Kodeeritud tehted

Koostanud M. Ivanov, E. Abel

Mis on matemaatiline reebus?

Matemaatiline reebus kujutab endast ühte aritmeetilistest tehetest (liitmine, lahutamine, korrutamine ja jagamine), kus kas mõned või koguni kõik numbrid on asendatud mingite sümbolitega (punktid, tähekesed, tähed, mõned geomeetrilised kujundid jne). Matemaatilised reebused on kodeeritud (šifreeritud, krüpteeritud) tekstide üks liikidest.

Kui kõik numbrid vaadeldavas tehtes on asendatud sümbolitega, siis kõneldakse **täielikult kodeeritud tehtest**, kui vaid mõned numbrid on asendatud, siis **osaliselt kodeeritut tehtest.**

Kui kõik numbrid on kodeeritud ainult tähestiku tähtedega, siis kõneldakse ka **tähelisest reebusest e tähereebusest**, kus iga number on asendatud ühe kindla tähega, kusjuures erinevad numbrid on kodeeritud erinevate tähtedega ning samad numbrid samade tähtedega. Klassikalise tähereebuse liitmistehtele

$$SEND + MORE = MONEY$$

mõtles välja inglane Henry Ernest Dudeney. Esmakordselt ilmus see reebus ajakirja „The Strand Magazine“ juulikuu numbris aastal 1924. Huvitav on, et Dudeney reebusel on ka oma tähendus (tõlkes „Saada rohkem raha“). See on lühike telegrammistiilis fraas, mida kasutavad sageli rahahädas tudengid kirjades oma vanematele või lunaraha taotlejad. Krüptoaritmeetika veebilehel (vt link vihiku lõpus) on ka selle eestikeelne analoog

$$SAADA + VEEL = PAPPI.$$

Mõlemal tähereebusel on üks ainuke lahend. Enne kui otsite nii Dudeney reebuse kui ka selle analoogi lahendeid vihiku lõpust, tutvuge vihikus antud materjaliga ja proovige need ise lahendada.

Kuidas lahendada matemaatilisi reebuseid?

Matemaatilise reebuse lahendamine tähendab kodeeritud tehte dekodeerimist, st selles esinevate kõikide sümbolite asendamist sobivate numbritega, kasutades selleks loogilist arutelu ja arvude vahelisi matemaatilisi seoseid. Sageli tuleb koostada ka võrrandeid ja neid lahendada.

Käesolevas vihikus piirdume liitmistehtega seotud tähereebuste lahendamisega ja eeldame, et kasutatud on vaid kümnendsüsteemi. Teistsuguste kodeeritud tehete näiteid ja ülesandeid võivad huvilised leida näiteks vihiku lõpus loetletud allikatest.

Kuigi matemaatilise tähereebuse lahendamise täpsed eeskirjad puuduvad, saab siiski anda mõningaid kasulikke näpunäiteid nende huvitavate ülesannete lahendamise hõlbustamiseks.

- Tähereebustes on iga tähega kodeeritud üks kindel number, kusjuures ühesugused numbrid kodeeritakse ühe ja sama tähega ning erinevad numbrid erinevate tähtedega.
- Enne lahendamist veenduge, et reebuses ei oleks enam kui kümme erinevat tähte. Vastasel juhul ei ole reebus lahenduv.
- Lahendamist alustage reeglist, et mitmekohaline täisarv ei alga numbriga 0. Seega kõik tähed, mis on täisarvudes vasakult poolt esimesed, ei saa olla numbri 0 tähiseks. Oleme kitsendanud võimalike numbrite hulka.
- Lähtuge aritmeetiliste tehete põhireeglitest. Näiteks, kui kahe liidetava viimasel kohal seisavad vastavalt tähed A ja B ning nende summa viimasel kohal on täht A, siis tähele B saab vastata vaid number 0.
- Sageli koosneb liitmise korral reebus kahest liidetavast arvust. Kui sellise liitmise korral on summas rohkem kohti kui liidetavates, siis algab summa kindlasti numbriga 1. Kui liidetavaid on aga kolm ja summas on rohkem kohti kui liidetavates, siis võib summa esimene number olla kas 1 või 2.
- Ärge kartke teha vigu. Võib-olla aitavad just need leida õige lahendustee.
- Ärge peljake erinevate võimaluste läbivaatamist. Mõned reebused nõuavad mitmete erinevate olukordade kannatlikku uurimist ja võimalik, et reebusel ongi mitu erinevat lahendit. Tasuks saate õige vastuse ja tubli treeningu oma nutikuse ja leidlikkuse arendamiseks.

Mida leiab sellest vihikust?

Vihikus tutvustatakse näiteülesannete varal matemaatiliste tähereebuste lahendamisvõtteid. Sageli võib ühte ülesannet lahendada mitmel moel. Seetõttu on lahendaja võimete ja oskuste arendamise huvides alati kasulik enne püüda ise lahendada antud ülesanne ja alles siis tutvuda vihiku koostaja pakutud lahendusskeemiga. Isegi kui saite kohe õige vastuse, võib lisatud lahendusskeemist leida midagi õpetlikku ja kasulikku järgmiste ülesannete lahendamiseks.

Tähereebustes võib kasutada kas väike- või suurtähti.

Vaatluse all on kümnendsüsteemi arvud, mille tähistamiseks kasutatakse levinud sümboolikat. Näiteks, sümbol ABC tähistab kolmekohalist naturaalarvu, mille kõik numbrid on erinevad (C üheliste number, B kümneliste number, A sajaliste number) ja kõrgema järgu (antud juhul sajaliste) number A selles arvus on nullist erinev. Sellise arvu võib esitada ka järguühikute kordsete summana

$$ABC = 100A + 10B + C,$$

kus $100A = 100 \cdot A$ ja $10B = 10 \cdot B$ (edaspidi kümnendesituse korral korrutusmärki ei kasuta).

Arv $abbc$ on neljakohaline naturaalarv, milles on kasutatud kolme erinevat numbrit a, b ja c ning mille esimene (tuhandeliste) number $a \neq 0$, keskmised (kümneliste ja sajaliste) numbrid on aga võrdsed. Näiteks arvule $abbc$ võib vastata arv 2005 (sel juhul $a = 2,\ b = c = 0,\ c = 5$) või näiteks arv 9224 ($a = 9,\ b = c = 2,\ c = 4$). Vajadusel võib selle arvu esitada ka kujul

$$abbc = 1000a + 100b + 10b + c = 1000a + 110b + c.$$

Kui olete vihiku materjaliga tutvunud, siis püüdke kõigepealt lahendada kontrolltöö ülesanded ja siis alustage testi tegemist.

Näiteülesanded

Näide 1. Leidke vähim ja suurim naturaalarv, mille kuju on $abbcca$.

Lahendus. Antud arv $abbcca$ on kuuekohaline, kasutatud on kolme erinevat numbrit a, b ja c, kusjuures $a \neq 0$.

Vähima naturaalarvu saamiseks peab kõrgeima järgu number olema võimalikest vähim. Seega $a = 1$, sest $a \neq 0$. Tähele b vastava numbri valikuks on üheksa võimalust ($0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$). Et otsime vähimat arvu, siis $b = 0$. Numbri c valikuks jääb kaheksa võimalust ($2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$). Et otsitav arv oleks vähim võimalik, peab $c = 2$. Seega vähim võimalik arv kujul $abbcca$ on 100221.

Suurima naturaalarvu saamiseks peab kõrgeima järgu number olema võimalikest suurim. Seega $a = 9$. Numbri b valime numbritest 0 kuni 8. Et otsime suurimat arvu, siis ilmselt $b = 8$ ja samadel kaalutlustel saame, et $c = 7$. Seega suurim võimalik kuuekohaline arv kujul $abbcca$ on 988779.

Vastus. Vähim arv on 100221, suurim arv on 988779.

Näide 2. Leidke summa

$$TERE + TULEMAST + KURSUSELE$$

vähim võimalik väärtus.

Lahendus. Antud summas on üheksa erinevat tähte A, E, K, L, M, R, S, T ja U. Seega ülesanne lahendub. Esitame summa kujul

						T	E	R	E
+		T	U	L	E	M	A	S	T
	K	U	R	S	U	S	E	L	E
						?			

Mida väiksemad on suuremate järkude numbrid liidetavates, seda väiksem on summa. Teame, et esimesed numbrid on nullist erinevad, seega $T \neq 0$ ja $K \neq 0$. Number K kui kõige kõrgema järgu number liidetavates peab olema võimalikest vähim. Järelikult $K = 1$.

Otsime numbrite T ja U väärtused. Kõige väiksemad numbrid, mis võivad nendele tähtedele vastata, on 0 ja 2. Et $T \neq 0$, siis $U = 0$ ja $T = 2$. Saame

						2	E	R	E
+		2	0	L	E	M	A	S	2
	1	0	R	S	0	S	E	L	E
						?			

Järgmine kõrgema järgu number on R. Järelikult $R = 3$.

On selge, et tähtedele L ja S vastavad suuruselt järgmised numbrid 4 ja 5. Kuna järgmine täht S on kõrgemas järgus kui järgmine täht L, siis $S = 4$ ja $L = 5$. Saame

						2	E	3	E
+		2	0	5	E	M	A	4	2
	1	0	3	4	0	4	E	5	E
					?				

Analoogiliste põhjendustega leiame, et $E = 6$, $M = 7$ ja $A = 8$. Seega tehe on dekodeeritud nõutud tingimustel ja jääb leida summa

						2	6	3	6
+		2	0	5	6	7	8	4	2
	1	0	3	4	0	4	6	5	6
	1	2	3	9	7	5	1	3	4

Vastus. Vähim võimalik summa on 123975134.

Ülesanne. Leidke summa $TERE + TULEMAST + KURSUSELE$ suurim võimalik väärtus. Ülesande vastuse leiate vihiku lõpus.

Näide 3. Leidke numbrite T ja K väärtused, et kehtiks võrdus

$$KT + K + T = TK,$$

mis on inspireeritud lausest „KaheTäheline Kodeeritud Tehe TeadusKoolist“.

Lahendus. Anname sellele ülesandele kaks lahendust: kirjaliku liitmise ja kümnendesituse abil.

I lahendus. Et arvud KT ja TK on kahekohalised, siis $T \neq 0$ ja $K \neq 0$. Esitame tehte kujul

	K	T
+		K
		T
	T	K

Lähtume ühelistele vastavate numbrite summast $T + K + T$, mis lõppeb numbriga K. Kuna kolme numbri summa ei ületa arvu $9 \cdot 3 = 27$, siis kümneliste järku viiakse mitte rohkem kui kaks ühikut. Järelikult tuleb läbi vaadata kolm võimalust: a) $T + K + T = K$, b) $T + K + T = K + 10$ ja c) $T + K + T = K + 20$. Uurime saadud võrrandeid.

a) $T + K + T = K$	b) $T + K + T = K + 10$	c) $T + K + T = K + 20$
$2 \cdot T = 0$	$2 \cdot T = 10$	$2 \cdot T = 20$
$T = 0$	$T = 5$	$T = 10$
vastuolu, sest $T \neq 0$	sobib	vastuolu, sest T on number

Järelikult ainus sobiv võimalus on $T = 5$ ja kümneliste järku viiakse üle 1 ühik. Kümneliste liitmisel saame nüüd $K + 1 = T$, millest $K = T - 1 = 5 - 1 = 4$.

Lõpuks kontrollime saadud lahendi õigsust:

$$\text{vp: } KT + K + T = 45 + 4 + 5 = 54 \qquad \text{ja} \qquad \text{pp: } TK = 54.$$

II lahendus. Kasutame antud arvude kümnendesitusi ja saame antud võrdusest numbrite K ja T suhtes võrduse. Kuna $KT = 10K + T$ ja $TK = 10T + K$, siis kehtib võrdus

$$(10K + T) + K + T = (10T + K)$$

$$10K = 8T \quad | (:4)$$

$$5K = 4T.$$

Kuna võrduse vasak pool on arvu 5 kordne (st jagub 5-ga), siis peab ka selle võrduse parem pool olema arvu 5 kordne (jaguma 5-ga). Et arv 4 ei jagu arvuga 5, peab 5-ga jaguma number T. Kuna $T \neq 0$, siis ainus võimalus, et $T = 5$. Saadud võrdusest leiame ka numbri K väärtuse

$$K = \frac{4T}{5} = \frac{4 \cdot 5}{5} = 4.$$

Vastus. $K = 4, T = 5$.

Ülesanne. Leidke numbrite a ja b väärtused, et kehtiks võrdus

$$a + ba + a = ab.$$

Ülesande vastuse leiate vihiku lõpus.

Näide 4. Lahendage tähereebus

$$ACC + BCC = CAB.$$

Lahendus. Paneme tähele, et kõik sajaliste numbrid on nullist erinevad, st $A \neq 0$, $B \neq 0$ ja $C \neq 0$. Lahendame kahe meetodiga.

I lahendus. Lahendame kümnendesituse abil. Antud võrduse saame kujul

$$(100A + 10C + C) + (100B + 10C + C) = 100C + 10A + B$$

$$90A + 99B = 78C \quad | (:3)$$

$$30A + 33B = 26C.$$

Märkame, et võrduse vasak pool $30A + 33B = 3(10A + 11B)$ jagub arvuga 3, seega peab ka parem pool $26C$ jaguma arvuga 3. Et arv 26 ei jagu 3-ga, siis peab nullist erinev number C jaguma 3-ga. Saame kolm võimalust: kas $C = 3$, $C = 6$ või $C = 9$. Vaatleme neid võimalusi eraldi.

a) Kui $C = 3$, siis saame võrduse

$$30A + 33B = 78 \quad | (:3)$$

$$10A + 11B = 26.$$

On selge, et avaldise $10A + 11B$ viimane number peab olema 6. Kuna $10A$ lõpeb alati numbriga 0, siis $11B$ peab lõppema numbriga 6. Siit järeldub, et $B = 6$, mis on võimatu, sest sellisel juhul $10A + 11B = 10A + 66 > 26$.

b) Kui $C = 6$, siis saame võrduse

$$30A + 33B = 156 \quad | (:3)$$

$$10A + 11B = 52.$$

Kuna $10A + 11B$ viimane number peab ka olema 2, siis siit saame sobivad numbrid $B = 2$ ja $A = 3$.

c) Kui $C = 9$, siis saame võrduse

$$30A + 33B = 234 \quad | (:3)$$

$$10A + 11B = 78.$$

Lähtudes taas üheliste numbrist, peaks $B = 8$, mis on võimatu.

Seega ainus võimalus numbrite jaoks on $A = 3$, $B = 2$ ja $C = 6$, mis sobivad antud reebusesse, kuna $366 + 266 = 632$.

II lahendus. Lahendame kirjaliku liitmise abil. Antud võrduse esitame kujul

$$\begin{array}{r} A\ C\ C \\ +\ B\ C\ C \\ \hline C\ A\ B \end{array}$$

Otsime seoseid numbrite vahel. Saame, et $C + C \geq 10$, sest vastasel juhul oleks $A = B$, mis on lubamatu. Järelikult

- ühelistes: $C + C = B + 10$ (kümnelistesse viiakse üle 1 ühik);
- kümnelistes: $C + C + 1 = A + 10$ (ka sajalistesse viiakse üle 1 ühik, kuna igal juhul $10 < C + C + 1 < 20$);
- sajalistes: $A + B + 1 = C$.

Koostame saadud võrdustest võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} C + C = B + 10 \\ C + C + 1 = A + 10 \\ A + B + 1 = C \end{cases}$$

ehk süsteemi

$$\begin{cases} 2C = B + 10 \\ 2C = A + 9 \\ A + B + 1 = C \end{cases}.$$

Kasutame asendusmeetodit. Selleks avaldame esimesest ja teisest võrrandist vastavalt numbrid B ja A numbri C kaudu

$$B = 2C - 10 \qquad \text{ja} \qquad A = 2C - 9$$

ja paneme kolmandasse võrrandisse numbrite B ja A asemele saadud väärtused

$$(2C - 9) + (2C - 10) + 1 = C,$$

millest $3C = 18$ ja $C = 6$. Teised numbrid on siis $B = 2C - 10 = 2$ ja $A = 2C - 9 = 3$.

Vastus. $A = 3$, $B = 2$ ja $C = 6$.

Näide 5. Lahendage tähereebus

$$abc + bcd = cdab.$$

Lahendusskeem. Lahendame kirjaliku liitmise abil.

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ + & b & c & d \\ \hline c & d & a & b \end{array}$$

1) $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$. (Põhjendage!)

2) Kuna kahe kolmekohalise arvu summa suurim võimalik väärtus on $999 + 999 = 1998$, siis $c \leq 1$, kusjuures $c \neq 0$. Seega $c = 1$.

3) Vaadates ühelisi saame, et kas $1 + d = b$ või $1 + d = b + 10$.

   Teisel juhul saame võrduse $d - b = 9$, millest järeldub, et $d = 9$ ja $b = 0$, mis aga on võimatu. (Miks?) Järelikult $1 + d = b$.

4) Kümnelistest saame, et $b + 1 = a$ või $b + 1 = a + 10$.

   Teisel juhul saame, et $b - a = 9$, millest järeldub, et $b = 9$ ja $a = 0$, mis aga on võimatu. (Miks?) Järelikult $b + 1 = a$.

5) Sajalistest saame, et $a + b = d + 10$.

6) Oleme saanud kolmest võrrandist koosneva süsteemi

$$\begin{cases} 1 + d = b \\ b + 1 = a \\ a + b = d + 10 \end{cases}.$$

   Kahest esimesest võrrandist avaldame numbrid a ja d kodeeritud numbri b kaudu:

$$d = b - 1 \quad \text{ja} \quad a = b + 1$$

   ning asendame kolmandasse võrrandisse

$$(b + 1) + b = (b - 1) + 10.$$

   Saadud lineaarvõrrandi lahendamisel saame, et $b = 8$. Seega

$$d = b - 1 = 8 - 1 = 7 \quad \text{ja} \quad a = b + 1 = 8 + 1 = 9.$$

Kontroll. $981 + 817 = 1798$

Vastus. $a = 9, b = 8, c = 1, d = 7$.

Ülesanne. Lahendage tähereebus

$$abc + bac = dcdb$$

kirjaliku liitmise teel. Vastust otsige vihiku lõpus.

Näide 6. Lahendage tähereebused

a) $abc + acb = cba$,

b) $abc + bc + cc = bab$

ja leidke puuduvad põhjendused lahendusskeemides. Neist lihtsam a) lahendage numbrite vaheliste seoste abil ja b) kümnendesituse abil.

Lahendusskeemid.

a) osa lahendusskeem. Esitame a) osa ülesande kujul

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ + & a & c & b \\ \hline & c & b & a \end{array}$$

1) $a \neq 0,\ c \neq 0$. (Põhjendage!)

2) $c + b \geq 10$. (Põhjendage!)

3) $c + b = a + 10$ (ühelistest). (Põhjendage!)

4) $b + c + 1 = b + 10$ (kümnelistest), millest $c = 9$. (Põhjendage!)

5) $a + a + 1 = c$ (sajalistest), millest $a = 4$. (Põhjendage!)

6) Kuna $c + b = a + 10$, siis $b = 5$. (Põhjendage!)

Kontroll. $459 + 495 = 954$.

b) osa lahendusskeem.

1) Esitame ülesande b) osas olevad arvud nende kümnendesituste abil

$$(100a + 10b + c) + (10b + c) + (10c + c) = 100b + 10a + b,$$

millest saame võrduse

$$13c = 81b - 90a,$$

kus $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$. (Miks?)

2) Kuna viimase võrduse parem pool jagub arvuga 9, siis $c = 9$ (Põhjendage!) ja võrdus on

$$117 = 81b - 90a \quad | (:9)$$

$$13 = 9b - 10a,$$

millest $10a + 13 = 9b$.

3) Näeme, et korrutise $9b$ lõpunumber peab olema 3. See saab olla võimalik vaid siis, kui $b = 7$ (Põhjendage!).

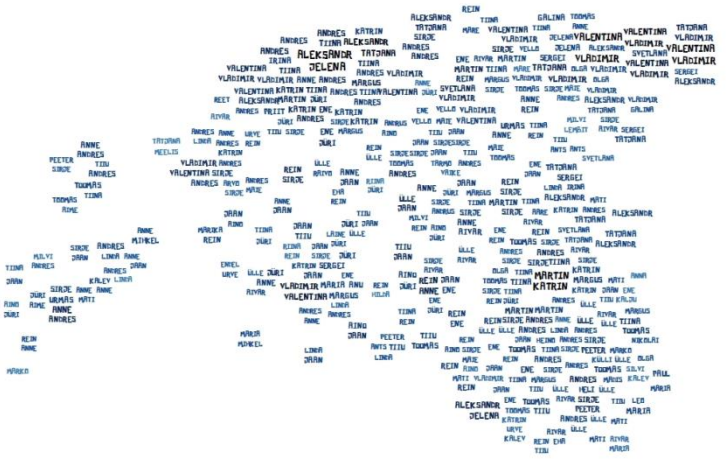
4) Leiame nüüd ka $a = 5$ (Põhjendage!).

Kontroll. $579 + 79 + 99 = 757$

Vastused. a) $a = 4, b = 5, c = 9$;

b) $a = 5, b = 7, c = 9$.

Järgmisena lahendame nimedega seotud ülesandeid.



Näide 7. Lahendage tähereebus

$$AIN + ANNA = NIMI.$$

Lahendus. Esitame antud summa kujul

$$\begin{array}{r} A\ I\ N \\ +\ A\ N\ N\ A \\ \hline N\ I\ M\ I \end{array}$$

Antud tehtes on kodeeritud neli erinevat tähte A, I, M ja N, kusjuures numbrid A ja N on nullist erinevad.

Vaatleme kõigepealt tuhandeliste numbreid. Et $A \neq N$, siis kindlasti sajaliste liitmisel tekib ülekanne tuhandelistesse. Järelikult kehtib seos $A + 1 = N$.

Kuna ühelistes ja sajalistes on täpselt samad numbrid, siis kümnelistest sajalistesse ülekannet ei toimu. Järelikult sajalistest saame seose $N + A = I + 10$.

Kümneliste numbreid arvestades saame veel ühe seose $N + I + 1 = M$.

Saadud kolmest võrrandist koostame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} A + 1 = N \\ N + A = I + 10, \\ N + I + 1 = M \end{cases}$$

millest avaldame numbri M väärtuse numbri A kaudu:

$$M = N + I + 1 = N + (N + A - 10) + 1 = 2N + A - 9 = 2(A + 1) + A - 9 = 3A - 7.$$

Järelikult $M = 3A - 7$. Süsteemi kahe esimese võrduse abil anname hinnangu numbrile A. Sellest, et $N = A + 1$ ja $N + A > 10$, saame võrratuse

$$A + 1 + A > 10,$$

$$2A > 9,$$

$$A \geq 5.$$

Kui $A \geq 6$, siis $M = 3A - 7 \geq 3 \cdot 6 - 7 = 11$, mis on võimatu. Järelikult $A = 5$.

Leiame nüüd kõikide teiste numbrite väärtused:

$$M = 3A - 7 = 3 \cdot 5 - 7 = 8,$$

$$N = A + 1 = 5 + 1 = 6,$$

$$I = N + A - 10 = 6 + 5 - 10 = 1.$$

Kontroll. $516 + 5665 = 6181$

Vastus. $A = 5, I = 1, M = 8, N = 6$.

Näide 8. Lahendage tähereebus (põhjendades lahendusskeemis toodud väiteid)

$$ERIK + MARK = EINAR.$$

Lahendusskeem.

1) Esiteks saame kindlaks määrata kahe numbri E ja I väärtused:

$$E = 1 \quad \text{ja} \quad I = 0. \quad \text{(Põhjendage!)}$$

$$\begin{array}{r} E\ R\ I\ K \\ +\ M\ A\ R\ K \\ \hline E\ I\ N\ A\ R \end{array}$$

2) Numbri M väärtuseks sobib ainult kas number 8 või number 9. (Põhjendage!)

3) Kümnelistest sajalistesse ülekannet ei teki, seega $A = R + 1$. (Põhjendage!)

4) Ühelistest kümnelistesse tekib ülekanne, seega $2K = R + 10$. (Põhjendage!)

5) Oletame, et $M = 8$. Siis sajaliste kaudu saame võrduse $R + A = N + 10$ (Põhjendage!), millest eeltoodud seoseid kasutades avaldame numbri N väärtuse:

$$N = R + A - 10 = R + (R + 1) - 10 = 2R - 9 = 2(2K - 10) - 9 = 4K - 29.$$

Sellisel juhul $K = 9$, $N = 7$ ja $R = 8$, mis on võimatu. (Põhjendage!)

6) Järelikult $M = 9$ ja sajaliste kaudu saame seose $R + A = N$, millest

$$N = R + A = R + (R + 1) = 2R + 1 = 2(2K - 10) + 1 = 4K - 19.$$

Sellisel juhul saame, et ainsaks lahendiks on $K = 6$, $N = 5$, $R = 2$ ja $A = 3$. (Põhjendage!)

Kontroll. $1206 + 9326 = 10532$

Vastus. $A = 3, E = 1, I = 0, K = 6, M = 9, N = 5, R = 2.$

Ülesanded. Lahendage tähereebused tüdrukute nimedega (vastused leiate vihiku lõpus)

a) $MAI + ANNI = MAIA,$

b) $EVA + KAIA = PILLE.$

Eelnevad ülesanded olid kõik üheselt lahenduvad, st leidus ainult üks lahend. Leidub aga ka selliseid ülesandeid, millel võib lahendeid olla rohkem kui üks, või lahend hoopiski puudub. Esimesel juhul juhib ülesande sõnastuses sellele tähelepanu sõnaühend „leidke kõik lahendid“, teisel juhul aga väljend „tõestage, et lahend puudub“. Nii on edaspidi ka selles vihikus. Üldiselt aga tähendab matemaatikas tekst: „lahendage ülesanne“, et tulebki leida kõik lahendid, kui neid leidub, ning pole välistatud, et lahend üldse puudub.

Näide 9. Tõestage, et tähereebusel $ac + bc + cc + abc = ccc$ pole lahendit.

Lahendus. Kümnendesituses võrdusest

$$(10a + c) + (10b + c) + (10c + c) + (100a + 10b + c) = 100c + 10c + c$$

saame, et peab kehtima võrdus

$$110a + 20b = 97c, \quad \text{kus} \quad a, b, c \neq 0.$$

Kuna viimase võrduse vasak pool jagub arvuga 10, peab ka parem pool jaguma 10-ga. Seega peab number c jaguma 10-ga, mis on $c \neq 0$ tõttu võimatu.

Järelikult ei leidu ühtegi sobivat numbrit, millega saab tähte c asendada, mis tähendab, et antud reebusel lahend puudub.

Näide 10. Vastates lahendusskeemis toodud küsimustele tõestage, et tähereebusel

$$acb + bcb + bb = cac$$

lahend puudub.

Lahendusskeem.

1) Antud arvude kümnendesitusi kasutades jõuame võrduseni
$$113b = 81c - 90a. \qquad \text{(Näidake!)}$$
2) Saadud võrdusest järeldub, et $b = 9$. (Põhjendage!)
3) Järelikult peab kehtima võrdus
$$9c - 10a = 113. \qquad \text{(Näidake!)}$$
4) Kuna saadud võrdus ei saa kehtida ühegi numbrite paari (a, c) korral (Põhjendage!), siis olemegi tõestanud, et antud reebusel pole lahendit.

Ülesanne. Kas tähereebusel $MEIE + EMA = EMME$ leidub lahend?

Näide 11. Leidke tähereebuse

$$TEE + ISE = ILUS$$

kõik võimalikud lahendid.

Lahendus. Antud ülesannet on mugavam lahendada kirjaliku liitmise teel.

+	*T*	*E*	*E*
	I	*S*	*E*
I	*L*	*U*	*S*

Kõikide arvude esimesed numbrid on nullist erinevad, st $T \neq 0$ ja $I \neq 0$.

Kuna kahe kolmekohalise arvu summa ei ületa arvu $999 + 999 = 1998$, siis neljakohalise arvu esimene number I ei tohi olla suurem kui 1. Järelikult numbri I väärtuseks sobib vaid 1.

+	*T*	*E*	*E*
	1	*S*	*E*
1	*L*	*U*	*S*

Uurime sajalisi. Sõltuvalt sellest, kas sajalistesse viiakse üle 1 ühik või mitte, saame kaks võimalust:

a) $1 + T + 1 = L + 10$ ja b) $T + 1 = L + 10$.

Vaatleme neid võimalusi eraldi.

a) Esimesel juhul saame, et peab kehtima võrdus $T - L = 8$. Kuna $L \neq 1$, siis $T = 8$ ja $L = 0$.

+	8	E	E
	1	S	E
1	0	U	S

b) Teisel juhul saame, et peab kehtima võrdus $T - L = 9$, millest järeldame, et siis $T = 9$ ja $L = 0$.

+	9	E	E
	1	S	E
1	0	U	S

Märgime nüüd, et mõlemal juhul kui me teaksime numbri E väärtust, siis saaksime arvutada nii numbri S kui ka numbri U väärtust.

a) Numbri E valikuks on seitse võimalust (2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 9). Neid kõiki kontrollides saame, et lahendiks sobib ainult $E = 7$, mille korral $S = 4$ ja $U = 2$.

b) Numbri E valikuks on seitse võimalust (2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8). Neid kõiki kontrollides saame, et sellisel juhul lahendiks sobib ainult $E = 2$, mille korral $S = 4$ ja $U = 6$.

Kontroll. $877 + 147 = 1024,\ 922 + 142 = 1064$.

Vastus. Antud reebusel on kaks lahendit:

E	I	L	S	T	U
7	1	0	4	8	2
2	1	0	4	9	6

Näide 12. Leidke tähereebuse

$$SAAR + HAAB = KUUSK$$

kõik võimalikud lahendid.

Lahendusskeem.

1) Tähele K vastab number 1. (Põhjendage!)

2) Ühelistest saame, et $R + B = 11$. (Põhjendage!)

3) Ühelistest kümnelistesse tekib ülekanne, seega kümnelistest sajalistesse ülekannet ei teki. (Põhjendage!)

$$\begin{array}{r} SAAR \\ +\ HAAB \\ \hline KUUSK \end{array}$$

4) Kümnelistest ja sajalistest järeldame võrdused $2A + 1 = S$ ja $2A = U$. (Põhjendage!)

5) Tuhandelistest järeldame viimase seose $S + H = U + 10$. (Põhjendage!)

6) Kasutades tuletatud seoseid leiame, et ainsaks sobivaks võimaluseks on $H = 9$, $A = 2$, $U = 4$ ja $S = 5$. (Põhjendage!)

7) Numbrite R ja B väärtuste määramiseks on nüüd kaks võimalust: kas $R = 3$ ja $B = 8$ või $R = 8$ ja $B = 3$.

Kontroll. $5223 + 9228 = 14451,\ 5228 + 9223 = 14451$.

Vastus. Antud reebusel on kaks lahendit:

A	B	H	K	R	S	U
2	8	9	1	3	5	4
2	3	9	1	8	5	4

Ülesanne. Leidke tähereebuse $PIIM + RIIS = PUDER$ kõik võimalikud lahendid.

Kaks viimast näiteülesannet on võrreldes eelmistega natuke keerulisemad. Uurige hoolikalt järgmise ülesande täislahendust ja seejärel leidke viimase ülesande lahendusskeemis puuduvad põhjendused.

Näide 13. Järgmine reebus on inspireeritud tõdemusest, et enne pangalaenu võtmist tuleb hoolikalt oma otsust kaaluda. Leidke tähereebuse

$$PANK + LAEN = KAALU$$

kõik võimalikud lahendid.

Lahendus. Lahendamisel on abiks järgmine joonis.

	P	*A*	*N*	*K*
+	*L*	*A*	*E*	*N*
K	*A*	*A*	*L*	*U*

Kõikide arvude esimesed numbrid on nullist erinevad, st $P, L, K \neq 0$. Kuna kahe neljakohalise arvu summa ei ületa arvu 19998, siis $K \leq 1$. Arvestades tingimust $K \neq 0$, saame, et $K = 1$.

Sajalistest saame neli võimalust sõltuvalt sellest, kas sajalistesse ja tuhandelistesse viiakse üle 1 ühik või mitte: a) $A + A = A$; b) $A + A = 10 + A$; c) $A + A + 1 = A$; d) $A + A + 1 = 10 + A$.

a) esimesel juhul $A + A = A$ saame, et $A = 0$;

b) teisel juhul $A + A = 10 + A$ saame, et $A = 10$, mis on võimatu, kuna A peab olema number;

c) kolmandal juhul $A + A + 1 = A$ saame, et $A = -1$, mis on ilmselt võimatu;

d) neljandal juhul $A + A + 1 = 10 + A$ saame, et $A = 9$.

Järelikult numbri A väärtuseks on kas 0 või 9. Järgnevalt näitame, et $A \neq 9$.

Juhul $A = 9$ saame tuhandeliste põhjal, et $P + L + 1 = 19$ ehk $P + L = 18$, millest $P = L = 9$ (vastuolu tingimusega, et erinevatele tähtedele vastavad erinevad numbrid). Järelikult $A = 0$.

	P	0	*N*	1
+	*L*	0	*E*	*N*
1	0	0	*L*	*U*

Tuhandeliste põhjal saame nüüd, et $P + L = 10$, kus P ja L võimalikud väärtused on 2 kuni 8. Lisaks märgime, et $N \leq 8$, muidu vastasel juhul $N = 9$ ja $U = 0$, mis on võimatu, kuna $A = 0$. Teisisõnu, kümnelistesse ühikuid üle ei viida. Ka kümnelistest sajalistesse ülekannet ei toimu. Seega $N + E = L$. Järelikult numbri L vähim võimalik väärtus on $2 + 3 = 5$, st $L \geq 5$.

Seega võrduse $P + L = 10$ põhjal tuleb läbi vaadata kolm võimalust:

a) $L = 6,\ P = 4$; b) $L = 7,\ P = 3$; c) $L = 8,\ P = 2$.

Uurime neid võimalusi eraldi.

a) Kui $L = 6$ ja $P = 4$, siis numbrite N, E ja U võimalikeks väärtusteks sobivad vaid numbrid $2, 3, 5, 7, 8$ ja 9, kusjuures peavad kehtima seosed

+	4	0	*N*	1
	6	0	*E*	*N*
1	0	0	6	*U*

$$1 + N = U \qquad \text{ja} \qquad N + E = 6.$$

Olemasolevate numbrite hulgast pole võimalik saada kahte numbrit, mille summa oleks 6. Järelikult sellisel juhul lahendit pole.

b) Kui $L = 7$ ja $P = 3$, siis numbrite N, E ja U võimalikeks väärtusteks sobivad vaid numbrid $2, 4, 5, 6, 8$ ja 9, kusjuures peavad kehtima seosed

+	3	0	*N*	1
	7	0	*E*	*N*
1	0	0	7	*U*

$$1 + N = U \qquad \text{ja} \qquad N + E = 7.$$

Olemasolevaid numbreid arvestades saame, et kas $N = 2$ ja $E = 5$ (sellisel juhul $U = 3$, mis on võimatu) või $N = 5$ ja $E = 2$ (sellisel juhul $U = 6$, mis sobib lahendiks).

c) Kui $L = 8$ ja $P = 2$, siis numbrite N, E ja U võimalikeks väärtusteks sobivad vaid numbrid $3, 4, 5, 6, 7$ ja 9, kusjuures peavad kehtima seosed

+	2	0	*N*	1
	8	0	*E*	*N*
1	0	0	8	*U*

$$1 + N = U \qquad \text{ja} \qquad N + E = 8.$$

Olemasolevaid numbreid arvestades saame, et kas $N = 3$ ja $E = 5$ (sellisel juhul $U = 4$, mis sobib lahendiks) või $N = 5$ ja $E = 3$ (sellisel juhul $U = 6$, mis sobib lahendiks).

Kokku oleme saanud kolm lahendit.

Kontroll. $3051 + 7025 = 10076,\ 2031 + 8053 = 10084,\ 2051 + 8035 = 10086.$

Vastus. Antud tähereebusel on kolm lahendit:

A	*E*	*K*	*L*	*N*	*P*	*U*
0	2	1	7	5	3	6
0	5	1	8	3	2	4
0	3	1	8	5	2	6

Näide 14. Viini valsi üheks arendajaks oli Strausside kõrval ka Viini helilooja Joseph Lanner. Lahendage reebus

$$VIINI + VALSS = LANNER$$

ja leidke puuduvad põhjendused.

+	*V*	*I*	*I*	*N*	*I*
	V	*A*	*L*	*S*	*S*
L	*A*	*N*	*N*	*E*	*R*

Lahendusskeem.

1) Põhjendage, et $L = 1$.
2) Põhjendage, et tähele A vastab kas number 0 või number 2.
3) Näidake, et $A \neq 0$ ja seega $A = 2$.
4) Põhjendage, et $V = 6$.
5) Järeldage seos $I + 2 = N$.
6) Näidake, et numbrite E ja R jaoks kehtib kas seos $E + 8 = R$ või seos $R + 3 = E$.

7) Põhjendage, et seos $R + 3 = E$ on võimatu.

8) Seosest $E + 8 = R$ järeldage numbrite E ja R väärtused.

9) Leidke teiste numbrite I, N ja S väärtused.

10) Kontrollige vastust.

A	E	I	L	N	R	S	V
2	0	5	1	7	8	3	6

Soovitatavad allikad

Kaasik, Ü. Lihtsaid ja keerulisi. „Valgus“, Tln, 1970.

Kaasik, Ü. Lihtsaid ja keerulisi II. „Valgus“, Tln, 1975.

Tõnu Tõnso krüptoaritmeetika veebileht, http://www.mathema.ee/Kryptoaritmeetika/

Inglisekeelne krüptoaritmeetika veebileht, http://www.cryptarithmania.com/words.html

Ülesannete vastused

- Dudeney reebuse $SEND + MORE = MONEY$ vastus on $9567 + 1085 = 10652$.
- Reebuse $SAADA + VEEL = PAPPI$ vastus on $35565 + 9882 = 45447$.
- Summa $TERE + TULEMAST + KURSUSELE$ suurim võimalik väärtus on 1065024863.
- Reebuse $a + ba + a = ab$ lahendiks on $a = 9$ ja $b = 7$.
- Tähereebuse $abc + bac = dcdb$ vastus on $742 + 472 = 1214$.
- Reebuse $MAI + ANNI = MAIA$ vastuseks on $A = 4$, $I = 2$, $M = 5$ ja $N = 8$.
- Reebuse $EVA + KAIA = PILLE$ vastus on $A = 8$, $E = 6$, $I = 0$, $K = 9$, $L = 4$, $P = 1$ ja $V = 3$.
- Tähereebusel $MEIE + EMA = EMME$ vastus puudub, sest kasutades antud arvude kümnendesitusi jõuame võrduseni $900M + 10I + A = 800E$, millest järeldub, et $A = 0$. Siis peab kehtima võrdus $90M + I = 80E$, millest omakorda järeldub, et $I = 0$, mis on võimatu.
- Tähereebusel $PIIM + RIIS = PUDER$ on kaks vastust:

D	E	I	M	P	R	S	U
5	4	7	6	1	8	2	0
5	4	7	2	1	8	6	0