõttelise sfääri raadiusega r keskmes. Gaussi teoreem selle sfääri jaoks võtab kuju

$$4\pi r^2 g = -kM, \tag{16}$$

kus k on võrdetegur. Siit saab avaldada

$$g = -\frac{kM}{4\pi r^2}, \tag{17}$$

mille võrdlemisel Newtoni gravitatsiooniseadusega ilmneb, et $k = 4\pi G$. Välja tugevuse radiaalsõltuvus tuleneb asjaolust, et kolmemõõtmelises ruumis on kõigi punktlaengust mingil kindlal kauguselt olevate punktide hulk sfäär ning selle pindala sõltub selle raadiuse ruudust. Kui aga vaadelda punktlaengut kahemõõtmelises ruumis, siis tuleks Gaussi seadus kirja panna kujul

$$2\pi r g = -k_2 M, \tag{18}$$

kus k_2 on kahemõõtmelisse universumisse sobiv võrdetegur, mis peab erinema kolmemõõtmelise universumi võrdetegurist kasvõi dimensionaalsetel kaalutlustel. Järelikult kahemõõtmelises universumis

$$g = -\frac{-k_2 M}{2\pi r}. \tag{19}$$

Analoogilised mõttekäigud on muidugi võimalik läbi teha ka teistsuguse ruumimõõtmete arvu jaoks.

3 Kahemõõtmeline juht

Kahemõõtmelises universumis avaldub osakese kineetiline energia täpselt samal kujul kui kolmemõõtmeliseski, kuid kuna raskusjõu sõltuvus radiaalkoordinaadist on teistsugune, muutub vastavalt ka osakese potentsiaalne energia.

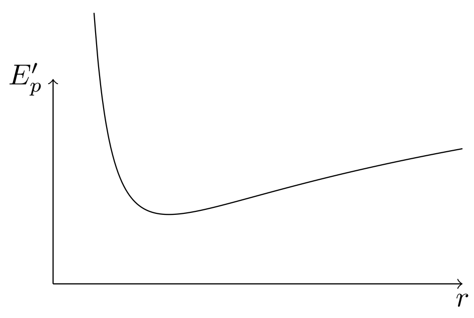
Ülesanne 6. Näidata, et kahemõõtmelises universumis avaldub osakese koguenergia võrrandi (11) asemel kujul

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + k\ln\frac{r}{r_0}, \tag{20}$$

kus k on võrdetegur ning r_0 on mingi fikseeritud raadius.

Taaskord on võimalik defineerida osakese efektiivne kineetiline energia ning efektiivne potentsiaalne energia, kuid erinevalt kolmemõõtmelisest juhust seekord

$$\lim_{r\to 0} E'_p = \lim_{r\to\infty} E'_p = \infty. \tag{21}$$



Efektiivse potentsiaalse energia kvalitatiivne sõltuvus radiaalkoordinaadist on kujutatud kõrvaloleval joonisel. Oluline on taibata, et erinevalt kolmemõõtmelisest juhust on kahemõõtmelise universumi osake lõpmatult sügavas potentsiaaliaugus. Osakesel ei saa kunagi olla piisavalt kineetilist energiat, et kesksest kehast kuitahes kaugele liikuda. Võib ka öelda, et kahemõõtmelises universumis pole teist kosmilist kiirust.

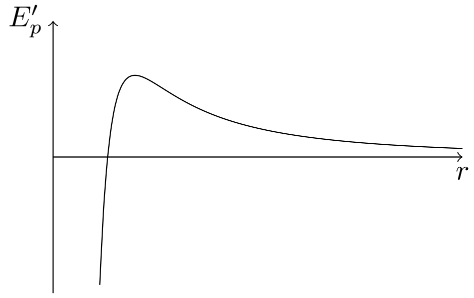
4 Kõrgemamõõtmelised juhud

Ülesanne 7. Näidata, et $N > 2$ ruumimõõtmega universumis avaldub osakese koguenergia kujul

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^{N-2}}, \tag{22}$$

kus k on sobiv võrdetegur ning kus potentsiaalse energia nullnivoo on lõpmatuses.

Juhul $N = 4$ on osakese efektiivse potentsiaalse energia sõltuvus radiaalkoordinaadist sõltuvalt impulsimomendi väärtusest kas $E_p' \propto 1/r^2$, $E_p' \propto -1/r^2$ või $E_p' = 0$. Esimesel juhul hakkab osake paratamatult lõpmatusse liikuma, teisel juhul liigub osake paratamatult koordinaatide alguspunkti. Kolmas juht eeldab impulsimomendi peenhäälestatust.



Kõrvalolev joonis kujutab kvalitatiivselt juhtu $N > 4$. Kehtivad piirväärtused $\lim_{r\to 0} E_p' = -\infty$ ning $\lim_{r\to\infty} E_p' = 0$. Efektiivse potentsiaalse energia graafikul leidub üks statsionaarne punkt, kuid see on miinimumi asemel maksimum. Olukorrale $E = E_p'$ küll vastab ringorbiit, kuid erinevalt kahe- või kolmemõõtmelisest juhust on see ebastabiilne ning iga osake liigub kas lõpmatusse või koordinaatide alguspunkti.

5 Ringorbiidi stabiilsus häirituste suhtes

Vaatleme nüüd ringorbiitide stabiilsuse uurimiseks nende ringorbiidil oleva osakese energia asemel ringorbiidi lähedasel orbiidil olevale osakesele mõjuvaid jõude.

Avaldise (4) ning Newtoni II seaduse põhjal kehtib võrrand

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = F(r), \tag{23}$$

kus $F(r)$ on osakesele mõjuva jõu tsentraalse jõu tugevus funktsioonina radiaalkoordinaadist. Kui osake tiirleb ringorbiidil, siis $\ddot{r} = 0$ ning võime kirjutada

$$-\frac{L^2}{mR^3} = F(R), \tag{24}$$

kus R on osakese impulsimomendile vastava ringorbiidi raadius. Olgu osakese radiaalkoordinaat väikese häirituse tõttu r. Defineerime häirituse suuruse kui $x = r - R$.

Ülesanne 8. Näidata diferentsiaalarvutusest tuttavat lähendust $f(x + \mathrm{d}x) \approx f(x) + f'(x)\mathrm{d}x$ kasutades, et osakese häiritus rahuldab võrrandit

$$m\ddot{x} + \big(-3F(R)/R - F'(R)\big)\, x = 0. \tag{25}$$

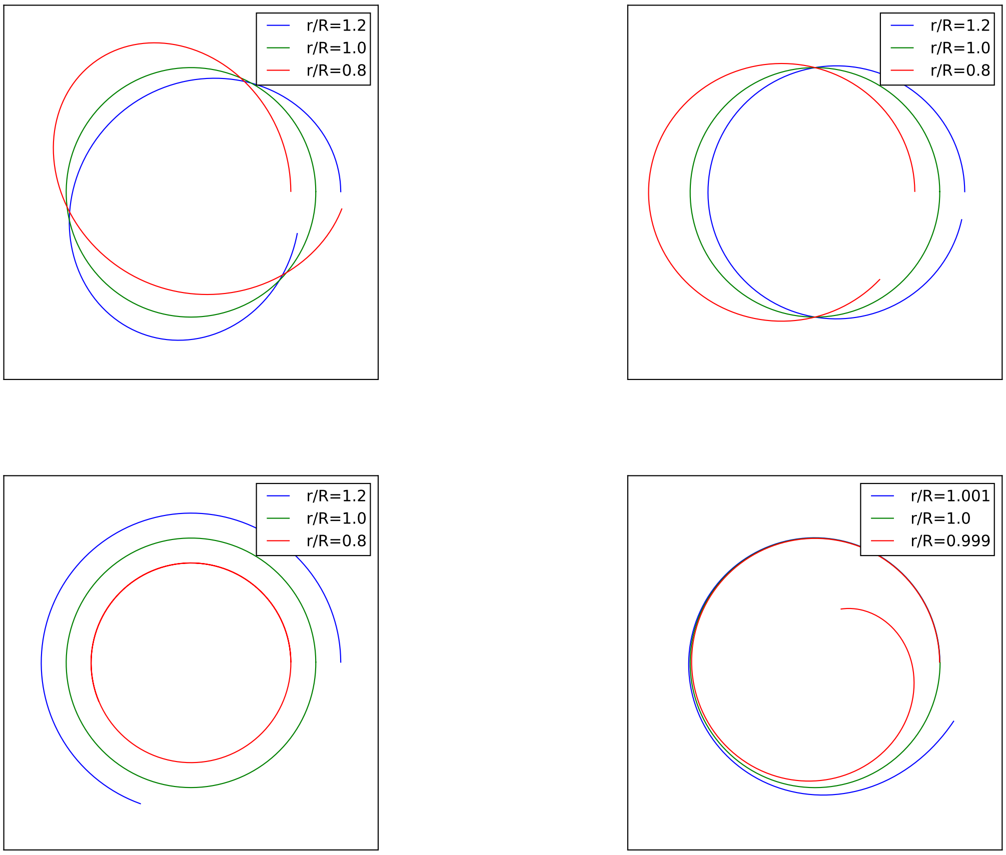
Juhul kui $(-3F(R)/R - F'(R) > 0$, siis kirjeldab saadud võrrand harmoonilist ostsillaatorit. Radiaalkoordinaadi kasvamisel (kahanemisel) hakkab osakesele mõjuma jõud, mis üritab radiaalkoordinaati vähendada (kasvatada). Kui ringorbiidil olevat osakest veidi häirida, siis hakkab selle radiaalkoordinaat seega ringorbiidile vastava väärtuse ümber võnkuma sarnaselt võnkumapandud pendliga. Juhul $(-3F(R)/R - F'(R) < 0$ on aga osakesele mõjuv jõud selle radiaalkoordinaadi hälbega samasuunaline, nii et osake lahkub ringorbiidilt jäädavalt olles sarnane künka otsast alla veereva kuulikesega.

Eelpool nägime, et N ruumimõõtmega universumis $F(r) = -k/r^{N-1}$, seega võime kirjutada

$$-3F(R)/R - F'(R) = 3k/R^N - (N-1)k/R^N. \tag{26}$$

See avaldis on positiivne ning ringorbiidid stabiilsed juhtudel $N = 2$ ning $N = 3$. Juhtudel $N > 4$ on ringorbiidid ebastabiilsed. Juhul $N = 4$ on selle avaldise väärtus täpselt null ehk häiritud osakesele radiaalsuunalist jõudu ei mõjugi, kuid kuna osakesele ei mõju ka algolekut taastavat jõudu, siis ei ole ringorbiit stabiilne.

Joonis 1 kujutab osakeste liikumist erinevate ruumimõõtmete arvuga universumites. Kõigil joonistel on kujutatud kolme võrdse impulsimomendiga osakest, millest üks on ringorbiidil ($r = R$), üks on algselt koordinaatide alguspunktile veidi lähema ($r < R$) ning üks veidi kaugemal ($r > R$). Osakestel on lastud liikuda ühe ringorbiidi perioodi vältel.



Joonis 1: Osakeste trajektoorid N-keha arvutustes. 2D juht ülal vasakul, 3D juht ülal paremal, 4D juht all vasakul ning 5D juht all paremal.

Tasub tähele panna, et kahemõõtmelisel juhul pole orbiidid sugugi ellipsid. Samuti on hästi näha, et neljamõõtmelisel juhul vastab kõigile ringorbiitidele üks impulsimomendi väärtus ning et viiemõõtmelisel juhul piisab juba radiaalkoordinaadi väga väikesest häiritusest, et osakese trajektoori oluliselt muuta.

6 Sarnaste massidega kehade liikumine

Seni vaatlesime ühe keha probleemi, kus osake tiirles palju massiivsema keha ümber ning massiivse keha võis lugeda paigalseisvaks. Vaatleme nüüd juhtu, kus kahe teineteist mõjutava keha massid on sarnased, nii et massivsema keha liikumist ei tohi arvestamata jätta. Olgu massivsema keha kohavektor $\mathbf{R}_1$ ning kergema keha kohavektor $\mathbf{R}_2$. Mõjutagu massiivsem keha kergemat jõuga

$$\mathbf{F}_{12} = F\frac{\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|}. \tag{27}$$

Ülesanne 9. Näidata, et kehtib

$$\frac{M\ddot{\mathbf{R}}_1 + m\ddot{\mathbf{R}}_2}{M + m} = \vec{0}. \tag{28}$$

See võrrand tähendab, et kahest kehast koosneva isoleeritud süsteemi masskese liigub väliste jõudude puudumise tõttu ühtlaselt ning sirgjooneliselt. Olgu $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ esimest keha teisega ühendav vektor.

Ülesanne 10. Näidata, et kehtib

$$\mu\ddot{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{F}_{12}, \tag{29}$$

kus $\mu = Mm/(M+m)$ on süsteemi taandatud mass.

Kahe keha probleemi saab niisiis alati jagada kaheks eraldiseisvaks ühe keha probleemiks. Üks neist kirjeldab süsteemi masskeskme liikumist ning teine süsteemi komponente ühendava vektori liikumist. Kahe keha süsteem on järelikult stabiilne samadel tingimustel kui ühe keha orbiit ning sellel pikemalt peatuma ei pea.

7 Keerulisemad massijaotused

Oleme näidanud, et tsentraalse jõu, mille tugevus on võrdeline suurusega $-1/r^a$, väljas on ringorbiidid stabiilsed vaid juhul $a < 3$. Punktlaengu tekitatud tsentraalse jõu tugevus saab omada vaid diskreetseid väärtuseid, mis sõltuvad ruumimõõtmete arvust kujul $a = N - 1$, kuid olukorras, kus välja ei tekita punklaengud, on võimalikud ka täisarvudest erinevad a väärtused. Heaks näiteks sellisest olukorrast on galaktikad. Nimelt ei ole galaktikate mass koondunud nende keskmesse, vaid on jaotunud väga suurele ruumalale. Saab näidata, et telgsümmeetrilises olukorras mõjutab osakesi vaid neist sümmeetriateljele lähemale jääb laeng. Kuna sümmeetriateljest eemale liikudes sissepoole jääv laeng kasvab, siis kahaneb tsentraalse jõu tugevus punktlaengu tekitatuga võrreldes aeglasemalt. Et ka galaktikates $a < 3$, siis on tähtede orbiidid neiski stabiilsed ning pole tarvis karta, et galaktikad iseenda raskuse all kokku kukuksid või iseenda pöörlemise tõttu laiali lendaksid.