Tuletised ja diferentsiaalid

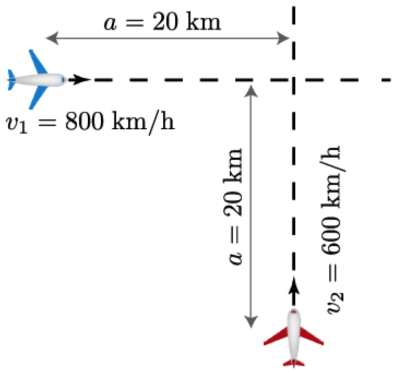
Mihkel Kree, mihkel.kree@gmail.com

Teaduskooli õppesessioon, 22. jaanuaril 2017

Mõtled sel aastal olümpiaadil osaleda? Tutvu ülesannete arhiiviga siin: http://efo.fyysika.ee/ulesannete-arhiiv
Hakka meie fänniks Facebookis: http://www.facebook.com/fyysikaolympiaad

Ekstreemumite leidmine geomeetriliselt

Füüsikaülesannetes otstitakse tihtipeale mingi suuruse (vektori mooduli, teepikkuse, nurga vms) minimaalset või maksimaalset väärtust. Selgub, et analüütilise lahendamise (tuletiste arvutamine) asemel on need ülesanded tihtipeale geomeetriliselt lihtsalt lahenduvad: ülesanne taandub näiteks ristlõikude või puutujate arvutamisele.



Ülesanne 1. (**Piirk 2013, PK9**)
Kaks lennukit lendavad samal kõrgusel kiirustega $v_1 = 800\,\mathrm{km/h}$ ja $v_2 = 600\,\mathrm{km/h}$. Vaadeldaval hetkel on lennukite liikumise sihid omavahel risti ning kumbki lennuk paikeb sihtide ristumispunktist kaugusel $a = 20\,\mathrm{km}$. Leidke, milline on lennukite vähim vahekaugus järgneva liikumise jooksul, kui eeldada, et kumbki lennuk kurssi ei muuda.

Ülesanne 2. (**Loppv 2000, G3**)
Poiss ujub jõevoolu kiirusest kaks korda väiksema kiirusega. Millise nurga all peaks ta kalda suhtes liikuma, et (a) jõuda võimalikult kiiresti üle jõe; (b) ületada jõgi minimaalse võimaliku jõevoolusihilise nihkega?

Ülesanne 3. (**Eesti-Soome 2015.6**) Poiss jookseb suurel jääväljakul kiirusega $v = 5\,\mathrm{m/s}$ põhja suunas. Hõõrdetegur jalgade ja jää ahel on $\mu = 0{,}1$. Lugege lihtsustavalt, et poisi ja jää vaheline toereaktsioon püsib ajas konstantne (reaalselt see hüpleb vastavalt jalgadega tõukamisele, kuid ülaltoodud lihtsustust õigustab asjaolu, et üle ühe sammu keskmistatud väärtus püsib konstantne). Milline on vähim aeg, mille jooksul tal on võimalik muuta oma jooksusuund idasuunaliseks nii, et lõppkiirus oleks samuti $v = 5\,\mathrm{m/s}$? Kuidas nimetatakse tema optimaalse liikumistrajektoori kuju?

Diferentsiaal ja tuletis

Funktsiooni $f(x)$ diferentsiaaliks nimetame muutu $df = f(x+dx) - f(x)$. See vastab funktsiooni muutumisele, kui argument muutub dx võrra. Suhet $f' = df/dx$ nimetame funktsiooni tuletiseks ning see vastab ka graafiku tõusule $\tan\alpha$ (ekstreemumpunktides on graafiku tõus ja tuletis null). Võib ka vastupidi öelda: diferentsiaali saab avaldada tuletise f' ja argumendi muudu dx abil: $f(x+dx) = f(x) + df$, kus $df = f'dx$. (Kui valemid tunduvad keerulised, mõtleme graafikute peale). Tuletiste ja diferentsiaalide arvutamisel lähtume järgnevatest seostest väikese α jaoks:

$$(1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha, \quad \sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha, \quad e^\alpha \approx 1 + \alpha, \quad \ln(1+\alpha) \approx \alpha$$

Ülesanne 4. Tuletage järgnevad põhifunktsioonide diferentsiaalid ja tuletised.

Algseos	Diferentsiaal	Tuletis
$f = const$	$df = 0$	$\frac{df}{dt} = 0$
$v = at$	$dv = a\,dt$	$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = a$
$x = \frac{1}{2}at^2$	$dx = at\,dt$	$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = at$
$f = x^n$	$df = nx^{n-1}\,dx$	$f' = \frac{df}{dx} = nx^{n-1}$
$y = \sin\alpha$	$dy = \cos\alpha\,d\alpha$	$\frac{dy}{d\alpha} = \cos\alpha$
$y = \cos\alpha$	$dy = -\sin\alpha\,d\alpha$	$\frac{dy}{d\alpha} = -\sin\alpha$
$y = e^x$	$dy = d(e^x) = e^x\,dx$	$\frac{dy}{dx} = e^x = y$
$y = \ln x$	$dy = d(\ln x) = \frac{dx}{x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

Liitfunktsiooni tuletise võtmise reegel (ingl k *chain rule*), kus f on funktsioon g-st ning g omakorda funktsioon t-st:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt}.$$

Ülesanne 5. Tuletage järgnevad liitfunktsioonide diferentsiaalid ja tuletised:

Algseos	Diferentsiaal	Tuletis
$f = (1+x^2)^n$	$df = n(1+x^2)^{n-1}2xdx$	$\frac{df}{dx} = 2n(1+x^2)^{n-1}x$
$v = e^{-\lambda t}$	$dv = -\lambda e^{-\lambda t}dt$	$\frac{dv}{dt} = -\lambda e^{-\lambda t} = -\lambda v$
$x = \cos(\omega t)$	$dx = -\omega\sin(\omega t)t$	$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\omega\sin(\omega t)$

Mitme muutuja funktsioonide puhul koosneb kogudiferentsiaal osadiferentsiaalide summast.

Ülesanne 6. Tuletage järgnevad mitme muutuja funktsioonide diferentsiaalid:

Algseos	Diferentsiaal	Tuletis
$f = uv$	$df = u\,dv + v\,du$	$\frac{df}{dt} = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt}$
$f = PV^\gamma$	$df = \gamma PV^{\gamma-1}dV + V^\gamma dP$	
$\ln f = \ln P + \gamma\ln V$	$d(\ln f) = \frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V}$	

Vektorite diferentsiaalid

Ülesanne 7. Vaadelgem ringjoonelist liikumist kiirusega v mööda ringjoont raadiusega r. Tuletage radiaalkiirenduse valem $a = v^2/r$.

Harmooniline võnkumine

Ülesanne 8. Vaatleme harmoonilist võnkumist $x(t) = A\cos(\omega t)$. Avaldage $v(t)$ ja $a(t)$. Veenduge, et kogu võnkumise kestel kehtib energia jäävuse seadus. Milline seos kehtib a ja x vahel?

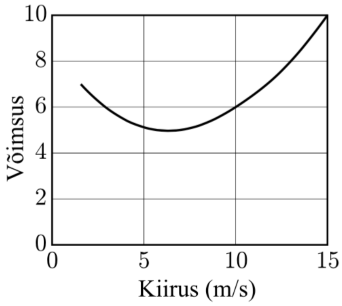
Ülesanne 9. Vedru jäikusega k külge on kinnitatud koormis m, avaldage võnkumise sagedus.

Ülesanne 10. Avaldage a) matemaatilise (punktmass) ja b) füüsikalise pendli (meenutage inertsimomenti ja Steineri teoreemi) võnkumise sagedus.

Ekstreemum

Ülesanne 11. Pingeallikale $\mathcal{E}$ sisetakistusega r ühendatakse väline tarbija takistusega R. Millise R korral on tarbijal eralduv võimsus maksimaalne?

Ülesanne 12. (**Lõppv 2003, G7**) Võimsus, mida lind arendab lendamisel, sõltub lennukiirusest. Järgneval graafikul on esitatud see sõltuvus teatava linnuliigi jaoks (ordinaatteljel on suhtelised ühikud). Olgu linnul tarvis läbida teatav vahemaa s. Millise kiirusega peaks ta lendama, et energiakulu oleks minimaalne?



Virtuaalse nihke printsiip

Ülesanne 13. On teada, et kera ruumala avaldub kujul $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (miks?). Tuletage sfääri pindala valem.

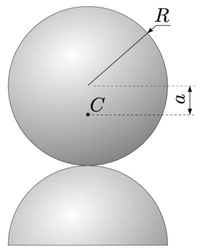
Ülesanne 14. Avaldage seebimullis pindpinevusteguriga σ ja raadiusega r olev pindpinevusest tingitud lisarõhk Δp.

Ülesanne 15. Kondensaatori plaatidel pindalaga S ja vahekaugusega d on laeng q. Plaatide vahelist ruumi täidab dielektrikust plaat dielektrilise läbitavusega ε. Millist jõudu tuleb rakendada dielektrikule, et see välja tõmmata?

Ülesanne 16. (**Eesti-Soome 2014**) Kahe väikese magneti vahel mõjuva jõu uurimiseks korraldatakse järgmine katse. Üks magnetitest riputatakse $l = 1\,\mathrm{m}$ pikkuse niidi külge. Teist magnetit hakatakse aeglaselt esimesele magnetile lähemale nihutama nii, et magnetite teljed püsivad kogu aeg samal horisontaalsel joonel. Sel hetkel, kui magnetitevaheline kaugus on saavutanud väärtuse $d_1 = 4\,\mathrm{cm}$ ja riputatud magnet on $x_1 = 1\,\mathrm{cm}$ võrra eemaldunud algasendist, tasakaal kaob ning magnetid tõmbuvad kokku. Oletades, et magnetite vahel mõjuv tõmbejõud F_m sõltub magnetitevahelisest kaugusest d vastavalt seosele $F_\mathrm{m} \propto d^{-n}$, leidke astmenäitaja n väärtus.

Potentsiaalse energia miinumum

Ülesanne 17. (**Lõppv 2002, G1**) Ebaühtlase massijaotusega kera asetatakse poolkerale, kus ta saab veereda, kuid mitte libiseda. Millisele kaugusele a kera keskpunktist peab olema nihutatud kera massikese C, et kera alla ei veereks (vt. joon.)? Nii kera kui poolkera raadius on R.



Diferentsiaalid ja huvitavad jäävusseadused

Ülesanne 18. Varras toetub ühe oma otsaga vastu põrandat ning teisega vastu vertikaalset seina. Milline on varda alumise otsa kiirus u hetkel, mil tema ülemine ots libiseb allapoole kiirusega v ning nurk põranda ja varda vahel α?

Ülesanne 19. Adiabaatilise paisumise korral kehtib $PV^\gamma = const$. Tõestage, et $\gamma = c_\mathrm{p}/c_\mathrm{v}$, kus c_p ja c_v tähistavad gaasi erisoojusi (näiteks mooli kohta) vastavalt konstantsel rõhul ja ruumalal.

Ülesanne 20. Koer ajab taga rebast, kes jookseb sirgjoones konstantse kiirusega v. Koera kiiruse moodul on samuti v, kuid vektor $\vec{v}$ on igal ajahetkel suunatud otse rebase poole. Alghetkel, mil koer rebast märkas ning teda jälitama asus, oli nende vahemaa L ning koera ja rebase kiirsvektorid omavahel risti. Leidke koera ja rebase minimaalne vahemaa jälitamise ajal.

Graafiku tõus

Ülesanne 21. (**Lõppv 2004, G6**) Elektrikannus soojendatakse vett. Teatud hetkel pandi kannu $T_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ juures olevat jääd. Joonisel on toodud vee temperatuuri sõltuvus ajast. Kui suur oli jää mass, kui kannu võimsus $P = 1\,\mathrm{kW}$. Jää sulamissoojus on $L = 335\,\mathrm{kJ/kg}$. Toatemperatuur $T_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$.