TARTU ÜLIKOOL
teaduskool

Анализ размерностей I

Õppevahend TÜ teaduskooli õpilastele

Tartu 2019

Нам уже встречались задачи, в которых формулу вещества необходимо было определить с помощью уравнения идеального газа или по его относительной плотности. Такого рода задачи называются расчётными задачами. Порой они подразумевают умение решать настолько сложные уравнения, что задача кажется нам нерешаемой. В большинстве случаев решение всё же можно найти при помощи достаточно простых методов.

Расчётные задачи подразумевают знание законов физики и использование соответствующих им уравнений и неравенств, т.е. использование математических формул.

Простейшая формула $n = m/M$ встречается в задачах по химии, пожалуй, наиболее часто (в школьной физике часто используется похожая формула $\rho = m/V$). Реже встречается уравнение идеального газа $p\,V = n\,R\,T$. Ещё реже встречаются совсем сложные уравнения, при этом чем выше уровень олимпиады, тем чаще они встречаются.

Задача 1

При сгорании углеводорода (0,2 моль) возникли сажа (2,4 грамм), углекислый газ (13,44 дм^3, при стандартных условиях) и вода (14,43 см^3, 20 °C, 0,9982 г/см^3). Вычислите молекулярную формулу углеводорода.

Решение:

$$n(C) = 2{,}4\ \text{г} \cdot \frac{1\ \text{моль}}{12\ \text{г}} = 0{,}2\ \text{моль}$$

$$n(CO_2) = 13{,}44\ \text{дм}^3 \cdot \frac{1\ \text{моль}}{22.4\ \text{дм}^3} = 0{,}6\ \text{моль}$$

$$n(H_2O) = 14{,}43\ \text{см}^3 \cdot \frac{0{,}9982\ \text{г}}{1\ \text{см}^3} \cdot \frac{1\ \text{моль}}{18\ \text{г}} = 0{,}8\ \text{моль}$$

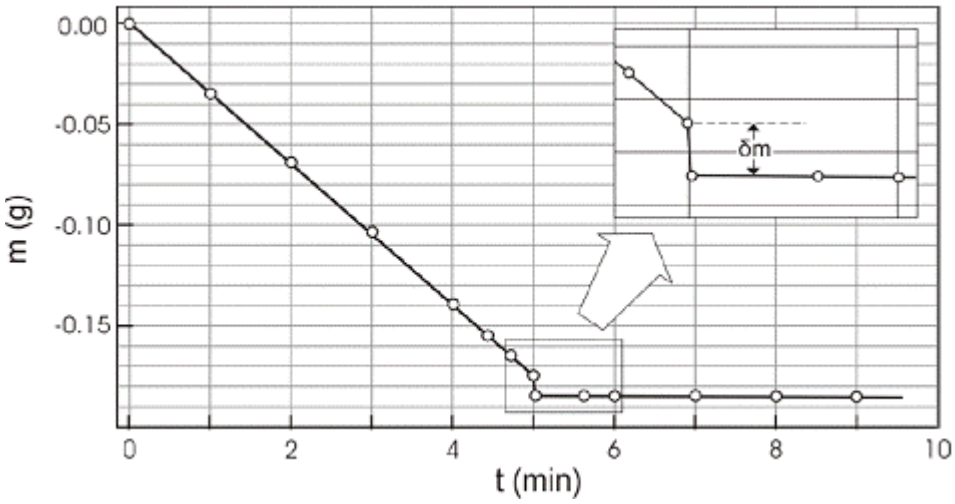
$$N(C) = \frac{(0{,}2 + 0{,}6)\ \text{моль}}{0{,}2\ \text{моль}} = 4,\ N(H) = \frac{0{,}8 \cdot 2\ \text{моль}}{0{,}2\ \text{моль}} = 8$$

Формула этого углеводорода: C_4H_8

К счастью для решения большинства задач не обязательно знать всех законов и формул. Например, на Международной Олимпиаде 2003 года в Афинах была предложена следующая задача:

Задача 2

Описанный в этой задаче эксперимент позволяет определить среднюю скорость молекул *(u)* в газовой фазе над летучей жидкостью. Открытый сосуд (чашку Петри) наполовину наполняют этанолом и ставят на электронные весы вместе с крышкой от этого сосуда. В момент времени $t = 0$ показания весов равны нулю. Изменение показаний весов во времени изображено на рисунке.



В момент времени t = 5 мин сосуд накрывают крышкой. Жидкость больше не испаряется, но молекулы газа, находящиеся над жидкостью, давят изнутри на крышку. Это приводит к уменьшению показаний весов на величину δm. Сила, действующая на крышку, равна $f = \delta mg$, где $g = 9{,}8$ м/с^2. Эту же силу можно рассчитать через производную импульса по формуле: $f = u/2 \cdot \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$.

Используя данные, приведённые на рисунке, рассчитайте среднюю скорость молекул этанола при 290 К.

Решение:

Запомните: как правило, все необходимые для решения данные, в том числе и формулы, есть в условии задачи. Необходимо лишь их правильно применить. Мы видим два уравнения – объединим их в одно и выразим искомую среднюю скорость *(u)*: $u = 2\delta m g(\mathrm{d}t/\mathrm{d}m)$

По рисунку найдем значения δm и угол наклона прямой $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ от 0 до 5-ти минут. Изменение показаний весов δm в момент закрытия чашки равно 0,01 г. Скорость изменения массы ($\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$) при испарении этанола – 0,035 г/мин. Вставив эти значения в полученное нами ранее уравнение, найдем среднюю скорость:

$$u = 2 \cdot 0{,}01\ \text{г} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} : \left(0{,}035\ \frac{\text{г}}{\text{мин}} \cdot \frac{\text{мин}}{60\ \text{с}}\right) = 336\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Если что-то в этом объяснении осталось неясным не нужно сильно волноваться. Начнём по порядку с необходимых нам определений и рассмотрим примеры попроще. Конечная же цель — научиться решать расчётные задачи, в основе которых лежат относительно сложные формулы.

Физическая величина

Изучая естественные и точные науки, мы встречаемся с большим числом физических величин, таких как масса (m), объем (V) или плотность (ρ).

Зачастую эти величины связаны между собой или зависят друг от друга, что выражается формулами, например: $\rho = m/V$.

Физическая величина — это *характеристика* одного из свойств *физического объекта* (системы или процесса). Она может быть схожей в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении физическая величина индивидуальна для каждого объекта. На примере химической посуды это означает, что каждая колба обладает определенным **размером** (*количественная характеристика*) — **объёмом** (*качественная характеристика*) определённого **значения** (*количественная характеристика*), выраженного в некоторых единицах.

В нашем случае колба — объект; объём — величина; размер и значение величины — её количественные характеристики, между которыми существует разница.

Размер — это то, что реально существует, в независимости от того, знаем мы его или нет, а **значение** — это оценка размера, выраженная в виде некоторого числа принятых для неё единиц.

Например, кубик обладает размером грани, значение длины (величины) которой измерено и равно 50 мм или 5,0 см. При этом числовые значения 50 или 5,0 не обязательно являются истинными в виду погрешности измерений. Они не влияют ни на истинное значение длины, ни на выбор единицы измерения (мм, см и др.).

Согласно определению, **числовое значение** физической величины — это просто число, а единица измерения — физическая величина фиксированного размера, которой условно присвоено числовое значение равное единице.

Условимся обозначать единицу измерения физической величины символом самой величины, заключенной в квадратные скобки, а числовое значение величины символом самой величины, заключенной в фигурные скобки. В таком случае значение любой величины Q будет равно:

$$Q = \{Q\}[Q]$$

То есть значение любой физической величины может быть выражено произведением числового значения величины на выбранную для этой величины единицу.

Если величину Q выразить в другой единице [Q'], которая в k раз больше [Q], то новое числовое значение {Q'} будет в k раз меньше {Q}, т.е. значение физической величины Q не зависит от выбора единиц.

Например, длина *l* карандаша равна 177 мм. Изменив единицу длины и перейдя от миллиметров к сантиметрам, получим $l = 177\,\text{мм} = 177 \cdot 0{,}1\,\text{см} = 17{,}7\,\text{см}$.

Следовательно, числовое значение физической величины изменяется вместе с изменением единицы измерения. Её реальный размер при этом не меняется.

Математические операции с физическими величинами

Однородные физические величины можно складывать и вычитать. При этом числовые значения складываются, а единица измерения остаётся неизменной:

$$\{Q\}_1[Q] + \{Q\}_2[Q] - \{Q\}_3[Q] = (\{Q\}_1 + \{Q\}_2 - \{Q\}_2)[Q] = \{Q\}_{\text{sum}}[Q]$$
$$10\ \text{дм}^3 + 30\ \text{дм}^3 - 20\ \text{дм}^3 = (10 + 30 - 20)\ \text{дм}^3 = 20\ \text{дм}^3$$

Задача 3

Используя приведённые данные, рассчитайте предельную проводимость метановой кислоты:

$$\Lambda^0(HCOOH): \Lambda^0(HC\,\text{OONa}) = 90{,}5\ \frac{\text{См}\cdot\text{см}^2}{\text{моль}},\ \Lambda^0(\text{HCl}) = 380{,}5\ \frac{\text{См}\cdot\text{см}^2}{\text{моль}},\ \Lambda^0(\text{NaCl}) = 109\ \frac{\text{См}\cdot\text{см}^2}{\text{моль}}.$$

Решение:

Не вдаваясь в теорию электропроводности растворов электролитов, запишем обменную реакцию: HCOONa + HCl = HCOOH + NaCl. Просто предположим, забыв про теорию, что

$$\Lambda^0(\text{HCOONa}) + \Lambda^0(\text{HCl}) = \Lambda^0(\text{HCOOH}) + \Lambda^0(\text{NaCl})$$

Тогда

$$\Lambda^0(\text{HCOOH}) = \Lambda^0(\text{HCl}) + \Lambda^0(HC\,\text{OONa}) - \Lambda^0(\text{NaCl}) = (90{,}5 + 380{,}5 - 109)\ \frac{\text{См}\cdot\text{см}^2}{\text{моль}} = 362\ \frac{\text{См}\cdot\text{см}^2}{\text{моль}}$$

Наше предположение означало, что в растворе заряд переносят частицы Na^+, Cl^-, H^+ и $HCOO^-$, таким образом

$$\Lambda^0(\text{HCOOH}) = \Lambda^0(HCOO^-) + \Lambda^0(H^+)$$

поэтому предполагаемое равенство выполняется.

Физические величины умножаются и делятся одна на другую согласно правилам:

$$\frac{Q}{P} = \frac{\{Q\}[Q]}{\{P\}[P]} = \frac{\{Q\}}{\{P\}} \cdot \frac{[Q]}{[P]}$$

$$\frac{m}{V} = \frac{19{,}3\ \text{кг}}{1{,}00\ \text{дм}^3} = \frac{19{,}3}{1{,}00} \cdot \frac{\text{кг}}{\text{дм}^3} = 19{,}3\ \frac{\text{кг}}{\text{дм}^3}$$

$$Q \cdot P = \{Q\}[Q] \cdot \{P\}[P] = (\{Q\}\{P\}) \cdot ([Q][P])$$

$$\rho V = 19{,}3\ \frac{\text{кг}}{\text{дм}^3} \cdot 2\ \text{дм}^3 = (19{,}3 \cdot 2) \cdot \left(\frac{\text{кг}}{\text{дм}^3} \cdot \text{дм}^3\right) = 38{,}6\ \text{кг}$$

Задача 4

При определении проводимости раствора метановой кислоты было использовано значение специфической проводимости $\kappa = 0{,}00752$ См/см. Раствор содержал по массе 9,55% метановой кислоты ($\omega_м$) плотностью $\rho = 1{,}02$ г/см^3. Рассчитайте проводимость метановой кислоты Λ.

Решение:

В условии приводятся значения величин κ, ρ. По их единицам измерения, можно предположить, что необходимо использовать значения объёма и молярной массы, для того, чтобы найти количество молей и проводимость метановой кислоты. Единица измерения проводимости См·см^2/моль известна нам ещё с прошлой задачи. Такой подход, в котором мы оцениваем физические величины и их связи друг с другом, называется анализом размерностей. Далее мы познакомимся с ним ещё ближе. А пока проверим, сокращаются ли все единицы измерений:

$$\Lambda = \frac{\kappa V}{n} = \frac{\kappa V M}{\rho V \omega_m} = \frac{\kappa M}{\rho \omega_m} = \left(\frac{0{,}00752 \cdot 46{,}0}{1{,}02 \cdot 0{,}0955}\right) \cdot \left(\frac{\frac{\text{См}}{\text{см}} \cdot \frac{\text{г}}{\text{моль}}}{\frac{\text{г}}{\text{см}^3}}\right) = 3{,}55\ \frac{\text{См} \cdot \text{см}^2}{\text{моль}}$$

Поздравляю, это была первая «серьёзная» формула на нашем пути.

Что касается аргументов показательных, логарифмических и тригонометрических функций, то ими должны быть числа или значения безразмерных величин:

1. $e^{E/kT}$, где E – энергия, k – постоянная Больцмана, T – температура

2. $\ln(p/p_0)$, где p – давление, p_0 – стандартное давление, равное 10^5 Па
3. $\sin(2\pi t/T)$, где t – время, T – период колебания

Во всех этих примерах приведённое в скобках произведение величин безразмерно.

Системы единиц физических величин

Система единиц физических величин — совокупность *основных* и *производных* единиц физических величин, образованная в соответствии с принятыми принципами для заданной *системы физических величин*.

Система физических величин — совокупность физических величин и их производных, образованная в соответствии с принятыми принципами, когда одни величины принимаются за независимые, а другие являются функциями независимых величин. Система величин, на которой строится Международная система единиц (СИ) и которая имеет семь основных величин, называется «система величин ***LMTIΘNJ***», где символы означают соответственно: ***L*** — длина, ***M*** — масса, ***T*** — время, ***I*** — сила электрического тока, ***Θ*** — температура, ***N*** — количество вещества, ***J*** — сила света.

В настоящее время чаще всего используется Международная система единиц (СИ), хотя помимо нее существуют десятки других систем единиц. Это объясняется очень просто — Международная система имеет несомненные преимущества по сравнению со всеми существующими и существовавшими до нее системами единиц. Ее основными единицами являются: метр (м) — единица длины, килограмм (кг) — единица массы, секунда (с) — единица времени, ампер (А) — единица силы тока, кельвин (К) — единица термодинамической температуры, моль (моль) — единица количества вещества, кандела (кд) — единица силы света.

Если говорить о температуре, то следует упомянуть три различных температурных шкалы: Цельсия, Кельвина (термодинамическая температура) и Фаренгейта. Величина градуса в шкалах Цельсия и Кельвина одинакова, другими словами, измерение температуры на 1 градус будет равным в обеих системах. Однако нулевые точки этих шкал отличаются на 273,15 градуса. Перевод температуры из шкалы Цельсия в шкалу Кельвина осуществляется с помощью соотношения $°K = °C + 273{,}15$. Шкала Фаренгейта отличается от шкалы Цельсия не только нулевой точкой, но и величиной градуса. Нулевые точки этих шкал отличаются на 32 градуса по шкале Фаренгейта, а разница их градусов вычисляется по уравнению: $°C = 5/9 \cdot (°F - 32)$.

Задача 5

Медицинский термометр, используемый в домашних условиях, имеет точность ±0,1°C, в то время как, если его использует опытный врач, его точность может составлять ±0,1°F. Для двух этих случаев рассчитайте относительную ошибку измерения температуры 36,6°C.

Решение:

В первом случае относительная ошибка равна $0{,}1/36{,}6 = 0{,}0027$, во втором $5/9 \cdot 0{,}1/36{,}6 = 0{,}0015$.

Вскоре мы убедимся в исключительном удобстве применения системы СИ применительно к формулам и уравнениям. А сейчас познакомимся с некоторыми производными и внесистемными единицами (эти единицы не входят ни в одну из существующих систем):

- кубический метр ($м^3$) — единица объёма
- ньютон (Н) — единица силы ($1\ Н = 1\ кг{\cdot}м/с^2$)
- паскаль (Па) — единица давления ($1\ Па = 1\ Н/м^2$)
- джоуль (Дж) — единица энергии ($1\ Дж = 1\ Н \cdot м = 1\ Па \cdot м^3$)
- кулон (Кл) — единица электрического заряда ($1\ Кл = 1\ А{\cdot}с$)
- вольт (В) — единица электрического потенциала ($1\ В = 1\ Дж/Кл = 1\ Н{\cdot}м/А{\cdot}с$)
- ватт (Вт) — единица мощности ($1\ Вт = 1\ Дж/с = 1\ Н{\cdot}м/с$)
- ангстрем (Å) — единица длины ($1\ Å = 1 \cdot 10^{-10}\ м$)
- литр (л) — единица объёма ($1\ л = 1\ дм^3$)
- бар (бар) — единица давления (10^5 Па)
- миллионная доля (ppm) — единица концентрации, характеризующая относительное соотношение (10^{-6})

Большинство из этих единиц применяются с использованием приставок:

множитель	приставка	сокращение
10^{12}	тера-	Т
10^{9}	гига-	Г
10^{6}	мега-	М
10^{3}	кило-	к
10^{-1}	деци-	д
10^{-2}	санти-	с
10^{-3}	мили-	м
10^{-6}	микро-	мк
10^{-9}	нано-	н
10^{-12}	пико-	п

Множитель перевода (единиц) показывает, сколько единиц измерения определенного размера соответствуют единице измерения другого размера. Множитель перевода всегда равен числу **один**, поскольку он получается при делении одной половины равенства на другую.

$1\ км = 1000\ м \Rightarrow 1 = 1000\ м/км$ или $1 = 0{,}001\ км/м$.

Множитель перевода не изменяет размера величины, он позволяет перейти от заданных величин к искомым.

Потренируемся в переводе единиц измерений и их сокращений.

Задача 6

Океан образован непрерывным слоем воды, объем которого 1,34 миллиарда кубических километров. Его средняя солёность равна 3,50%, на основе чего среднюю плотность можно принять равной 1030 кг/м^3. В одной тонне воды содержится от 100 до 500 микрограммов золота, на основании чего можно заключить, что в среднем в одной тонне океанической воды 300 микрограмм (1 мкг $= 10^{-6}$ г или 10^6 мкг $= 1$ г) золота.

1. Рассчитайте массу мирового океана в тоннах.
2. Рассчитайте массу находящегося в мировом океане золота в килограммах.
3. Рассчитайте, сколько килограммов золота из мирового океана приходится на каждого человека, если на Земле проживает 6,50 миллиарда человек.

Решение:

1. $m = 1{,}34 \cdot 10^9\,\text{км}^3 \cdot \left(\frac{1000\,\text{м}}{\text{км}}\right)^3 \cdot 1030\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{тонна}}{1000\,\text{кг}} = 1{,}38 \cdot 10^{18}\,\text{тонн}$

2. $m = 1{,}38 \cdot 10^{18}\,\text{тонн} \cdot 300\,\frac{\text{мг}}{\text{тонну}} \cdot \frac{\text{г}}{10^6\,\text{мг}} \cdot \frac{\text{кг}}{1000\,\text{г}} = 4{,}14 \cdot 10^{11}\,\text{кг}$

3. $m = \frac{4{,}14 \cdot 10^{11}\,\text{кг}}{6{,}50 \cdot 10^9} = 63{,}7\,\text{кг}$

Анализ единиц измерения

При решении химических задач используются алгебраические операции над единицами измерения, которые можно умножать и сокращать путём деления. Такие операции называются **анализом единиц измерения**. К вышеприведённым примерам рассмотрим ещё несколько. Важно, что в конечных уравнениях, используемых в расчётах, заданные единицы превращаются (путём умножения и сокращения) в искомые единицы измерения.

Задача 7

Одной из наиболее важных научных тем на сегодняшний день является конструирование аккумуляторов с большой энергетической плотностью. Энергетическая плотность аккумуляторов коммерческих фирм составляет до 360 Вт·ч/дм^3. Использование кислорода из воздуха в

качестве окислителя помогло бы значительно уменьшить массу аккумулятора.

Рассчитайте, какой из приведённых ниже элементов мог бы дать наибольшую теоретическую мощность **i)** на единицу массы (Вт·ч/кг) и **ii)** на единицу объёма (Вт·ч/дм^3). Массу кислорода не учитывать.

Расчёты делать, исходя из 1 моля простого вещества, соответствующего каждому элементу. Используйте продукты окисления с наиболее характерными для них степенями окисления. Масса восстановителя может составлять до половины массы аккумулятора.

Энергия Гиббса	Плотность
$\Delta_f G(Al_2O_3) = -1582$ кДж/моль	$\rho_{Al} = 2{,}70$ г/см^3
$\Delta_f G(Li_2O) = -561$ кДж/моль	$\rho_{Li} = 0{,}535$ г/см^3
$\Delta_f G(SiO_2) = -856$ кДж/моль	$\rho_{Si} = 2{,}33$ г/см^3

Предположите, что изменение энергии Гиббса полностью используется для электрической работы.

Решение:

$$P(\text{Li}) = \frac{1}{2}\cdot 561000\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}\cdot\frac{1\,\text{Вт}\cdot 1\,\text{с}}{\text{Дж}}\cdot\frac{1\,\text{ч}}{3600\,\text{с}}\cdot\frac{1\,\text{моль}}{6{,}94\,\text{г}}\cdot\frac{1000\,\text{г}}{1\,\text{кг}}\cdot 0{,}50 = 5610\,\frac{\text{Вт·ч}}{\text{кг}}$$

$$P(\text{Si}) = \frac{1}{1}\cdot 856000\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}\cdot\frac{1\,\text{Вт}\cdot 1\,\text{с}}{\text{Дж}}\cdot\frac{1\,\text{ч}}{3600\,\text{с}}\cdot\frac{1\,\text{моль}}{28{,}09\,\text{г}}\cdot\frac{1000\,\text{г}}{1\,\text{кг}}\cdot 0{,}50 = 4230\,\frac{\text{Вт}\cdot\text{ч}}{\text{кг}}$$

$$P(\text{Al}) = \frac{1}{2}\cdot 1582000\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}\cdot\frac{1\,\text{Вт}\cdot 1\,\text{с}}{\text{Дж}}\cdot\frac{1\,\text{ч}}{3600\,\text{с}}\cdot\frac{1\,\text{моль}}{26{,}98\,\text{г}}\cdot\frac{1000\,\text{г}}{1\,\text{кг}}\cdot 0{,}50 = 4020\,\frac{\text{Вт}\cdot\text{ч}}{\text{кг}}$$

Наибольшая мощность на единицу массы (Вт·ч/кг) у литиевого аккумулятора.

$$P(\text{Li}) = 5610\,\frac{\text{Вт·ч}}{\text{кг}}\cdot\frac{0{,}535\ \text{г}}{1\,\text{см}^3}\cdot\frac{1000\ \text{см}^3}{1\ \text{дм}^3}\cdot\frac{1\ \text{кг}}{1000\ \text{г}} = 3000\,\frac{\text{Вт·ч}}{\text{дм}^3}$$

$$P(Si) = 4230\,\frac{\text{Вт·ч}}{\text{кг}}\cdot\frac{2{,}33\,\text{г}}{1\,\text{см}^3}\cdot\frac{1000\,\text{см}^3}{1\,\text{дм}^3}\cdot\frac{1\,\text{кг}}{1000\,\text{г}} = 9860\,\frac{\text{Вт·ч}}{\text{дм}^3}$$

$$P(Al) = 4072\,\frac{\text{Вт·ч}}{\text{кг}}\cdot\frac{2{,}70\,\text{г}}{1\,\text{см}^3}\cdot\frac{1000\,\text{см}^3}{1\,\text{дм}^3}\cdot\frac{1\,\text{кг}}{1000\,\text{г}} = 10990\,\frac{\text{Вт·ч}}{\text{дм}^3}$$

Наибольшая мощность на единицу объёма (Вт·ч/дм^3) у алюминиевого аккумулятора.

Комментарий автора: Цель этой задачи рассчитать теоретические плотности энергии для трёх потенциальных аккумуляторов. Литиевые аккумуляторы распространены по той причине, что у них наибольшая плотность энергии на единицу массы и потому, что переход $Li \rightarrow Li^+ + e^-$ происходит легко. Однако до теоретического значения ещё далеко,

поэтому Li-аккумуляторы до сих пор интенсивно исследуются по всему миру. Производство кремниевых и алюминиевых аккумуляторов было бы намного дешевле производства литиевых, т.к. эти элементы более распространены. Вдобавок у них большая плотность энергии на единицу объёма. Однако для них ещё не существует практических решений (проблема в саморазряде и в эффективности зарядки).

Заключение

В этой части курса мы познакомились со множеством определений и рассмотрели решения расчётных задач. Теперь Вам предстоит закрепить знания на конкретных примерах в контрольной работе.

В следующей части курса мы продолжим знакомиться с методами решения расчётных задач (на чуть более глубоком уровне).