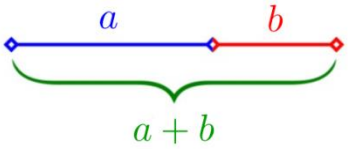
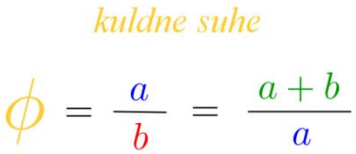
Kolmnurga kuldne geomeetria

Koostanud M. Ivanov, E. Abel

Mis on kuldsed kujundid?

Kuldse kujundi mõiste on otseselt seotud kuldlõike ja kuldse suhte mõistetega. Selgitame neid mõisteid lähemalt. Olgu meil antud üks lõik. Jaotame selle lõigu kaheks osaks ja vaatame saadud pikema ja lühema osa pikkuste suhet. Kui see suhe on võrdne etteantud lõigu kogu pikkuse ja saadud pikema osalõigu pikkuse suhtega, kõneldakse kuldlõikest ja saadud suhet nimetatakse kuldseks (jumalikuks) suhteks. Tavaliselt tähistatakse kuldset suhet sümboliga φ.





Kuldsel suhtel φ on olemas ka arvuline väärtus. Selle leidmiseks avaldame võrdusest $\varphi = \frac{a}{b}$ pikema osa pikkuse $a = \varphi b$ ja teeme vastava asenduse võrduses $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. Selliselt saame seose

$$\frac{\varphi b}{b} = \frac{\varphi b + b}{\varphi b} \quad \text{ehk} \quad \varphi = \frac{\varphi + 1}{\varphi},$$

mille teisendamisel saame ruutvõrrandi

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Sellel võrrandil on kaks lahendit $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja $\varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Kuna φ on positiivsete suuruste jagatis, siis sellel saab olla vaid positiivne väärtus $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Järelikult, kuldne suhe on irratsionaalarv

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618.$$

Kui vaadeldava kujundiga (kolmnurk, ristkülik, spiraal jne) või teatava objektiga (inimkeha, hoone, liiklusvahend jne) saab siduda kaks lõiku, mille pikkuste suhe on kuldne suhe, kõneldakse sageli kuldsest ehk jumalikust kujundist või objektist. Nii näiteks nimetatakse kuldseks sellist ristkülikut, mille pikkuse ja laiuse suhe on võrdne kuldse suhtega. Väidetakse, et krediitkaardid on kuldse ristküliku näidisteks meie igapäevaelus.

Kuldlõike olemasolu looduslikel objektidel avastasid juba antiikaja matemaatikud ja seda kasutati näiteks hoonete ehitamisel. Nimetuse „kuldne suhe“ andis meile aga Leonardo da Vinci, kelle teostes võib sageli leida selle suhte rakendusi. Võib olla just selles peitubki tema teoste ilu ja kestvus. Tänapäevalgi loetakse näiteks ilusaks fotot, kus näiteks jäädvustatava põhiobjekti kaugused pildi servadest on kuldses suhtes.

Kuldset suhet kasutatakse laialdaselt ka kunstis, arhitektuuris ja esemete disainis. Seda on avastatud paljudel looduslikel objektidel (näiteks inimkeha proportsioonide uurimisel).

Mida võib leida sellest vihikust?

Käesolevas vihikus tegeleme peamiselt võrdhaarse kolmnurga ja ühe selle konkreetse liigi – kuldse kolmnurga – omaduste uurimisega ja nende rakendustega. Selle käigus tutvume mõnede põhivõtetega geomeetriatõdede avastamisel, mis on kasulikud ka teiste kujundite uurimisel ja geomeetrilise mõtteviisi omandamisel. Geomeetriaülesannete lahendamisel on vaja tunda hulgaliselt mõisteid ja teada seoseid kujundite ja nende elementide vahel. Sageli võib leida väga erinevaid lahendusi ühele ülesandele. Antud vihikus toomegi näiteid sellistest erinevatest võimalustest ja soovitame lugejalgi mitte piirduda ühe lahenduskäigu uurimisega, vaid leida mitme seast endale kõige meeldivam ja sobivam. Lahendaja töö lihtsustamiseks on alljärgnevas loetletud mõned mõisted ja seosed mis on kõige olulisemad antud vihiku materjali omandamisel.

Ülesannete lahendamiseks vajalikud geomeetrilised mõisted ja tulemused

Võrdhaarse kolmnurga omadused ja tunnused

Igas võrdhaarses kolmnurgas kehtivad järgmised seosed (nn *võrdhaarse kolmnurga omadused*):

- Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed.
- Võrdhaarse kolmnurga alusele tõmmatud mediaan, nurgapoolitaja ja kõrgus langevad kokku.

Et kolmnurk oleks võrdhaarne, peaksid selles kehtima järgmised seosed (nn *võrdhaarse kolmnurga tunnused*):

- Kui kolmnurga mis tahes kaks sisenurka on võrdsed, siis see kolmnurk on võrdhaarne.
- Kui kolmnurgas vähemalt kaks põhilõikudest (mediaan, nurgapoolitaja ja kõrgus) langevad kokku, siis see kolmnurk on võrdhaarne.

Nurkade vahelised põhiseosed

- *Tippnurgad* on võrdsed.
- *Kõrvunurkade* summa on $180°$.
- Kolmnurga *sisenurkade summa* on $180°$.

Täiendavad geomeetrilised faktid

- Kolmnurga *välisnurk* on võrdne kahe temaga mitte kõrvuti asetseva sisenurga summaga.
- *Paralleelsete* sirgete
  omadused: kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmanda sirgega on *kaasnurgad* paarikaupa võrdsed, *põiknurgad* paarikaupa võrdsed ning *lähisnurkade* summa on $180°$;
  tunnused: kaks sirget on paralleelsed, kui nende lõikamisel kolmanda sirgega tekkinud kaasnurgad või põiknurgad on paarikaupa võrdsed või tekkinud lähisnurkade summa on $180°$.
- Kolmnurga kaht külge ühendav *kesklõik* on kolmnurga kolmanda küljega paralleelne ja sellest kaks korda lühem.
- Kahe kolmnurga *võrdsuse tunnusteks* on KNK, NKN ja KKK.

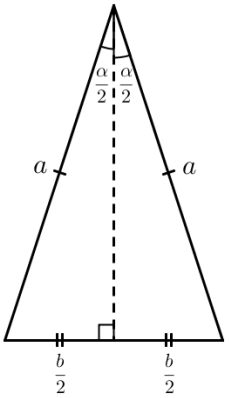
- Täisnurkse kolmnurga *hüpotenuusile tõmmatud mediaan* on hüpotenuusist kaks korda lühem. Kui kolmnurga üks mediaanidest on kaks korda lühem küljest, millele see on tõmmatud, siis see kolmnurk on täisnurkne.
- Mõned kooliprogrammist tuntud trigonomeetrilised valemid ja teoreemid.

I Kuldne kolmnurk

Kuldseks kolmnurgaks nimetatakse võrdhaarset kolmnurka, mille haara ja aluse pikkuste suhe on võrdne kuldse suhtega. Järgmisena leiame võimalike kuldsete kolmnurkade sisenurkade suurused. Selleks kasutame kahte erinevat trigonomeetrilist lähenemist, millede tundmine on oluliseks eelduseks selle vihiku materjali mõistmiseks.

Tähistame kuldse kolmnurga haara pikkust sümboliga a ja aluse pikkust sümboliga b ning tähistame selle võrdhaarse kolmnurga tipunurga suurust sümboliga α. Siis kuldse kolmnurga definitsioonist järeldub seos $\frac{a}{b} = \varphi$.

Et $\varphi > 1$, siis siit järeldub, et $a > b$, st kuldse kolmnurga haar on alusest pikem. Märgime, et sellisel juhul on tipunurga α väärtus kindlasti väiksem kui $60°$ (Põhjendage!). Vastava kolmnurga nurkade leidmiseks lähtume täisnurkse kolmnurga lahendamise oskusest.



Selleks tõmbame antud võrdhaarse kolmnurga alusele kõrguse, mis osutub võrdhaarse kolmnurga omaduse põhjal nii nurgapoolitajaks kui ka mediaaniks. See tähendab, et saadud täisnurkses kolmnurgas (mille hüpotenuusi pikkus on a) on ühe teravnurga suuruseks $\frac{\alpha}{2}$ ja selle vastaskaateti pikkuseks on $\frac{b}{2}$. Need kolm suurust on omavahel seotud võrdusega

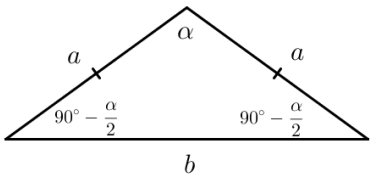
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{a} = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}},$$

kust $\frac{\alpha}{2} = 18°$ ja seega $\alpha = 36°$. Selle kolmnurga teiste nurkade arvutamiseks rakendame võrdhaarse kolmnurga omadust, mille kohaselt selle kolmnurga alusnurgad peavad olema võrdsed. Seega selle kolmnurga mõlemad alusnurgad on suurusega $(180° - 36°) : 2 = 72°$.

Järelikult kuldses kolmnurgas on sisenurgad suurustega $36°$, $72°$ ja $72°$.

Koos kuldse kolmnurgaga võib uurida ka sellist võrdhaarset kolmnurka, mille korral on aluse ja haara pikkuste suhe on kuldne suhe, st $\frac{b}{a} = \varphi$ ehk $\frac{a}{b} = \frac{1}{\varphi}$ Nimetame sellist kolmnurka *pöördkuldseks kolmnurgaks*. Siit järeldub, et $b > a$. Sellisel juhul peab tipunurga α väärtus olema suurem kui $60°$ (Põhjendage!).

Kasutame seekord nurkade leidmiseks siinusteoreemi, mis väidab, et kolmnurga mis tahes külje ja selle vastasnurga siinuse jagatis antud kolmnurga korral on muutumatu suurus. Selleks arvutame mõlema alusnurga väärtused: $(180° - \alpha) : 2 = 90° - \frac{\alpha}{2}$ ning



rakendame nüüd siinusteoreemi:

$$\frac{a}{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{b}{\sin\alpha} \qquad \text{ehk} \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha}{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Kuna

$$\frac{b}{a} = \varphi \qquad \text{ja} \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2},$$

siis peab kehtima võrdus

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{ehk} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

kust $\frac{\alpha}{2} = 54°$ ja seega $\alpha = 108°$. Selle kolmnurga alusnurga suuruseks on seega $36°$.

Oleme näidanud, et pöördkuldses kolmnurgas on sisenurkade suurused $36°$, $36°$ ja $108°$.

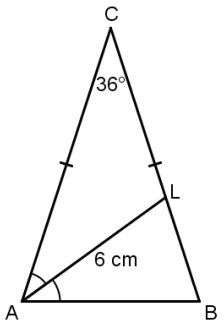
Harjutusülesanne. Leidke kuldse kolmnurga nurkade suurused siinusteoreemi abil ja pöördkuldse kolmnurga nurkade suurused täisnurkse kolmnurga trigonomeetria abil.

Järgmiste näiteülesannete lahendamisel kasutame ainult võrdhaarse kolmnurga omadusi ja tunnuseid ning eespool sõnastatud nurkade vahelisi põhiseoseid.

Näide 1. Võrdhaarse kolmnurga ABC tipunurga ACB suurus on $36°$ ja selle haarale tõmmatud nurgapoolitaja AL pikkus on 6 cm.

Leidke tekkinud nurga ALB suurus ja kolmnurga aluse AB pikkus.

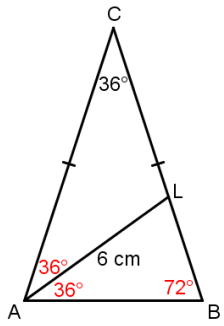
Lahendus.



1. Kõigepealt teeme ülesande tekstiga sobiva joonise. Selleks joonestame võrdhaarse kolmnurga ABC alusega AB ning võrdsete haaradega AC ja BC (st $|AC| = |BC|$). Märgime joonisele, et tipunurga ACB suuruseks on $36°$. Tõmbame haarale BC nurgapoolitaja AL ja märgime selle pikkuse 6 cm. Teame, et nurgapoolitaja AL jaotab nurga CAB pooleks (st $\angle BAL = \angle CAL$). Joonisel tähistame võrdsed nurgad ühekordsete kaarekestega.

2. Teame, et võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed ja mis tahes kolmnurga sisenurkade summa on $180°$. Seega antud võrdhaarse kolmnurga ABC alusnurgad CAB ja CBA on võrdsed ning nende suurused on

$$\angle CAB = \angle CBA = \frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°.$$



3. Mõlema nurga BAL ja CAL suurus on täpselt pool nurga CAB suurusest, st

$$\angle CAL = \angle BAL = \frac{\angle CAB}{2} = \frac{1}{2}\cdot 72° = 36°.$$

4. Nurga ALB suurust saame arvutada kolmnurga ABL sisenurkade summa kaudu:

$$\angle ALB = 180° - (\angle BAL + \angle LBA) = 180° - (36° + \angle CBA) = 180° - (36° + 72°) = 72°.$$

5. Saame, et kolmnurgas BAL on kaks nurka ALB ja LBA suurusega $72°$. Järelikult kolmnurk BAL on ka võrdhaarne ning selle haarad AL ja AB on võrdse pikkusega, st

$$|AB| = |AL| = 6 \text{ cm}.$$

Vastus. Nurga ALB suurus on $72°$ ja aluse AB pikkus on 6 cm.

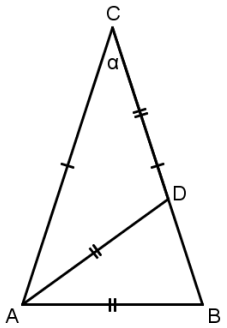
Lahendatud ülesande juures on huvitav see, et oleme etteantud kuldse kolmnurga ABC jaotamisel haarale tõmmatud nurgapoolitajaga AL saanud ühe väiksema kuldse kolmnurga BAL ja ühe pöördkuldse kolmnurga ALC. Need mõlemad on võrdhaarsed kolmnurgad vastavalt alustega BL ja AC ning tipunurkadega $36°$ ja $108°$.

Järgmise ülesande lahendamisel veendume selles, et võrdhaarsete kolmnurkade seas vaid kuldset kolmnurka saab jaotada kaheks võrdhaarseks kolmnurgaks.

Näide 2. On antud võrdhaarne kolmnurk ABC alusega AB. Selle kolmnurga haaral BC on valitud punkt D nii, et mõlemad kolmnurgad BAD ja ADC on võrdhaarsed vastavalt alustega BD ja AC.

Leidke kolmnurga ABC nurkade suurused.

Lahendus.



1. Alustame joonise tegemisega. Joonisele peaks tekkima kolm võrdhaarset kolmnurka ABC, ADC ja BAD. Joonestame ühe võrdhaarse kolmnurga ABC ja ühe kriipsuga tähistame võrdsed haarad AC ja BC. Siis tõmbame lõigu AD. Oletame, et kolmnurgas ADC on nüüd võrdsed haarad AD ja CD ning kolmnurgas BAD on võrdsed haarad AB ja AD. Järelikult kehtib seos

$$|CD| = |AD| = |AB|.$$

Tähistame need kolm võrdse pikkusega lõiku kahe kriipsuga.

2. Tähistame näiteks nurga ACB suurust tähega α ja avaldame α kaudu mõnede teiste joonisel olevate nurkade suurused.

3. Lähtume sellest, et mis tahes võrdhaarses kolmnurgas on alusnurgad võrdsed. Alustame võrdhaarsest kolmnurgast ADC. Selle alusnurgad on DAC ja DCA, seega

$$\angle DAC = \angle DCA = \alpha.$$

4. Nurk ADB on kolmnurga ADC välisnurk. Kuna välisnurk on võrdne kahe temaga mitte kõrvuti asetseva sisenurga summaga, siis

$$\angle ADB = \angle DAC + \angle DCA = \alpha + \alpha = 2\alpha.$$

5. Võrdhaarses kolmnurgas BAD on alusnurkadeks ADB ja ABD, millest järeldub seos

$$\angle ABD = \angle ADB = 2\alpha.$$

6. Viimaseks saame, et võrdhaarse kolmnurga ABC alusnurgad on CAB ja CBA, kust

$$\angle CAB = \angle CBA = \angle ABD = 2\alpha.$$

7. Oleme saanud, et kolmnurga ABC nurkade suurused on α, 2α ja 2α. Kuna nende summa peab olema $180°$, saame võrduse

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180° \quad \text{ehk} \quad 5\alpha = 180°,$$

millest järeldub, et $\alpha = 36°$. Seega kolmnurga ABC nurkade suurused on $36°$, $72°$ ja $72°$ ehk kolmnurk ABC on kuldne.

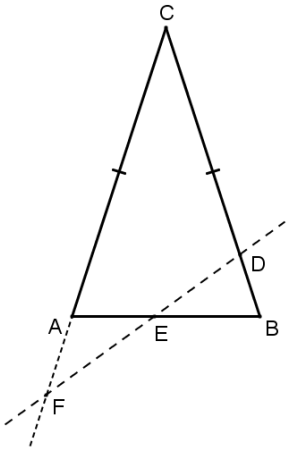
Vastus. Kolmnurga ABC nurkade suurused on $36°$, $72°$ ja $72°$.

Järgmise ülesande lahendamisel avastame veel ühe võimaluse kuldsete kolmnurkade saamiseks.

Näide 3. Sirge lõikab võrdhaarse kolmnurga ABC haara BC punktis D, alust AB punktis E ja haara AC pikendust üle punkti A punktis F nii, et tekkinud kolmnurgad BDE ja AEF on võrdhaarsed.

Leidke nende kolmnurkade BDE ja AEF nurkade suurused.

Lahendus.



1. Paremal on näidatud ülesande tekstile vastav joonis. Kolmnurga ABC võrdhaarsusest saame kohe järeldada haarade AC ja BC võrdsust. Aga näiteks kolmnurga BDE võrdhaarsusest analoogilist järeldust ainult joonise põhjal (et $|BE| = |DE|$) koheselt teha ei saa, sest meil ei ole kindlust, et kolmnurga ABC mingi teise kuju korral ei teki näiteks võrdhaarset kolmnurka BDE alusega BE.

2. Alguses tähistame kolmnurga ABC alusnurka tähega α, st

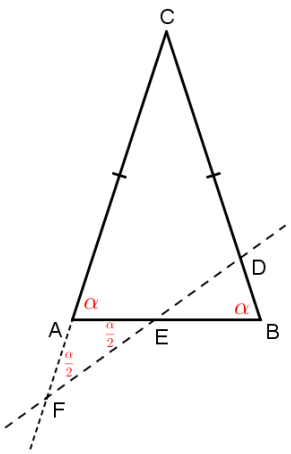
$$\angle CAB = \angle CBA = \alpha.$$

3. Siis kolmnurgas ABC on kahe sisenurga suuruste summa 2α, mis on ilmselt väiksem kolmnurga ABC kõikide nurkade summast $180°$. Järelikult $\alpha < 90°$.

4. Nurk EAF on nurga CAB kõrvunurk, seega

$$\angle EAF = 180° - \angle CAB = 180° - \alpha > 180° - 90° = 90°.$$

Järelikult nurk EAF osutub nürinurgaks.



5. Vaatleme nüüd kolmnurka AEF, mis on ülesande teksti põhjal võrdhaarne. Selle üheks sisenurgaks on nürinurk EAF, mis saab olla selles kolmnurgas ainult tipunurgaks. Järelikult nurgad AFE ja AEF on vaadeldava kolmnurga võrdsed alusnurgad ja mõlemad on suurusega

$$\angle AFE = \angle AEF = \frac{180° - \angle EAF}{2} = \frac{180° - (180° - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

6. Ka kolmnurk BDE peab teksti põhjal olema võrdhaarne. Selles kolmnurgas on teada nurga DBE suurus α. Lisaks nurgad BED ja AEF on tippnurgad, seega

$$\angle BED = \angle AEF = \frac{\alpha}{2}.$$

Et kolmnurk BDE oleks võrdhaarne, peaks selle kolmanda nurga BDE suurus olema kas $\frac{\alpha}{2}$ või α.

7. Juhul $\angle BDE = \frac{\alpha}{2}$ saame, et kolmnurga BDE nurkade summa on $\alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 2\alpha$. See on võimatu, kuna juba teame, et $2\alpha < 180°$. Järelikult $\angle BDE = \alpha$.

8. Siis kolmnurga BDE nurkade summa on $\alpha + \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$ ja kehtib võrdus $\frac{5\alpha}{2} = 180°$, kust $\alpha = 72°$.

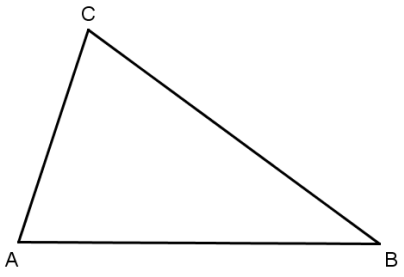
9. Järelikult kolmnurga AEF nurkade suurused on $36°$, $36°$ ja $108°$ ning see on pöördkuldne kolmnurk. Kolmnurga BDE nurkade suurused on $36°$, $72°$ ja $72°$ ja see on kuldne kolmnurk.

10. Võrdhaarse kolmnurga ABC enda nurgad on seega $36°$, $72°$ ja $72°$. Järelikult selline olukord on võimalik vaid kuldse kolmnurga ABC korral.

Vastus. Kolmnurga AEF nurkade suurusteks on $36°$, $36°$ ja $108°$ ning kolmnurga BDE nurkade suurusteks on $36°$, $72°$ ja $72°$.

Näide 4. Kolmnurgas ABC nurgapoolitajad AK ja CL lõikuvad punktis D. Nii saadud kolm kolmnurka ACD, ADL ja CDK on kõik võrdhaarsed ning lõigu AL pikkus on 6 cm.

Leidke lõigu CK pikkus ja kolmnurga ABC nurkade suurused. Selleks täiendage joonist ja tooge lahendusskeemis küsitud põhjendused.



Lahendusskeem.

1. Vaadelge kolmnurka ACD. Põhjendage, et selle kolmnurga nurkade DAC ja DCA summa on väiksem kui $90°$.

2. Põhjendage, et kolmnurk ACD on nürinurkne.

3. Põhjendage, et kolmnurgas ACD kehtivad võrdused

$$\angle DAC = \angle DCA \quad \text{ja} \quad |AD| = |CD|.$$

4. Olgu näiteks $\angle DAC = \alpha$. Põhjendage, et nurkade kohta kehtib võrdus

$$\angle DAL = \angle DAC = \angle DCA = \angle DCK = \alpha.$$

5. Arvutage nurga ADC suurus (st avaldage see α kaudu) ning seejärel näidake, et mõlema nurga ADL ja CDK suuruseks on 2α.

6. Põhjendage, et kolmnurga ADL sisenurga ALD suuruseks on kas α või 2α. Analoogiliselt on ka kolmnurga CDK sisenurga CKD suuruseks on kas α või 2α.

7. Põhjendage, et mõlema nurga ALD ja CKD suuruseks ei saa olla α. Avaldage α kaudu kõik joonisel olevad nurgad.

8. Põhjendage järgmine seos lõikude pikkuste kohta

$$|CK| = |CD| = |AD| = |AL| = 6\ (\text{cm}).$$

9. Lähtudes kolmnurga sisenurkade summast arvutage α väärtus.

10. Põhjendage, et kolmnurga ABC nurkade suurused on $36°$, $72°$ ja $72°$ (st ABC on kuldne kolmnurk).

Vastus. Lõigu CK pikkus on 6 cm ning kolmnurga ABC nurkade suurused on $36°$, $72°$ ja $72°$.

II Kolmnurga võrdhaarsuse esimese omaduse ja tunnuse rakendused

Vaatleme järgmise omaduse ja tunnuse kasutamist koos mõningate täiendavate faktidega geomeetriaülesannete lahendamisel.

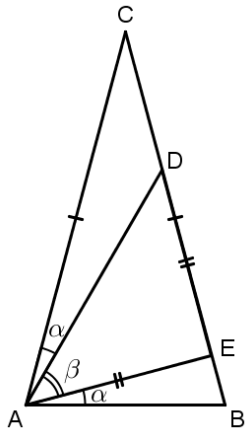
Omadus:	Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed.
Tunnus:	Kolmnurk on võrdhaarne, kui selle kaks sisenurka on võrdsed.

Järgmisest kahest näitest esimeses järeldame võrdhaarsusest alusnurkade võrdsuse ja teises vastupidi, järeldame nurkade võrdsusest võrdhaarsuse. Mõlemas kasutame ka välisnurga mõistet.

Näide 5. Võrdhaarses kolmnurgas ABC alusega AB (kus $AB < BC$) on haaral BC valitud punktid D ja E nii, et lõik BD on pikem lõigust BE, $|DE| = |AE|$ ja $\angle CAD = \angle BAE$.

Leidke nurga BAD suurus.

Lahendus.



1. Teeme tekstile vastava joonise. Seejuures ühe kriipsuga märgime võrdhaarse kolmnurga ABC võrdsed haarad AC ja BC ning kahe kriipsuga märgime võrdsed lõigud DE ja AE. Tähistame võrdsete nurkade CAD ja BAE suurused tähega α.

2. Kuna otsitavaks nurgaks on nurk BAD, mis on jaotatud kaheks nurgaks BAE ja DAE, siis seni tähistamata nurga DAE suuruseks olgu β. Arvestades sellega, otsime nurga BAD suuruse $\alpha + \beta$ väärtust.

3. Esiteks rakendame teadmist, et kolmnurk ABC on võrdhaarne. Sellest järeldub selle kolmnurga alusnurkade CAB ja CBA võrdsus. Saame esimese tulemuse:

$$\angle CBA = \angle CAB = \alpha + \beta + \alpha = 2\alpha + \beta.$$

4. Teiseks vaatleme kolmnurka AED. Kuna see on samuti võrdhaarne ($|DE| = |AE|$), siis ka selle alusnurgad DAE ja ADE peavad olema võrdsed, st $\angle ADE = \angle DAE = \beta$.

5. Järgmisena vaatleme kolmnurka BAE. Selle üks nurkadest AEB on kolmnurga AED *välisnurk*, st nurga AEB suurus on võrdne kolmnurga AED kahe temaga mitte kõrvuti asetseva nurga DAE ja ADE suuruste summaga, st

$$\angle AEB = \angle DAE + \angle ADE = \beta + \beta = 2\beta.$$

6. Oleme α ja β kaudu avaldanud kolmnurga BAE kõik sisenurgad:

$$\angle BAE = \alpha, \quad \angle AEB = 2\beta \qquad \text{ja} \qquad \angle ABE = \angle CBA = 2\alpha + \beta.$$

7. Viimaseks rakendame selles kolmnurgas BAE teadmist, et mis tahes kolmnurgas on sisenurkade summa $180°$:

$$\angle BAE + \angle AEB + \angle ABE = 180°$$

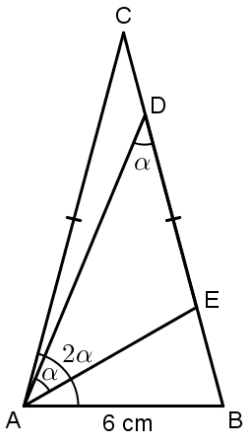
$$\alpha + 2\beta + (2\alpha + \beta) = 180° \qquad \text{ehk} \qquad 3\alpha + 3\beta = 180° \qquad \text{ehk} \qquad \alpha + \beta = 60°,$$

mis ongi nurga BAD suuruseks.

Vastus. Nurga BAD suurus on $60°$.

Näide 6. Võrdhaarse kolmnurga ABC aluse AB pikkus on 6 cm. Haaral BC on valitud punktid D ja E nii, et lõik BD on pikem lõigust BE ning $\angle DAE = \angle ADB = \frac{1}{2}\angle BAC$.

Leidke lõigu DE pikkus.



Lahendus.

1. Alustame sellest, et avaldame etteantud seoses olevate nurkade suurused ühe ja sama muutuja kaudu. Olgu $\angle DAE = \angle ADB = \alpha$, siis ülesandes antud tingimusest järeldub, et $\angle BAC = 2\alpha$. Kanname need nurgad joonisele.

2. Vaatleme kolmnurka AED. Selle kahe nurga DAE ja ADE suurused on võrdsed, seega tegemist on võrdhaarse kolmnurgaga, mille alus on AD. Järelikult on selle haarad AE ja DE võrdse pikkusega, st

$$|AE| = |DE|.$$

3. Vaatleme nüüd kolmnurka BAE. Selle nurk AEB on kolmnurga AED välisnurk, millest järeldame, et nurk AEB on võrdne nurkade DAE ja ADE suuruste summaga, st

$$\angle AEB = \angle DAE + \angle ADE = \alpha + \alpha = 2\alpha.$$

4. Vaadeldava kolmnurga BAE teine nurk ABE on võrdhaarse kolmnurga ABC alusnurk. Järelikult selle suurus peab olema võrdne teise alusnurga BAC suurusega, millest saame

$$\angle ABE = \angle BAC = 2\alpha.$$

5. Oleme saanud, et kolmnurgas BAE on kaks võrdset nurka suurusega 2α ($\angle AEB = \angle ABE = 2\alpha$), millest järeldub, et see on võrdhaarne kolmnurk alusega BE. Seega selle haarad on võrdse pikkusega:

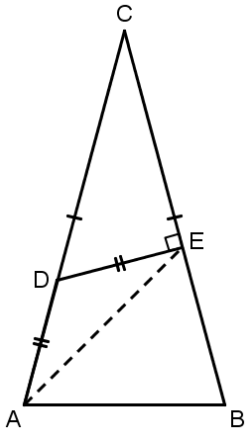
$$|AE| = |AB| = 6 \text{ (cm)}.$$

6. Kuna eespool oleme näidanud, et $|AE| = |DE|$, siis lõigu DE pikkus on samuti 6 cm.

Vastus. Lõigu DE pikkus on 6 cm.

Näide 7. Võrdhaarses kolmnurgas ABC alusega AB on külje AC punktist D küljele BC tõmmatud ristlõik DE, mille pikkus võrdub lõigu AD pikkusega.

Leidke nurga BAE suurus.



Selleks jälgige lahendusskeemi ja põhjendage seal toodud väited.

Lahendusskeem.

1. Kolmnurk ADE on võrdhaarne.

2. Olgu $\angle DAE = \angle DEA = \alpha$, siis $\angle CDE = 2\alpha$.

3. Võrdhaarse kolmnurga ABC tipunurga suurus on $90° - 2\alpha$.

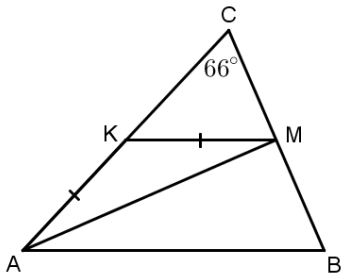
4. Võrdhaarse kolmnurga ABC alusnurga suurus on $45° + \alpha$.

5. Otsitava nurga BAE suurus on $45°$.

Vastus. Nurga BAE suurus on $45°$.

Järgmistes ülesannetes kasutame lisaks eelnevatele faktidele paralleelsete sirgete omadusi ja paralleelsuse tunnuseid, kolmnurga kesklõigu omadust, kolmnurkade võrdsuse tunnuseid ja ka täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud mediaani omadust.

Näide 8. Kolmnurga ABC külgede AC ja BC keskpunktideks on vastavalt punktid K ja M, seejuures lõigud KM ja AK on võrdse pikkusega.



Leidke nurga AMK suurus, kui $\angle ACB = 66°$.

Lahendus.

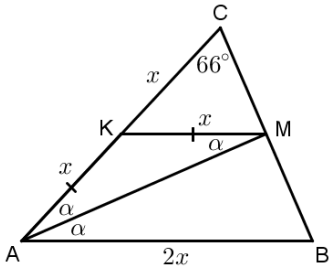
Selle ülesande lahendamiseks on mitu erinevat võimalust.

1. võimalus (välisnurga kaudu)

Teame, et lõigud KM ja AK on võrdse pikkusega. Kuna K on külje AC keskpunkt, siis $|KC| = |AK|$. Järelikult kolmnurk CKM on võrdhaarne ($|KM| = |KC|$) alusnurgaga $\angle KCM = 66°$. Selle kolmnurga tipunurk CKM on suurusega $180° - 2 \cdot 66° = 48°$. Nurk CKM osutub kolmnurga AKM **välisnurgaks**. Kuna kolmnurk AKM on võrdhaarne, siis selle mõlema alusnurga suurused on kaks korda väiksemad nurga CKM suurusest. Seega $\angle AMK = \frac{1}{2} \cdot 48° = 24°$.

2. võimalus (kesklõigu ja paralleelsete sirgete omaduste/tunnuste kaudu)

Kolmnurk AKM on võrdhaarne. Olgu selle alusnurkade suuruseks α, st $\angle KAM = \angle KMA = \alpha$. Lõik KM on kolmnurga ABC **kesklõik**, mille kohta teame, et see on küljega AB paralleelne ja temast kaks korda lühem. Seega ühelt poolt põiknurgad KMA ja BAM on võrdsed, st $\angle BAM = \angle KAM = \alpha$. Ja teiselt poolt, võttes $|KM| = |AK| = x$, saame, et $|AB| = 2x$.



Et K on külje AC keskpunkt, siis $|AC| = 2 \cdot |AK| = 2x$. Järelikult kolmnurk ABC on võrdhaarne ($|AB| = |AC| = 2x$), seega alusnurgad on võrdsed, st $\angle ABC = \angle ACB = 66°$. Selle kolmnurga tipunurk BAC on ühelt poolt suurusega 2α ja teiselt poolt selle väärtuseks on $180° - 2 \cdot 66° = 48°$. Järelikult $\alpha = \frac{1}{2} \cdot 48° = 24°$, mis ongi otsitava nurga AMK suurus.

3. võimalus (kesklõigu ja kolmnurkade võrdsuse tunnuste kaudu)

Vaatleme kolmnurki AMB ja AMC. Analoogiliselt (kesklõigu omaduse kaudu) saame näidata, et $|AB| = |AC|$. Kuna M on lõigu BC keskpunkt, siis $|MB| = |MC|$. Lisaks AM on nende kolmnurkade ühine külg. Järelikult need kolmnurgad on võrdsed tunnuse KKK järgi. Seega on võrdsed ka nende kolmnurkade vastavad nurgad. Näiteks on võrdsed nurgad AMB ja AMC, mis kokku moodustavad sirgnurga. Järelikult $\angle AMB = \angle AMC = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Lõik KM on kolmnurga ABC **kesklõik**, mille kohta teame, et see on küljega AB paralleelne ja temast kaks korda lühem. Seega ühelt poolt põiknurgad KMA ja BAM on võrdsed, st $\angle BAM = \angle KAM = \alpha$. Ja teiselt poolt, võttes $|KM| = |AK| = x$, saame, et $|AB| = 2x$. Et K on külje AC keskpunkt, siis $|AC| = 2 \cdot |AK| = 2x$. Järelikult kolmnurk ABC on võrdhaarne ($|AB| = |AC| = 2x$), seega alusnurgad on võrdsed, st $\angle ABC = \angle ACB = 66°$. Selle kolmnurga tipunurk BAC on ühelt poolt suurusega 2α ja teiselt poolt selle väärtuseks on $180° - 2 \cdot 66° = 48°$. Järelikult $\alpha = \frac{1}{2} \cdot 48° = 24°$, mis ongi otsitava nurga AMK suurus.

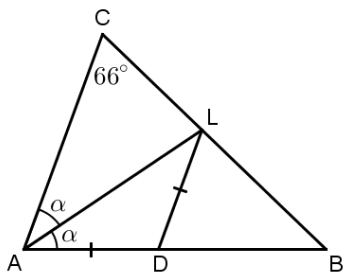
4. võimalus (täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud mediaani omaduse kaudu)

Analoogiliselt saame näidata, et lõigud AK, KC ja KM on võrdse pikkusega. Vaatleme kolmnurka AMC. Lõik MK on selle kolmnurga mediaan, mille pikkus on kaks korda lühem sellise külje pikkusest, millele see on tõmmatud. Järelikult kolmnurk AMC on **täisnurkne** ja selle teise teravnurga CAM suurus on $90° - 66° = 24°$. Lõpuks kolmnurga AKM võrdhaarsusest järeldame, et ka otsitava nurga AMK suurus on $24°$.

Vastus. Nurga AMK suurus on $24°$.

Näide 9. Kolmnurgas ABC on tõmmatud nurgapoolitaja AL ja küljel AB on valitud punkt D nii, et $|AD| = |LD|$. Leidke nurga BLD suurus, kui $\angle ACB = 66°$.

Lahendus.



1. Kuna AL on nurgapoolitaja, siis võttes nurga BAC suuruseks 2α, saame $\angle BAL = \angle CAL = \alpha$.

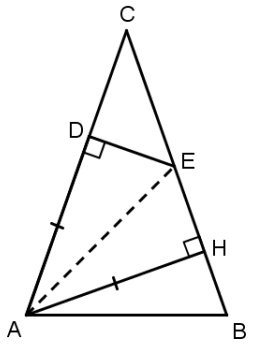
2. Kolmnurk ADL on võrdhaarne, sest ülesande tingimuse kohaselt $|AD| = |LD|$. Seega selle alusnurgad on võrdsed, st $\angle DLA = \angle DAL = \angle CAL = \alpha$.

3. Nurgad CAL ja DLA on võrdsed põiknurgad (mõlemad on suurusega α). Järelikult lõigud AC ja DL on paralleelsed.

4. Paralleelsete lõikude AC ja DL korral nurgad ACB ja BLD osutuvad võrdseteks kaasnurkadeks, st $\angle BLD = \angle ACB = 66°$.

Vastus. Nurga BLD suurus on $66°$.

Näide 10. Võrdhaarses teravnurkses kolmnurgas ABC (alusega AB) on tõmmatud kõrgus AH. Kolmnurga haaral AC on valitud punkt D nii, et lõigud AD ja AH on võrdse pikkusega, ning haaral BC on valitud punkt E nii, et nurk EDA on täisnurk.



Leidke nurga BAE suurus.

Lahendus.

1. Tõmbame lõigu AE, et joonisele tekiks otsitav nurk BAE.

2. Nüüd näeme joonisel mitut täisnurkset kolmnurka. Neist kahel kolmnurgal ADE ja AHE on ühine hüpotenuus AE ja üks paar võrdseid kaateteid AD ja AH. Järelikult need kaks täisnurkset kolmnurka on võrdsed.

3. Teame, et võrdsetes kolmnurkades on vastavad elemendid (nurgad ja küljed) sama suurusega. Järelikult vastavad nurgad DAE ja HAE on võrdsed. Teisisõnu, AE on nurga DAH nurgapoolitaja. Tähistame nende võrdsete nurkade DAE ja HAE suurused sümboliga α, st

$$\angle DAE = \angle HAE = \alpha.$$

4. Jooniselt näeme, et otsitav nurk BAE on lõiguga AH jaotatud kaheks nurgaks HAE ja HAB. Tähistades nurga HAB suurust sümboliga β, saame võrduse

$$\angle BAE = \angle HAE + \angle HAB = \alpha + \beta.$$

5. Nurk HAB on täisnurkse kolmnurga AHB üks teravnurkadest. Järelikult selle kolmnurga teise teravnurga ABH suurus on

$$\angle ABH = 90° - \angle HAB = 90° - \beta.$$

6. Ülesande tekstist jäi kasutamata veel tingimus, et esialgne kolmnurk ABC on võrdhaarne. Seega selle alusnurgad CAB ja ABC peavad olema võrdsed. Avaldame need nurgad α ja β kaudu:

$$\angle CAB = \angle DAE + \angle HAE + \angle HAB = \alpha + \alpha + \beta = 2\alpha + \beta,$$

$$\angle ABC = \angle ABH = 90° - \beta.$$

Nurkade CAB ja ABC võrdsusest järeldame seose

$$2\alpha + \beta = 90° - \beta,$$

$$2(\alpha + \beta) = 90°,$$

$$\alpha + \beta = 45°.$$

Kuna $\angle BAE = \alpha + \beta$, siis otsitava nurga BAE suurus ongi $45°$.

Vastus. Nurga BAE suurus on $45°$.

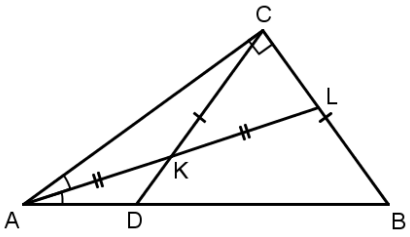
Näide 11. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusil AB on valitud punkt D nii, et $|CD| = |BC|$. Olgu K lõigu CD ja nurgapoolitaja AL lõikepunkt.

Leidke kolmnurga ABC teravnurkade suurused, kui K on lõigu AL keskpunkt.

Lahendus.

1. Olgu $\angle BAC = 2\alpha$. Kuna AL on nurgapoolitaja, siis

$$\angle BAL = \angle CAL = \alpha.$$



2. Vaatleme täisnurkset kolmnurka ACL. Kuna K on lõigu AL keskpunkt (st $|AK| = |KL|$), siis CK on vaadeldava kolmnurga mediaan. Teame, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud mediaan on hüpotenuusist kaks korda lühem, st

$$|CK| = |AK| = |KL|.$$

3. Järelikult kolmnurk AKC on võrdhaarne ($|CK| = |AK|$) ja selle alusnurgad on võrdsed, st

$$\angle ACK = \angle CAK = \alpha.$$

4. Vaatleme nüüd kolmnurka BCD. Teame, et see on võrdhaarne ($|CD| = |BC|$). Selle alusnurk BDC osutub kolmnurga ADC välisnurgaks, seega

$$\angle BDC = \angle ACD + \angle DAC = \angle ACK + \angle BAC = \alpha + 2\alpha = 3\alpha.$$

5. Võrdhaarse kolmnurga BCD alusnurkade võrdsusest järeldame, et ka nurga CBD (ehk nurga ABC) suurus on 3α.

6. Oleme α kaudu avaldanud kolmnurga ABC mõlemad teravnurgad: $\angle ABC = 3\alpha$ ja $\angle BAC = 2\alpha$. Nende suuruste summa peab olema $90°$, millest saame võrduse

$$3\alpha + 2\alpha = 90°, \quad \text{kust} \quad \alpha = 18°.$$

7. Lõpuks saame, et kolmnurga ABC teravnurkade suurused on $2\alpha = 36°$ ja $3\alpha = 54°$.

Vastus. Kolmnurga ABC teravnurkade suurused on $36°$ ja $54°$.

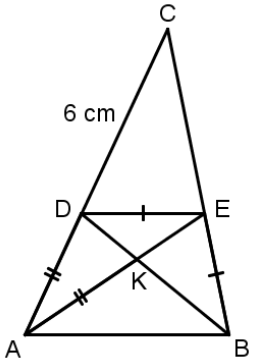
Näide 12. Kolmnurga ABC külgedel AC ja BC on vastavalt valitud punktid D ja E nii, et $DE \parallel AB$. Lõigud AE ja BD lõikuvad punktis K. On teada, et $|DE| = |EB|$ ja $|AD| = |AK|$.

Leidke lõigu AE pikkus, kui lõigu CD pikkus on 6 cm.

Lahendusskeem.

Põhjendage järgmised väited ja täiendage joonist.

1. $\angle ADK = \angle AKD = \angle BKE = \alpha$.
2. $\angle EBD = \angle EDB = \angle ABD = \beta$.
3. $\angle CED = 2\beta$.
4. $\angle KEB = \angle BAD = \angle CDE = \gamma$.
5. Kolmnurgad CDE ja AEB on võrdsed.
6. $|AE| = |CD| = 6$ cm.



Vastus. Lõigu AE pikkus on 6 cm.

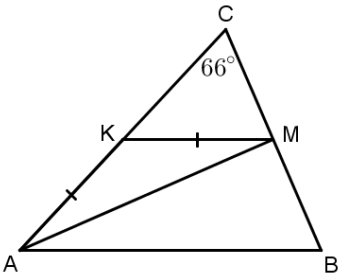
III Kolmnurga võrdhaarsuse teise omaduse ja tunnuse rakendused

Vaatleme võrdhaarsuse teise omaduse ja tunnuse kasutamist ülesannete lahendamisel.

Omadus:	Võrdhaarse kolmnurga alusele tõmmatud mediaan, nurgapoolitaja ja kõrgus langevad kokku.
Tunnus:	Kolmnurk on võrdhaarne, kui selles kolmnurgas vähemalt kaks põhilõikudest (mediaan, nurgapoolitaja ja kõrgus) langevad kokku.

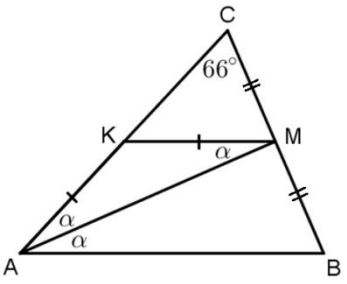
Kõigepealt esitame viienda lahendus näites 8 toodud ülesandele, kasutades seekord eespool sõnastatud võrdhaarsuse tunnust. Ülesande tekst oli järgmine.

Kolmnurga ABC külgede AC ja BC keskpunktideks on vastavalt punktid K ja M, seejuures lõigud KM ja AK on võrdse pikkusega. Leidke nurga AMK suurus, kui $\angle ACB = 66°$.



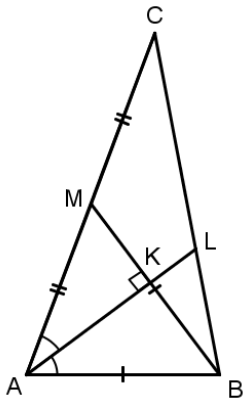
Analoogiliselt eespool toodud lahendustega, saame kolmnurga AKM võrdhaarsusest ja lõikude KM ja AB paralleelsusest järeldada seose

$$\angle KAM = \angle KMA = \angle BAM = \alpha.$$



Järelikult AM on kolmnurga ABC nurgapoolitaja. Et M on külje BC keskpunkt, siis AM on ka selle kolmnurga mediaan. Kuna nurgapoolitaja ja mediaan langevad kokku, siis kolmnurk ABC on võrdhaarne alusega BC. Järelikult AM on ka selle kolmnurga kõrgus ja näiteks kolmnurk AMC on täisnurkne. Saadud täisnurksest kolmnurgast on lihtne leida α väärtust: $\alpha = 90° - 66° = 24°$.

Näide 13. Kolmnurgas ABC on mediaani BM pikkus võrdne külje AB pikkusega ja mediaan BM on risti nurgapoolitajaga AL.



Leidke nurga ACB suurus.

Lahendus.

1. Vaatleme kolmnurka ABM. Kuna $|AB| = |BM|$, siis kolmnurk ABM on võrdhaarne alusega AM.

2. Olgu K mediaani BM ja nurgapoolitaja AL lõikepunkt. Siis AK on ühtlasi kolmnurga ABM kõrgus ja nurgapoolitaja. Järelikult kolmnurk ABM on võrdhaarne alusega BM.

5. Kokkuvõttes saame, et kolmnurk ABM on võrdhaarne alusega AM (st $|AB| = |BM|$) ja ka alusega BM (st $|AB| = |AM|$). Järelikult see kolmnurk on võrdkülgne ja selle kõik sisenurgad on suurusega $60°$.

6. Lisaks osutuvad võrdseteks ka lõigud BM ja CM, millest järeldame, et kolmnurk BMC on võrdhaarne. Selle kolmnurga tipunurk BMC on nurga AMB kõrvunurk, millest saame

$$\angle BMC = 180° - \angle AMB = 180° - 60° = 120°.$$

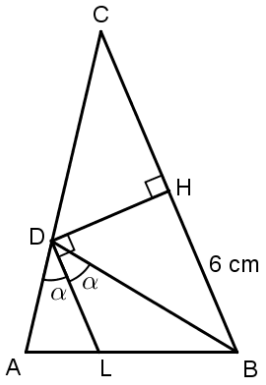
7. Otsitav nurk ACB (ehk MCB) on kolmnurga BMC alusnurk, mille suurus on $\frac{180°-120°}{2} = 30°$.

Vastus. Nurga ACB suurus on $30°$.

Näide 14. Kolmnurgas ABC on küljel AC valitud punkt D ja tõmmatud lõik BD. Kolmnurgas ABD on tõmmatud nurgapoolitaja DL ja kolmnurgas BCD on tõmmatud kõrgus DH.

Leidke külje BC pikkus, kui nurk LDH on täisnurk ja lõigu BH pikkus on 6 cm.

Lahendus.



1. Kuna lõik DL poolitab nurga ADB, siis olgu $\angle ADL = \angle BDL = \alpha$.

2. Täisnurga LDH kaudu saame avaldada nurga BDH suuruse:

$$\angle BDH = \angle LDH - \angle BDL = 90° - \alpha.$$

3. Nurk CDH on nurga ADH kõrvunurk, seega

$$\angle CDH = 180° - \angle ADH = 180° - (\angle ADL + \angle BDL + \angle BDH)$$
$$= 180° - (\alpha + \alpha + 90° - \alpha) = 90° - \alpha.$$

4. Oleme saanud, et nurgad BDH ja CDH on võrdsed ($\angle BDH = \angle CDH = 90° - \alpha$), millest järeldub, et DH on kolmnurga BCD nurgapoolitaja.

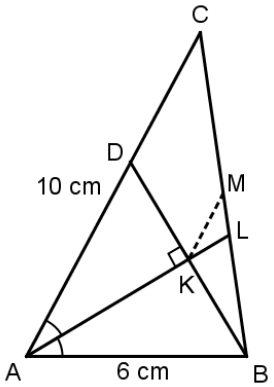
5. Kuna DH on ühtlasi kolmnurga BCD nurgapoolitaja ja kõrgus, siis see kolmnurk on võrdhaarne ja DH on ka selle kolmnurga mediaan, st $|BH| = |CH|$.

6. Nüüd saame arvutada külje BC pikkust: $|BC| = 2 \cdot |BH| = 2 \cdot 6 = 12$ (cm).

Vastus. Külje BC pikkus on 12 cm.

Näide 15. Kolmnurgas ABC, mille külgede AB ja AC pikkused on vastavalt 6 cm ja 10 cm, on tipust A tõmmatud nurgapoolitaja AL. Küljel AC on valitud punkt D nii, et lõigud BD ja AL on risti. Olgu K lõikude BD ja AL lõikepunkt ning M külje BC keskpunkt. Leidke lõigu KM pikkus.

Lahendus.



1. Vaatleme kolmnurka ABD. Selles tõmmatud lõik AK osutub nii nurgapoolitajaks kui ka kõrguseks. Järelikult kolmnurk ABD on võrdhaarne ja selle haarade pikkused on $|AB| = |AD| = 6$ (cm).

2. Lisaks sellele lõik AK on ka kolmnurga ABD mediaan, millest saame järeldada, et K on lõigu BD keskpunkt.

3. Kuna punktid K ja M on vastavalt lõikude BD ja BC keskpunktid, siis lõik KM on kolmnurga BCD kesklõik. Kesklõigu kohta teame, et see on kolmanda küljega paralleelne ja sellest kaks korda lühem. Seega $|KM| = \frac{1}{2}|CD|$.

4. Kuna lõigu AC pikkus on 10 cm, siis selle abil saame arvutada lõigu CD pikkust:

$$|CD| = |AC| - |AD| = 10 - 6 = 4 \text{ (cm)}.$$

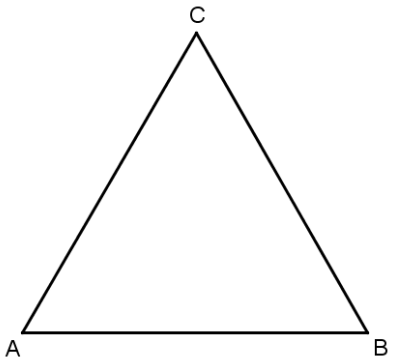
5. Lõpuks saame arvutada lõigu KM pikkust: $|KM| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ (cm).

Vastus. Lõigu KM pikkus on 2 cm.

Näide 16. Kolmnurgas ABC on nurga BAC suurus $60°$ ning nurgapoolitaja AL, mediaan BM ja kõrgus CH lõikuvad ühes punktis K.

Leidke nurkade ABC ja ACB suurused. Selleks jälgige lahendusskeemi ja lisage vastavad põhjendused.

Lahendusskeem.



1. Täiendage joonist nii, et see vastaks tekstile.

2. Leidke nurkade CAL ja ACH suurused.

3. Põhjendage, et kolmnurk AKC on võrdhaarne (alusega AC).

4. Põhjendage, et ka kolmnurk ABC on võrdhaarne (alusega AC).

5. Arvutage otsitavate nurkade ABC ja ACB suurused.

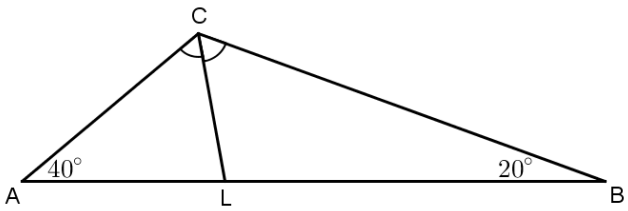
Vastus. Mõlema nurga ABC ja ACB suuruseks on $60°$.

IV Abiks on lisakonstruktsioon

Lisakonstruktsiooniks võime lihtsalt nimetada tekstile vastava joonise täiendamist uute elementidega, mis aitavad märgata ülesandes antud suuruste ja otsitavate suuruste vahelisi seoseid. Mõned lisakonstruktsioonid (täiendavad punktid, lõigud, kolmnurgad jms) tekivad loomulikult ülesande andmete põhjal, näiteks ühendades kahte olemasolevat punkti lõiguga. Teised aga ei ole nii ilmsed ning nõuavad lahendajalt leidlikkust.

Näide 17. Kolmnurgas ABC on tipu A juures oleva nurga suurus $40°$ ja tipu B juures oleva nurga suurus $20°$. Külg AB on 6 cm võrra pikem küljest BC.

Leidke tipust C tõmmatud nurgapoolitaja CL pikkus.



Lahendus.

1. Kuna kolmnurgas ABC on kahe nurga suurused teada, siis saame leida ka kolmanda nurga suuruse:

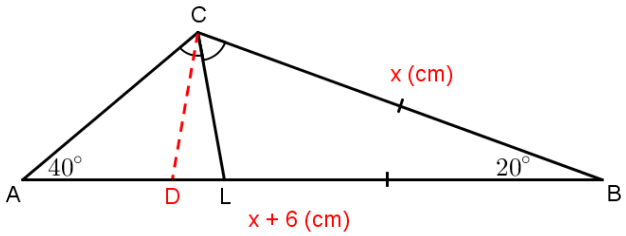
$$\angle ACB = 180° - (\angle BAC + \angle ABC) = 180° - (40° + 20°) = 120°.$$

Järelikult jaotab nurgapoolitaja CL nurga ACB kaheks nurgaks $\angle ACL = \angle BCL = 60°$.

2. Analoogiliselt saame arvutada ka tekkinud kolmnurkade ACL ja BCL tipu L juures olevad nurgad. Need on $\angle ALC = 80°$ ja $\angle BLC = 100°$.

3. Praeguseks on kõikide nurkade suurused teada ja tegeleme nüüd külgedega. Tähistades külje BC pikkust suurusega x (cm), saame ülesande teksti põhjal, et $|AB| = x + 6$ (cm).

4. Külg AB on kolmnurga ABC pikim külg (kuna selle vastas on selle kolmnurga suurim nurk). Järelikult saame küljel AB valida sellise punkti D, et $|BD| = |BC| = x$ (cm). Arvutame kohe ka lõigu AD pikkuse: $|AD| = |AB| - |BD| = (x + 6) - x = 6$ (cm).



5. Sellise lisakonstruktsiooni tulemusena tekib võrdhaarne kolmnurk CBD alusega CD. Selle kolmnurga tipunurga CBD suurus on $20°$, seega selle kolmnurga alusnurgad on

$$\angle BCD = \angle BDC = \frac{1}{2} \cdot (180° - 20°) = 80°.$$

6. Nurk BDC on kolmnurga ADC välisnurk, seega kehtib seos

$$\angle BDC = \angle DAC + \angle DCA \quad \text{ehk} \quad 80° = 40° + \angle DCA,$$

kust $\angle DCA = 40°$.

7. Kolmnurgas ADC on nüüd kahe nurga DAC ja DCA suurused võrdsed, seega antud kolmnurk on võrdhaarne ja selle haarade pikkused on $|CD| = |AD| = 6$ (cm).

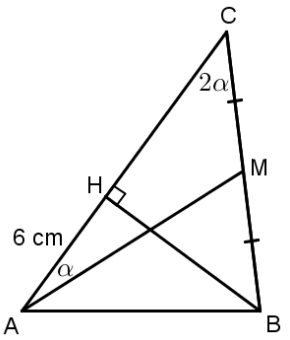
8. Vaatleme lõpuks kolmnurka DCL. Selle kolmnurga üks nurkadest on $\angle LDC = \angle BDC = 80°$ ja teine nurk on $\angle DCL = \angle ACL - \angle DCA = 60° - 40° = 20°$. Järelikult selle kolmnurga kolmas nurk CLD on suurusega $180° - (80° + 20°) = 80°$. Kuna kolmnurgas DCL on kaks nurka võrdsed, siis ka see kolmnurk on võrdhaarne võrdsete haaradega CD ja CL. Kuna $|CD| = 6$ (cm), siis ka otsitava nurgapoolitaja CL pikkus on 6 cm.

Vastus. Nurgapoolitaja CL pikkus on 6 cm.

Näide 18. Teravnurkses kolmnurgas ABC on tõmmatud mediaan AM ja kõrgus BH. On teada, et $|AH| = 6$ cm ja $\angle ACB = 2\angle CAM$.

Leidke külje BC pikkus.

Lahendus.



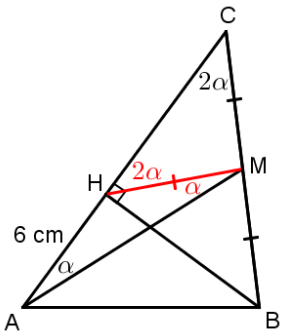
1. Olgu $\angle CAM = \alpha$, siis $\angle ACB = 2\alpha$.

2. Vaatleme täisnurkset kolmnurka BHC. Tõmbame lõigu HM, mis osutub selle kolmnurga mediaaniks. Kuna täisnurkses kolmnurgas hüpotenuusile tõmmatud mediaan on hüpotenuusist kaks korda lühem, siis

$$|HM| = \frac{1}{2} \cdot |BC| = |BM| = |CM|.$$

3. Tekkinud kolmnurk CMH on võrdhaarne ($|CM| = |HM|$), seega selle alusnurgad on võrdsed, st

$$\angle CHM = \angle HCM = \angle ACB = 2\alpha.$$



4. Nurk CHM on kolmnurga AHM välisnurk, st kehtib võrdus

$$\angle CHM = \angle MAH + \angle AMH \quad \text{ehk} \quad 2\alpha = \alpha + \angle AMH,$$

kust $\angle AMH = \alpha$.

5. Järelikult kolmnurk AHM on võrdhaarne ($\angle MAH = \angle AMH = \alpha$) ja võrdseteks haaradeks on AH ja HM, st $|HM| = |AH| = 6$ (cm).

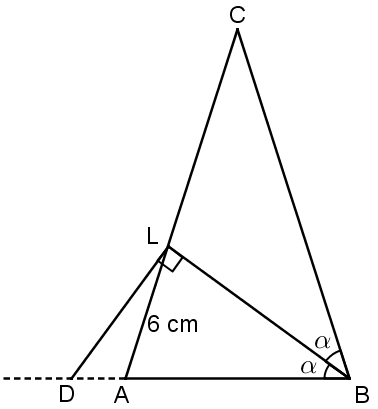
6. Kokkuvõttes saame, et $|BC| = 2 \cdot |HM| = 2 \cdot 6 = 12$ (cm).

Vastus. Külje BC pikkus on 12 cm.

Näide 19. Võrdhaarses kolmnurgas ABC alusega AB on tõmmatud nurgapoolitaja BL. Külje AB pikendusel üle punkti A on valitud punkt D nii, et nurk DLB on täisnurk.

Leidke lõigu BD pikkus, kui $|AL| = 6$ cm.

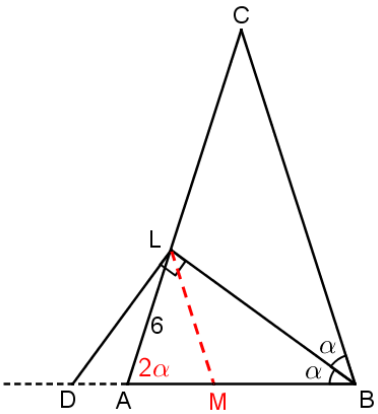
Lahendus.



1. Olgu võrdsed nurgad ABL ja CBL mõlemad suurusega α. Et kolmnurk ABC on võrdhaarne, siis selle alusnurgad ABC ja CAB on võrdsed:

$$\angle CAB = \angle ABC = \angle ABL + \angle CBL = \alpha + \alpha = 2\alpha.$$

2. Kolmnurk BLD on täisnurkne. Valime selle hüpotenuusil BD keskpunkti M ja tõmbame lõigu LM.



3. Teame, et hüpotenuusile tõmmatud mediaan on hüpotenuusist 2 korda lühem. Järelikult lõigud LM ja BM on võrdse pikkusega ning seega kolmnurk BML on võrdhaarne.

4. Võrdhaarses kolmnurgas BML on alusnurgad võrdsed, st

$$\angle BLM = \angle MBL = \alpha.$$

5. Kuna nurk AML on kolmnurga BML välisnurk, siis

$$\angle AML = \angle BLM + \angle MBL = \alpha + \alpha = 2\alpha.$$

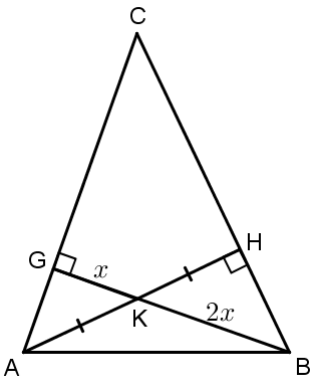
6. Oleme saanud, et kolmnurgas ALM on kaks nurka suurusega 2α. Järelikult see kolmnurk on võrdhaarne võrdsete haaradega AL ja ML.

7. Nüüd saame avaldada lõigu BD pikkuse lõigu AL pikkuse kaudu:

$$|BD| = 2 \cdot |BM| = 2 \cdot |LM| = 2 \cdot |AL| = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (cm)}.$$

Vastus. Lõigu BD pikkus on 12 cm.

Näide 20. Teravnurkse kolmnurga ABC kõrgused AH ja BG lõikuvad punktis K. On teada, et K on lõigu AH keskpunkt ja $|BK| = 2 \cdot |KG|$.



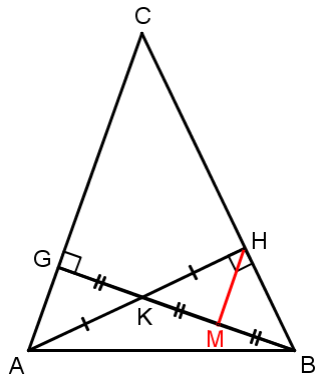
Leidke nurga ACB suurus.

Lahendus.

1. Olgu M lõigu BK keskpunkt. Sellisel juhul punktid M ja K jaotavad lõiku BK kolmeks võrdseks osaks, st

$$|BM| = |MK| = |KG|.$$

2. Tõmbame lõigu HM, mis osutub täisnurkse kolmnurga BHK mediaaniks.



3. Vaatleme kolmnurki AGK ja HMK. Nendel on kaks paari võrdseid külgi ($|GK| = |MK|$ ja $|AK| = |HK|$) ning on võrdsed ka nendevahelised nurgad ($\angle AKG = \angle HKM$ kui tippnurgad). Järelikult on kolmnurgad AGK ja HMK võrdsed tunnuse KNK järgi.

4. Kuna kolmnurk AGK on täisnurkne, siis ka kolmnurk HMK on täisnurkne (täisnurgaga HMK). Järelikult lõik HM on kolmnurga BHK kõrgus.

5. Teame, et HM on täisnurkses kolmnurgas BHK nii mediaan kui ka kõrgus. Järelikult kolmnurk BHK on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille alusnurgad on suurusega $45°$, st

$$\angle HBK = \angle HKB = 45°.$$

6. Lõpuks otsitava nurga ACB suurust saame arvutada näiteks täisnurksest kolmnurgast BGC:

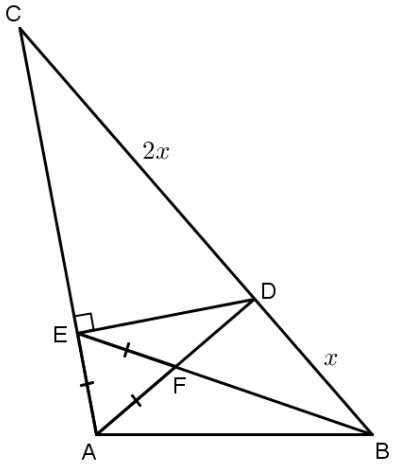
$$\angle ACB = \angle BCG = 90° - \angle CBG = 90° - \angle HBK = 90° - 45° = 45°.$$

Vastus. Nurga ACB suurus on $45°$.

Näide 21. Kolmnurga ABC küljel BC on valitud punkt D nii, et $|CD| = 2 \cdot |BD|$. Küljel AC on valitud punkt E nii, et nurk DEA on täisnurk. Olgu F lõikude AD ja BE lõikepunkt.

Leidke nurga ADB suurus, kui on lisaks teada, et kolmnurk AEF on võrdkülgne.

Lahendus.



1. Kuna AEF on võrdkülgne kolmnurk, siis selle kõikide nurkade suurused on $60°$.

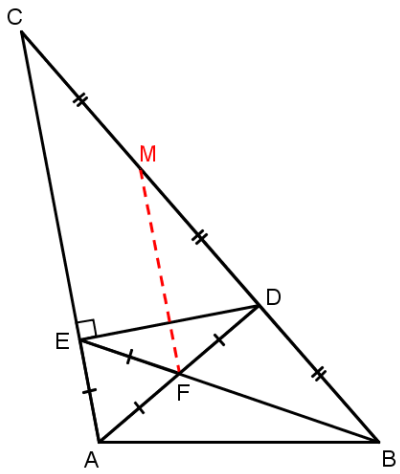
2. Vaatleme täisnurkset kolmnurka AED. Kuna üks selle teravnurkadest DAE on suurusega $60°$, siis teine teravnurk ADE on suurusega $30°$. Lisaks saame arvutada ka nurga DEF suurust:

$$\angle DEF = \angle DEA - \angle AEF = 90° - 60° = 30°.$$

3. Kuna kolmnurgas DFE on kahe nurga suurused võrdsed ($\angle DEF = \angle FDE = 30°$), siis see on võrdhaarne kolmnurk, millest saame järeldada seose $|DF| = |EF| = |AE| = |AF|$.

4. Oleme saanud, et F on lõigu AD keskpunkt. Olgu punkt M lõigu CD keskpunkt. Sellisel juhul punktid D ja M jaotavad lõigu BC kolmeks võrdseks osaks ($|BD| = |DM| = |CM|$).

5. Vaatleme nüüd kolmnurka ADC. Kuna punktid F ja M on vastavalt külgede AD ja CD keskpunktid, siis FM on selle kolmnurga kesklõik, mis on alusega AC paralleelne.



6. Järelikult on nurgad CAD ja MFD võrdsed kaasnurgad, st

$$\angle MFD = \angle CAD = 60°.$$

7. Vaatleme kolmnurka BFM. Ühelt poolt lõik FD on selle kolmnurga mediaan ($|BD| = |DM|$) ja teiselt poolt see osutub ka selle kolmnurga nurgapoolitajaks, kuna $\angle MFD = 60°$ ja $\angle BFD = \angle AFE = 60°$. Järelikult kolmnurk BFM on võrdhaarne.

8. Võrdhaarses kolmnurgas BFM mediaan ja nurgapoolitaja FD osutub ka kõrguseks, st $\angle FDB = 90°$.

9. Lõpuks märgime, et otsitav nurk ADB on sama, mis nurk FDB.

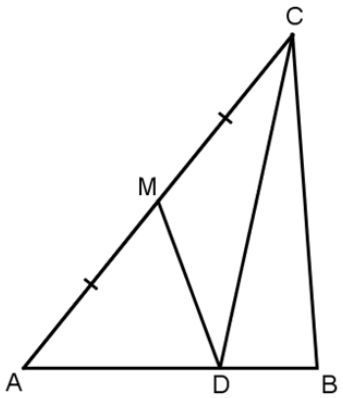
Vastus. Nurga ADB suurus on $90°$.

Näide 22. Kolmnurga ABC küljel AB on valitud selline punkt D, et $|AD| = 2 \cdot |BD|$. Olgu M külje AC keskpunkt.

Leidke nurga ABC suurus, kui on lisaks teada, et $|CD| = 2 \cdot |DM|$.

Lahendusskeem.

1. Olgu $|BD| = a$ ja $|DM| = b$. Kandke lõikude AD, BD, CD ja DM pikkused joonisele.



2. Külje AB pikendusel üle punkti B valime punkti E nii, et $|BE| = a$. Täiendage joonist.

3. Põhjendage, et lõik DM on kolmnurga ACE kesklõik.

4. Leidke lõigu CE pikkus.

5. Põhjendage, et kolmnurk DCE on võrdhaarne.

6. Põhjendage, et lõik CB osutub kolmnurga DCE kõrguseks.

7. Leidke nurga ABC suurus.

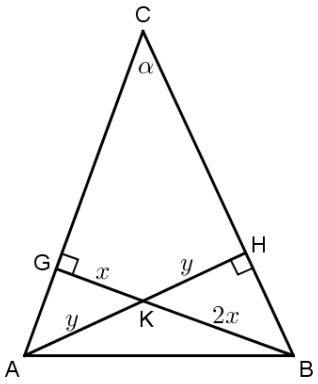
Vastus. Nurga ABC suurus on $90°$.

V Abiks on trigonomeetria

Vihiku selles osas otsime näidetes 17 – 20 sõnastatud ülesannetele uued lahendused, mis tuginevad trigonomeetriliste seoste rakendamisele. Siinjuures on põhilisteks oskusteks gümnaasiumis õpitud täisnurkse kolmnurga lahendamine, siinusteoreemi tundmine ning trigonomeetriliste avaldiste lihtsustamine. Enne lahenduste uurimist tasub korrata eelnimetatud teemadega seotud trigonomeetrilisi valemeid.

Näide 20*. Teravnurkse kolmnurga ABC kõrgused AH ja BG lõikuvad punktis K. On teada, et K on lõigu AH keskpunkt ja $|BK| = 2 \cdot |KG|$.

Leidke nurga ACB suurus.



Lahendus.

1. Olgu

$$\angle ACB = \alpha, \quad |GK| = x, \quad |BK| = 2x \quad \text{ja} \quad |AK| = |HK| = y.$$

2. Avaldame α kaudu nurkade CAH ja CBG suurused. Vastavatest täisnurksetest kolmnurkadest AHC ja BGC saame, et

$$\angle CAH = \angle CBG = 90° - \alpha.$$

3. Vaatleme täisnurkset kolmnurka AGK.

Kuna $\angle KAG = \angle CAH = 90° - \alpha$, siis kehtib võrdus

$$\sin \angle KAG = \frac{|GK|}{|AK|} \qquad \text{ehk} \qquad \sin(90° - \alpha) = \frac{x}{y}.$$

4. Analoogiliselt täisnurksest kolmnurgast BHK, kus $\angle KBH = \angle CBG = 90° - \alpha$, saame seose

$$\sin(90° - \alpha) = \frac{y}{2x}.$$

5. Järelikult peab kehtima võrdus

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{2x} \qquad \text{ehk} \qquad y^2 = 2x^2 \qquad \text{ehk} \qquad y = \sqrt{2}x.$$

6. Asendades y avaldisega $\sqrt{2}x$ näiteks teises võrduses, saame

$$\sin(90° - \alpha) = \frac{\sqrt{2}x}{2x}.$$

Kuna $\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$, siis

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

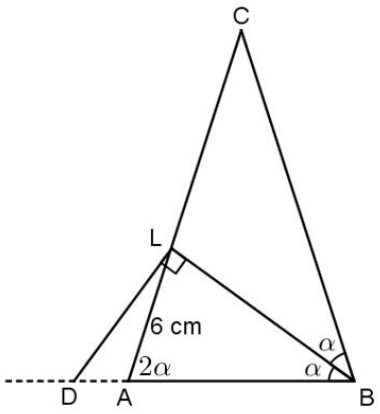
millest järeldub, et teravnurga ACB suuruse α väärtuseks on $45°$.

Vastus. Nurga ACB suurus on $45°$.

Näide 19*. Võrdhaarses kolmnurgas ABC alusega AB on tõmmatud nurgapoolitaja BL. Külje AB pikendusel üle punkti A on valitud punkt D nii, et nurk DLB on täisnurk.

Leidke lõigu BD pikkus, kui $|AL| = 6$ cm.

Lahendus.



1. Olgu $\angle ABL = \angle CBL = \alpha$. Kuna ABC on võrdhaarne kolmnurk, siis $\angle CAB = 2\alpha$.

2. Rakendame kolmnurgas ABL siinusteoreemi:

$$\frac{|AL|}{\sin\angle ABL} = \frac{|BL|}{\sin\angle BAL} \quad \text{ehk} \quad \frac{6}{\sin\alpha} = \frac{|BL|}{\sin 2\alpha},$$

kust

$$|BL| = \frac{6\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{12\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 12\cos\alpha.$$

3. Täisnurkse kolmnurga BLD kaudu avaldame otsitava lõigu BD pikkuse seosest $\cos\angle DBL = |BL| : |BD|$. Saame

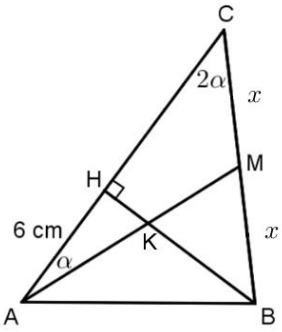
$$|BD| = \frac{|BL|}{\cos\angle DBL} = \frac{12\cos\alpha}{\cos\alpha} = 12\ (\text{cm}).$$

Vastus. Lõigu BD pikkus on 12 cm.

Näide 18*. Teravnurkses kolmnurgas ABC on tõmmatud mediaan AM ja kõrgus BH. On teada, et $|AH| = 6$ cm ja $\angle ACB = 2\angle CAM$.

Leidke külje BC pikkus.

Lahendus.



1. Olgu $\angle CAM = \alpha$, siis $\angle ACB = 2\alpha$. Olgu $|BM| = |CM| = x$.

2. Avaldame α kaudu kolmnurga BKM kaks nurka:

$$\angle BKM = \angle AKH = 90° - \angle KAH = 90° - \alpha,$$

$$\angle KBM = 90° - \angle BCH = 90° - 2\alpha.$$

3. Avaldame α ja x kaudu kolmnurga BKM külje KM. Kõigepealt saame täisnurksest kolmnurgast AHK seose

$$\cos\alpha = \frac{6}{|AK|}, \quad \text{kust} \quad |AK| = \frac{6}{\cos\alpha}.$$

Siis kolmnurgast AMC saame siinusteoreemi abil seose

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{|AM|}{\sin 2\alpha}, \quad \text{kust} \quad |AM| = \frac{x\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2x\cos\alpha.$$

Lõpuks avaldame lõigu KM pikkuse leitud lõikude AK ja AM pikkuste kaudu:

$$|KM| = |AM| - |AK| = 2x\cos\alpha - \frac{6}{\cos\alpha}.$$

4. Nüüd saame rakendada siinusteoreemi kolmnurga BKM elementide jaoks:

$$\frac{|BM|}{\sin\angle BKM} = \frac{|KM|}{\sin\angle KBM} \quad \text{ehk} \quad \frac{x}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{2x\cos\alpha - \dfrac{6}{\cos\alpha}}{\sin(90° - 2\alpha)}.$$

5. Saadud seose lihtsustamisel leiame x väärtuse:

$$\frac{x}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{2x\cos\alpha - \dfrac{6}{\cos\alpha}}{\sin(90° - 2\alpha)},$$

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{2x\cos\alpha - \dfrac{6}{\cos\alpha}}{\cos 2\alpha},$$

$$\cos\alpha \cdot \left(2x\cos\alpha - \frac{6}{\cos\alpha}\right) = x\cos 2\alpha,$$

$$2x\cos^2\alpha - 6 = x \cdot (2\cos^2\alpha - 1),$$

$$2x\cos^2\alpha - 6 = 2x\cos^2\alpha - x,$$

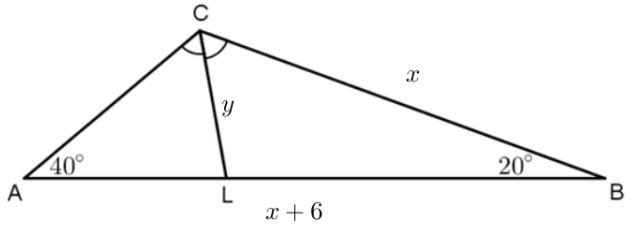
$$-6 = -x,$$

kust $x = 6$ (cm). Otsitav lõik BC on pikkusega $2x$ ehk 12 cm.

Vastus. Külje BC pikkus on 12 cm.

Näide 17*. Kolmnurgas ABC on tipu A juures oleva nurga suurus $40°$ ja tipu B juures oleva nurga suurus $20°$. Külg AB on 6 cm võrra pikem küljest BC.

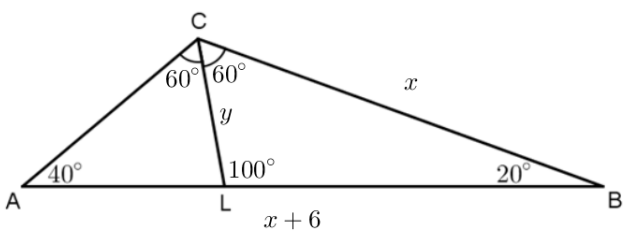
Leidke tipust C tõmmatud nurgapoolitaja CL pikkus.



Lahendus.

1. Olgu $|BC| = x$ (cm), siis $|AB| = x + 6$ (cm). Olgu $|CL| = y$ (cm).

2. Kolmnurga ABC nurkade summa kaudu leiame, et $\angle ACB = 180° - (40° + 20°) = 120°$. Kuna CL on nurgapoolitaja, siis näiteks $\angle BCL = 60°$. Kolmnurga BCL nurkade summa kaudu leiame, et $\angle BLC = 180° - (20° + 60°) = 100°$.



3. Rakendame siinusteoreemi kõigepealt kolmnurgas ABC:

$$\frac{x+6}{\sin 120°} = \frac{x}{\sin 40°},$$

$$x \sin 120° = x \sin 40° + 6 \sin 40°,$$

$$x(\sin 120° - \sin 40°) = 6 \sin 40°,$$

$$x = \frac{6 \sin 40°}{\sin 120° - \sin 40°}.$$

Trigonomeetrilise valemi $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ abil saame saadud seost lihtsustada:

$$x = \frac{6 \sin 40°}{\sin 120° - \sin 40°} = \frac{6 \sin 40°}{2 \sin 40° \cos 80°} = \frac{3}{\cos 80°}.$$

4. Rakendades siinusteoreemi kolmnurgas BLC, saame järgmise seose

$$\frac{x}{\sin 100°} = \frac{y}{\sin 20°},$$

$$y = \frac{x \sin 20°}{\sin 100°}.$$

5. Asendades x tema väärtusega, saame arvutada y väärtuse:

$$y = \frac{x \sin 20°}{\sin 100°} = \frac{\frac{3}{\cos 80°} \cdot \sin 20°}{\sin 100°} = \frac{3 \sin 20°}{\sin 100° \cos 80°} = \frac{3 \sin 20°}{\sin(90° + 10°) \cos(90° - 10°)} =$$

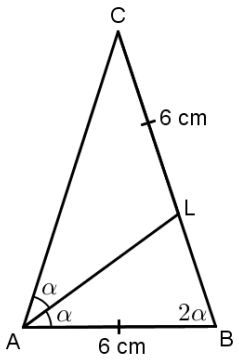
$$= \frac{3 \sin 20°}{\cos 10° \sin 10°} = \frac{3 \cdot 2 \sin 10° \cos 10°}{\cos 10° \sin 10°} = 6 \text{ (cm)}.$$

Vastus. Nurgapoolitaja CL pikkus on 6 cm.

Viimane kokkuvõttev näiteülesanne puudutab taaskord kuldset kolmnurka. Sellele anname kaks erinevat lahendust.

Näide 23. Võrdhaarses kolmnurgas ABC alusega AB on tõmmatud nurgapoolitaja AL.

Leidke nurgapoolitaja AL pikkus ja nurga ACB suurus, kui $|CL| = |AB| = 6$ cm.



Lahendus 1.

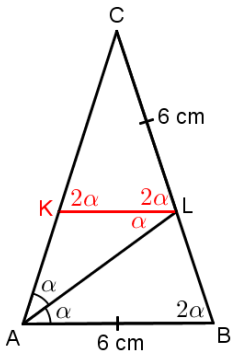
1. Olgu $\angle BAL = \angle CAL = \alpha$. Kuna kolmnurk ABC on võrdhaarne, siis $\angle ABC = 2\alpha$.

2. Valime küljel AC punkti K nii, et $KL \parallel AB$ ja tõmbame lõigu KL.

3. Siis on paralleelsete sirgete KL ja AB korral nurgad ALK ja BAL võrdsed põiknurgad, CLK ja CBA võrdsed kaasnurgad ning CKL ja CAB samuti võrdsed kaasnurgad. Teisisõnu, kehtivad võrdused

$$\angle ALK = \angle BAL = \angle CAL = \alpha, \quad \angle CLK = \angle CBA = 2\alpha \quad \text{ja} \quad \angle CKL = \angle CAB = 2\alpha.$$

4. Järelikult kolmnurk KCL on võrdhaarne ($\angle CLK = \angle CKL = 2\alpha$) ja selle haarad CK ja CL on võrdsed.



5. Lisaks ka kolmnurk AKL on võrdhaarne ($\angle ALK = \angle LAK = \alpha$), st $|AK| = |KL|$.

6. Seega on võrdse pikkusega ka lõigud BL ja KL:

$$|BL| = |BC| - |CL| = |AC| - |CK| = |AK| = |KL|.$$

7. Vaatleme kolmnurki KCL ja BAL. Need on võrdsed tunnuse KNK järgi, kuna

$$|CL| = |AB|, \quad \angle CLK = \angle ABL = 2\alpha \quad \text{ja} \quad |KL| = |BL|.$$

8. Järelikult ka kolmnurk BAL on võrdhaarne, st

$$\angle ALB = \angle ABL = 2\alpha,$$

ning kolmnurgas KLC on tipunurk KCL (ehk otsitav nurk ACB suurusega α).

9. Võrdhaarsest kolmnurgast BAL saame järeldada, kui pikk on otsitav lõik AL:

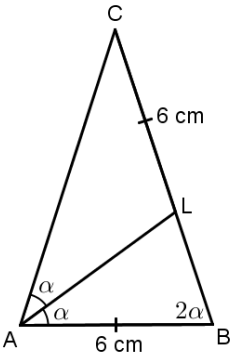
$$|AL| = |AB| = 6 \text{ cm}.$$

10. Näiteks kolmnurga ABC sisenurkade summa järgi saame arvutada α väärtuse:

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180° \quad \text{ehk} \quad 5\alpha = 180°,$$

kust $\alpha = 36°$. Seega ABC on kuldne kolmnurk.

Lahendusskeem 2.



Põhjendage järgmised väited, et saaksite täieliku trigonomeetrilise lahenduse.

1. Olgu $\angle BAL = \angle CAL = \alpha$, siis $\angle ABC = 2\alpha$.

2. $\angle ACB = 180° - 4\alpha$.

3. Rakendades kolmnurgas ALC siinusteoreemi ja lihtsustades saadud avaldist, saame $|AL| = 24 \cos\alpha \cos 2\alpha$.

4. Rakendades siinusteoreemi kolmnurgas ABL ja lihtsustades saadud avaldist, saame $|AL| = 2\cos\alpha \cdot |BL|$.

5. Järelikult $|BL| = 12 \cos 2\alpha$.

6. Esitades lõigu BC pikkuse kujul $|BL| + 6$ ja rakendades siinusteoreemi kolmnurgas ABC, saame

$$\cos 2\alpha = \frac{3}{|BL| + 6}.$$

7. Järelikult pikkuse $|BL|$ suhtes kehtib ruutvõrrand

$$|BL|^2 + 6 \cdot |BL| - 36 = 0,$$

mille positiivseks lahendiks on $|BL| = 3\sqrt{5} - 3$ (cm).

8. Kuna $\alpha < 45°$, siis võrdusest $|BL| = 12 \cos 2\alpha$ saame, et $\alpha = 36°$.

9. Lõpuks arvutame lõigu AL pikkuse ja nurga ACB suuruse:

$$|AL| = 2\cos\alpha \cdot |BL| = 6 \text{ (cm)} \quad \text{ja} \quad \angle ACB = 180° - 4\alpha = 36°.$$

Vastus. Nurgapoolitaja AL pikkus on 6 cm ja nurga ACB suurus on $36°$.